L’intelligence du calcul

Michèle Artigue
Professeur des universités

I. Introduction

Associer intelligence et calcul peut sembler à première vue étrange, le mot « calcul » renvoyant plus communément à une activité mécanique, automatisable, de plus en plus déléguée d’ailleurs à des machines. C’est avoir là, me semble-t-il, une vision très restrictive de ce que constitue réellement l’activité de calcul en mathématiques, de la diversité de ses facettes, des formes d’intelligence qu’elle nécessite, qu’il s’agisse de choisir les représentations des objets les mieux adaptées aux calculs que l’on souhaite mener, d’organiser et gérer ce calcul dès qu’il ne relève pas de la simple routine, d’en anticiper, interpréter ou contrôler les résultats. C’est aussi rendre difficile l’appréhension du rôle que joue le calcul dans la conceptualisation des objets mathématiques qu’il engage, l’appréhension de son potentiel épistémique, au delà de son potentiel pragmatique de production de résultats. C’est aussi, par voie de conséquence, rendre plus difficile une réflexion pertinente sur la façon dont l’enseignement des mathématiques peut se situer aujourd’hui par rapport à cette question si controversée du calcul, comment nous pouvons développer des compétences de calcul chez nos élèves et mettre ce développement au service de l’apprentissage des mathématiques (Artigue, 2003).

C’est pourquoi associer intelligence et calcul m’a paru une entrée pertinente pour la conférence d’ouverture faite à l’université d’été : « Le calcul sous toutes ses formes » dont ce texte est issu. Et, dans les pages qui suivent, conservant le plan de l’exposé, je souhaiterais faire d’une part émerger l’intelligence qui est souvent à l’œuvre dans les activités de calcul même si elle reste invisible dans les traces ostensives de ce dernier, d’autre part poser la question des moyens de cette intelligence et des conditions de son développement au sein de l’institution scolaire. Je m’appuierai pour cela sur des exemples variés, pris dans différents domaines mathématiques, concernant différents niveaux de scolarité. Car il n’y a pas une mais des intelligences du calcul, et cette intelligence, dans n’importe quel domaine mathématique, peut et devrait trouver à s’exercer, à se développer dès les premiers contacts avec le domaine. J’essaierai aussi de montrer la relativité de cette idée d’intelligence du calcul : un calcul est intelligent pour un individu donné disposant de ressources cognitives et instrumentales données, dans un contexte institutionnel donné.

Le lecteur pourrait s’attendre à ce que ce texte débute par une définition du calcul. C’est ce que nous avons cherché en premier lieu à faire quand, dans la CREM[1], nous avons décidé de nous attaquer à la question de l’enseignement du calcul. Le lecteur qui se penchera, dans (Kahane, 2001), sur le rapport issu de ces travaux que j’ai eu la responsabilité de piloter, verra que nous y avons renoncé car ce qui a d’abord émergé de nos discussions, c’est l’omniprésence du calcul dans les pratiques mathématiques et la diversité de ses facettes. Si le mot calcul vient du latin « calculus » qui désignait les cailloux dont les romains se servaient pour compter, et est associé le plus souvent dans la culture aux calculs numériques élémentaires, aux apprentissages basiques relevant de la trilogie : « lire-écrire-compter », le paysage mathématique du calcul est en effet bien plus complexe :

> « Il concerne au delà des seuls nombres, les objets mathématiques les plus divers, comme en témoignent les adjectifs susceptibles de le qualifier, renvoyant à des objets géométriques ou mécaniques (calcul barycentrique, calcul vectoriel, calcul tensoriel…), à des objets fonctionnels et probabilistes (calcul différentiel et intégral, calcul des variations, calcul stochastique…), voire à des énoncés logiques (calcul

[1] CREM : Commission de réflexion sur l’enseignement des mathématiques présidée à l’époque par Jean Pierre Kahane.

propositionnel, calcul des prédicats…). Chaque type de calcul, ainsi dénommé, s'accompagne de modes de pensée, de techniques spécifiques, faisant du calcul un objet multiforme. » (p. 175)

Existe-t-il une unité qui transcende cette diversité et exprimerait l'essence du calcul ? S'il y a, nous a-t-il semblé, une telle unité, elle se situe plutôt au niveau des processus. Une part essentielle du travail des mathématiciens consiste en effet, pour résoudre les problèmes qu'ils se posent ou qui leur sont posés, à rendre des objets accessibles au calcul, à développer les méthodes de ce calcul, à les conceptualiser et les organiser ensuite au sein de théories. La naissance de l'analyse a été ainsi portée par les méthodes développées pour le calcul de tangente, de trajectoires, d'extrema, de longueurs, d'aires et de volumes… Et la dénomination de ce champ lui-même est longtemps restée une dénomination calculatoire, du calcul infinitésimal des premiers traités aux cours de calcul différentiel et intégral. On pourrait multiplier de tels exemples. Il n'est donc pas étonnant que le calcul soit en quelque sorte partout dense dans l'activité mathématique et qu'il soit si difficile de le circonscrire sans en développer une vision réductrice. C'est pourquoi je n'essaierai pas dans ce texte de donner au terme calcul une définition précise. Je voudrais cependant souligner, dans cette introduction, quelques caractéristiques de ce processus de « mise en calcul » si essentiel aux mathématiques, si consubstantiel de la puissance de cette science.

Rendre des objets accessibles au calcul suppose d'abord un travail de mathématisation[2], privilégiant certaines caractéristiques de ces objets et en occultant d'autres. Ce travail, comme nous l'écrivions dans le rapport de la CREM déjà cité :

« est présent dès les premiers contacts avec le monde du calcul, qu'il s'agisse d'associer un nombre à une collection d'objets en oubliant les caractéristiques propres de ces objets qui n'entreront pas en jeu dans le calcul ou d'associer des grandeurs telles que longueurs, aires, angles à des formes géométriques » (p. 178).

Rendre ces objets mathématisés calculables, c'est ensuite soit développer directement un calcul sur leur ensemble X, soit projeter X, par le biais d'un morphisme f, sur une structure mathématique A dans laquelle un calcul existe déjà : anneau de nombres, espace vectoriel..[3]. Et, dans les meilleurs cas, c'est à dire lorsque l'on sait caractériser les classes d'équivalence induites par le morphisme dans X (autrement dit caractériser ses fibres), on dispose alors non seulement de la possibilité de développer un calcul sur les objets de X mais aussi celle de prouver des propriétés de X via le calcul dans A.

Les objets mathématiques sont, par ailleurs, comme le soulignait Desanti, des idéalités. Même si nous dotons ceux qui nous sont familiers d'une certaine réalité, nous n'accédons pas à eux directement à travers nos sens mais à travers des représentations sémiotiques, des ostensifs divers qui vont du geste, de l'image au symbole. Rendre des objets mathématiques accessibles au calcul, c'est donc aussi les doter de représentations sémiotiques qui supportent efficacement le calcul. Ceci ne va pas de soi, comme le montre particulièrement bien l'ouvrage récent de M. Serfati : « La révolution de l'écriture symbolique » (Serfati, 2005). Faire de l'écriture symbolique algébrique l'outil calculatoire efficace dont il nous semble si naturel de disposer aujourd'hui fut une entreprise humaine de longue haleine. Avec Descartes, enfin, l'essentiel de la tâche est accompli, mais l'ouvrage nous détaille les conquêtes que va encore nécessiter, par exemple, de Descartes à Leibniz, l'opérationnalisation d'un symbolisme exponentiel aujourd'hui complètement naturalisé.

Ce qui fait la puissance des mathématiques, enfin, ce n'est pas seulement le fait qu'elles se dotent d'objets calculables et de systèmes de représentations supportant efficacement ce calcul, c'est aussi que ce calcul puisse s'algorithmiser et s'automatiser. Le calcul est ainsi pris dans un autre mouvement puissant, celui de sa mécanisation qui, lorsqu'elle est réussie, permet de l'exécuter sans intelligence, le réduisant à une succession automatisée de gestes. Cette mécanisation est nécessaire à l'avancée de la

[2] Me référant à G. Israel (1996), je préfèrerai ici le terme de mathématisation à celui de modélisation, tellement galvaudé qu'il en devient complètement flou.

[3] La description que nous donnons ici peut donner l'impression que le processus est linéaire. La réalité est une fois encore plus complexe car les mathématisations effectuées ne sont pas indépendantes des anticipations des mathématiciens sur les possibilités de traitement et de calcul qu'elles sont susceptibles d'offrir.

connaissance et il y a donc, dans la plupart des calculs, une alchimie subtile entre intelligence et routine.

Après avoir dans cette introduction situé l'exposé, je vais en venir, dans une seconde partie, à des exemples. J'essaierai, à travers eux, d'illustrer l'alchimie entre intelligence et routine évoquée ci-dessus, de montrer que l'intelligence d'un calcul peut se manifester dans chacune de ses étapes et enfin d'illustrer la diversité des connaissances qui, suivant les domaines, rendent cette intelligence possible.

II. Quelques exemples

A. Calcul barycentrique

Ce premier exemple se situe dans le domaine géométrique. C'est un choix qui n'a rien d'anodin. Il permet de mettre d'emblée en scène le fait que le calcul concerne les objets mathématiques les plus divers, au delà du seul domaine numérique.

Le problème concerné est le suivant :

Soit un triangle ABC ; on partage en trois segments égaux chacun de ses côtés ; on joint les points ainsi obtenus aux sommets opposés ; on considère ensuite le triangle IJK formé par les intersections des segments « adjacents » (cf. figure 1 ci-après). Déterminer la position du centre de gravité du triangle IJK.

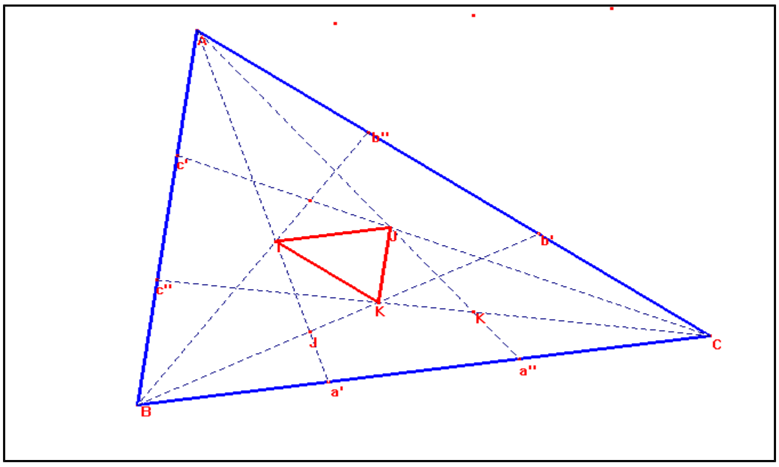

Figure 1

La figure 1 a été tracée avec un logiciel de géométrie dynamique (ici Cabri-géomètre). Elle donne à voir deux triangles semblables (« de même forme » si l'on utilise le langage introduit en classe de seconde) ABC et IJK dont les côtés sont parallèles. Le déplacement des sommets du triangle ABC, qui sont des points libres de la figure, permet de s'assurer que cette particularité résiste au déplacement ; les outils de vérification offerts par le logiciel (qui mettent en jeu la représentation interne des objets et fonctionnent eux aussi sur la base d'un calcul) permettent de tester le parallélisme. Si l'on construit, de plus, deux des médianes du triangle ABC, on constate ce que la figure 1 permettait de conjecturer : les deux triangles ont le même centre de gravité et cette propriété, elle aussi, résiste au déplacement. Il reste donc à prouver cette conjecture. Différentes preuves sont sans doute possibles. Pour moi, une s'est imposée d'emblée quand on m'a posé ce problème, il y a quelques années : une preuve par le calcul et, qui plus est, par un calcul barycentrique. Pourquoi ? Plusieurs raisons, restées implicites sur le moment, ont sans doute nourri ce sentiment d'évidence :

- la notion mathématique en jeu elle-même : centre de gravité donc isobarycentre des sommets du triangle,

- les propriétés de géométrie engagées dans la construction de la figure : partage régulier d'un segment, alignement, intersections, toutes choses que quelqu'un tant soit peu familier avec le calcul barycentrique, reconnaît comme des propriétés faciles à exprimer dans ce langage,
- le fait enfin que, par rapport à d'autres formes de calcul géométrique a priori disponibles, le calcul barycentrique permet de conserver la symétrie initiale de la situation, en faisant jouer aux trois points A, B et C le même rôle.

Ce choix étant fait, il reste à conduire le calcul. Quelles notations choisir ? Au lycée, le calcul barycentrique est porté par des notations vectorielles. N'ayant pas à me soumettre aux règles du contrat didactique du lycée, ce n'est pas cette voie que je vais choisir, pour profiter pleinement de la puissance et de l'économie de ce calcul. J'utiliserai donc uniquement des coordonnées barycentriques. Dans le repère barycentrique (A, B, C), les points a' et b'' ont, par construction, les coordonnées suivantes :a' : (0, 2, 1) et b'' : (2, 0, 1)[4]. Le point I est sur (Aa') donc a des coordonnées de la forme (a, 2b,b) (avec $a+3b\neq 0$). Il est aussi sur (Bb'') et il s'ensuit que $a=2b$ ($b\neq 0$). D'où, par symétrie, les coordonnées des trois points I, J et K

I : (2b, 2b, b) J : (2b, b, 2b) K : (b, 2b, 2b)

et celles du centre de gravité du triangle IJK : (5b,5b, 5b), ce qui achève la preuve.

On remarquera que dans les lignes qui précèdent, les traces ostensives du calcul sont absentes. Ne sont donnés à voir que des systèmes de coordonnées barycentriques des points considérés. Le calcul qui supporte le raisonnement est, dans cette situation, suffisamment simple pour pouvoir être effectué mentalement. Ceci ne serait pas le cas si on avait choisi une représentation vectorielle des relations barycentriques et je laisse au lecteur le soin de comparer avec la résolution que l'on pourrait attendre d'un élève de première.

Où se manifeste ici l'intelligence du calcul ? D'abord dans le choix du type de calcul, ensuite dans le choix de représentation sémiotique associé à ce calcul. Le reste peut être considéré comme relevant de la routine pour quelqu'un familier avec la notion de barycentre : écrire les coordonnées barycentriques des points, traduire alignements et intersections…, en suivant le fil de la construction de la figure. Et quand on arrive aux coordonnées de I, on sait déjà, anticipant les formes qui seront obtenues par simple permutation pour J et K vu les choix de calcul effectués, et anticipant leur somme, que l'on a gagné. La situation est bien sûr tout autre pour celui qui n'a pas encore acquis cette familiarité.

B. Entre algèbre et géométrie

Le problème considéré dans ce second exemple, au confluent de l'algèbre et de la géométrie, est issu de l'annexe au rapport sur le calcul[5]. C'est un problème, comme on en rencontre de nombreux dans les manuels de seconde, où l'on étudie les variations d'une grandeur géométrique en fonction d'une autre.

1. Le problème initial

Le texte en est le suivant :

> *On considère un rectangle ABCD avec AB = 9 cm et BC = 6 cm, M sur [A,B], N sur [B,C], O sur [C,D] et P sur [D,A] tels que AM = BN = CO = DP. Comment varie l'aire du quadrilatère MNOP lorsque M se déplace sur [A,B] ? Calculer sa valeur minimale.*

Comme dans le cas précédent, on peut commencer par explorer cette situation avec un logiciel de géométrie dynamique. Ceci permet de confirmer l'intuition que l'aire décroît, passe par un minimum puis recroît, et aussi d'invalider la conjecture émergeant spontanément que le minimum doit être

[4] A un coefficient de proportionnalité près bien sûr, comme pour tout système de coordonnées barycentriques.

[5] Cette annexe est accessible sur le site de la CREM, lui-même dans la rubrique enseignement du site de la Société mathémarique de France : www.smf.fr

atteint quand M est situé au milieu de [A,B]. L'exploration montre en effet que le minimum est atteint entre 3,5 cm et 4 cm pour AM. On note, en fait, une plage stable pour l'aire, à la précision des calculs près, entre 3,72 cm et 3,78 cm. Ceci peut conduire à rectifier la conjecture initiale, si l'on remarque que, dans cette plage, se trouve justement la valeur 3,75 cm qui correspond au quart du demi-périmètre. Mais ce n'est encore qu'une conjecture, si même elle est formulée, et ne donne pas la valeur minimale demandée.

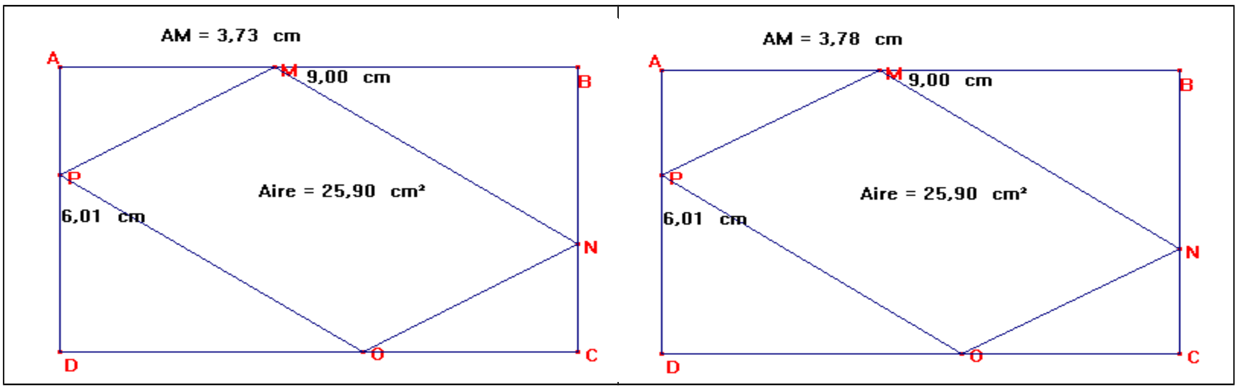

Figure 2

Calculer l'aire du quadrilatère MNOP, qui est en fait un parallélogramme, peut *a priori* se faire de plusieurs manières. Une seule est vraiment économique, celle qui consiste à procéder par différence à partir de l'aire du rectangle ABCD. Détaillons cette fois les calculs, en notant classiquement x la mesure de AM :

Aire ABCD = 9x6 = 54

Aire AMP = Aire de CNO =

Aire BMN = Aire de DOP =

D'où l'expression : 54 - x(6-x) - x(9-x)

Soit, en développant : $2x^2 - 15x + 54$, polynôme du second degré que nous noterons dans la suite A(x). Pour calculer son minimum, diverses techniques sont disponibles, notamment celle consistant à le mettre sous forme canonique, qui conduit à la forme : $2(x - 15/4)^2 + 207/8$. Je vais en utiliser ici une autre, en m'appuyant sur la conjecture précédemment faite. Si 3,75 est la valeur pour laquelle le minimum de A(x) est atteint, c'est que la quantité A(x)-A(3,75) est toujours positive ou nulle. Comme c'est une expression du second degré, c'est donc, à un coefficient près, un carré parfait. Ce raisonnement fait, si l'on délègue l'exécution des calculs à une calculatrice symbolique, on obtient comme le montre la figure 3 réalisée avec une TI92, une première expression dans laquelle un élève de seconde aura sans doute du mal à reconnaître un carré parfait. L'utilisation de la commande de factorisation permet ensuite d'obtenir la forme cherchée.

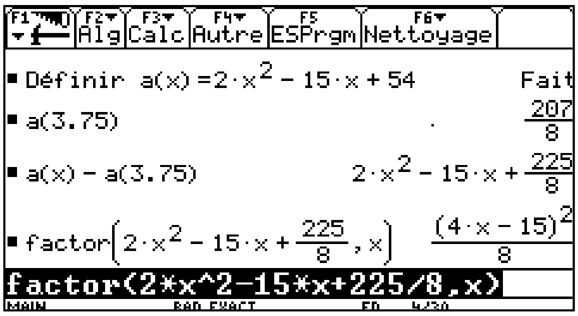

Figure 3

2. *Un premier rebondissement*

Dans le cas de ce rectangle particulier, le minimum a été obtenu pour le quart du demi-périmètre. Pour le mathématicien, il est naturel de se demander s'il s'agit là d'un phénomène particulier ou plus général. D'où la question : est-ce que, lorsque les dimensions du rectangle le rendent possible (le quart du périmètre inférieur à la largeur), le minimum est toujours atteint pour le quart du demi-périmètre ? Le calcul algébrique se prête tout particulièrement à ce travail de généralisation. Il suffit d'introduire des paramètres a et b pour les longueurs des côtés du rectangle et de reproduire les mêmes calculs pour avoir confirmation de cette conjecture, comme le montre la figure 4.

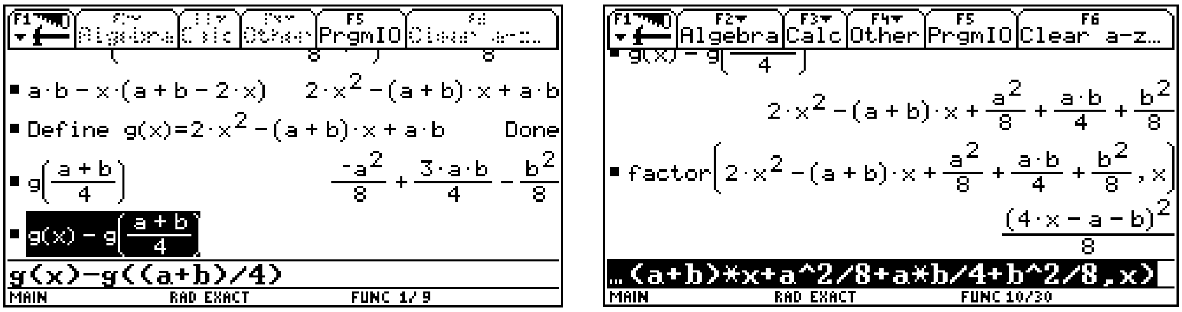

Figure 4

3. *Un second rebondissement*

Et le problème peut encore rebondir comme l'a montré A. Warusfel à l'université d'été. Pourquoi cette valeur du quart du demi-périmètre ? Est-elle liée aux caractéristiques de cette seule classe de problèmes ?

Notons f la fonction qui associe aux deux dimensions du rectangle : a et b, la valeur pour laquelle est obtenue le minimum. Que sait-on a priori de f ? Lorsque le rectangle est un carré, il est facile de déterminer la valeur de f : c'est : $a/2$ (on retrouve l'intuition initiale du milieu de [AB]). On sait de plus que, pour tout couple (a, b), $f(a, b) = f(b, a)$, et que le résultat obtenu ne dépend que du rapport a/b du fait de l'invariance du problème par homothétie.

On a donc, pour tout triplet (a, b, k) : $f(ka, kb) = k.f(a, b)$.

D'où, pour tout couple (a, b) avec $b \neq 0$: $f(a/b, 1) = f(a, b)/b$.

Ou encore $f(a, b) = b.g(a/b)$ en posant $g(x) = f(x, 1)$.

On se ramène alors à l'étude des fonctions g définies sur IR^{+*} qui vérifient l'équation fonctionnelle : $g(x)=x.g(1/x)$ et prennent la valeur ½ en 1.

Cette classe de fonctions contient bien d'autres objets que celui associé à nos rectangles qui n'est autre que la fonction affine définie par $g(x)=(x+1)/4$. On peut définir arbitrairement par exemple g sur]0,1[, poser : $g(1)=1/2$ et prolonger ensuite g sur]1,+∞[en utilisant la relation fonctionnelle. Mais on peut montrer, par le calcul, que si l'on sait que g est une fonction polynomiale, c'est forcément cette fonction affine et que le résultat se généralise sans difficulté à des solutions développables en série entières.

4. *Une preuve par le calcul géométrique*

Nous sommes ici restés, pour ce qui est des calculs, dans le cadre de l'algèbre mais on peut obtenir le résultat par un calcul géométrique, comme nous le montrons ci-après, en reprenant la preuve abrégée donnée dans l'annexe au rapport sur le calcul déjà citée[6] :

« Minimiser l'aire du parallélogramme revient à maximiser la somme des aires des quatre rectangles entourant le rectangle IJKL de la figure ci-après, donc à minimiser celle du rectangle IJKL qui représente la différence avec l'aire du rectangle ABCD. Lorsque AM = BC/2, l'aire de IJKL est nulle. La différence avec l'aire du rectangle ABCD devient alors négative et elle est minimum lorsque IJKL est un carré puisque le périmètre de IJKL est alors constant. Ceci est atteint pour AM= (AB+BC)/4. Ensuite l'aire recommence à croître. Elle s'annule à nouveau pour AM=AB/2 puis redevient positive. »

[6] J'ai rencontré cette preuve, pour la première fois, lors d'un exposé de J.C. Fenice à l'IREM de Reims.

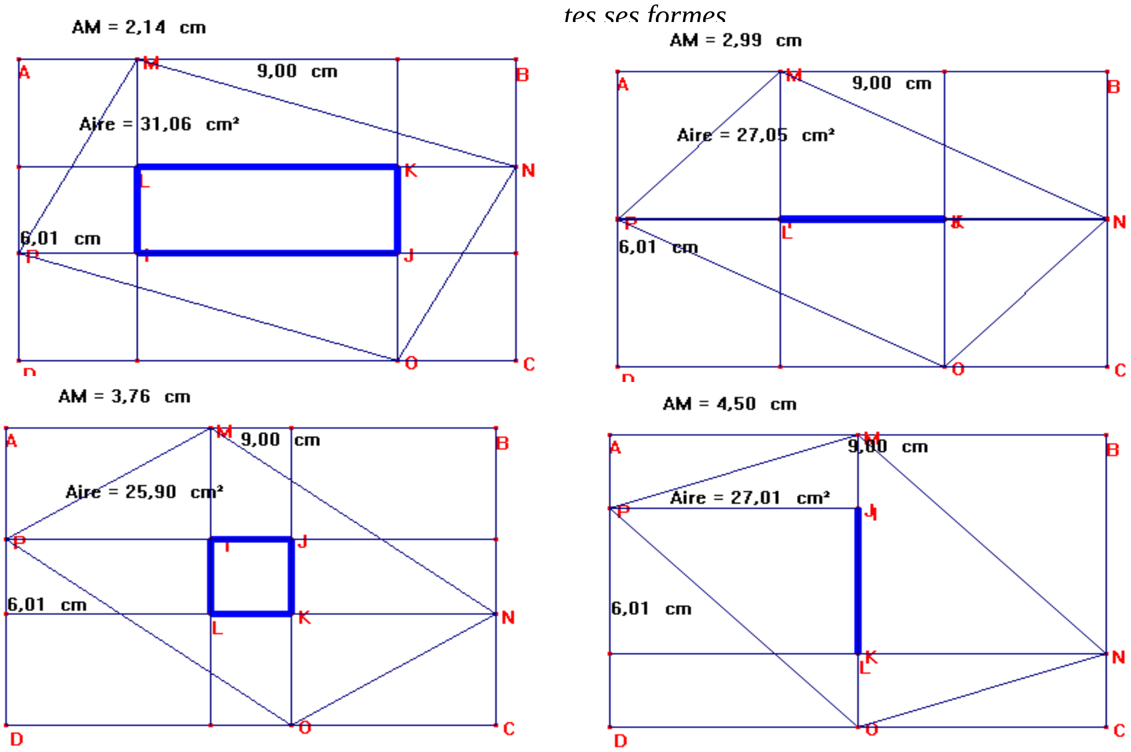

Figure 5

5. L'intelligence de ces calculs

L'intelligence a été à l'œuvre dans les divers calculs menés ci-dessus de multiples façons et je ne prétendrai pas ici mener une analyse exhaustive. Si l'on considère le problème initial et sa résolution, elle est d'abord à l'œuvre dans l'établissement de la conjecture : chercher à relier la plage de stabilité de l'aire aux données du problème en trouvant une combinaison numérique simple qui va, à partir de 9 et 6, produire un nombre de cette plage ayant un sens géométrique. Elle se manifeste ensuite dans le choix fait pour le calcul de l'aire, indirectement par différence, un choix qui ne s'impose pas d'emblée à des élèves de seconde habitués à calculer des aires, directement, par utilisation de formules. Une fois ce choix fait, on peut espérer qu'à ce niveau, le reste du calcul relève de la routine. On arrive à une expression du second degré dont il faut trouver l'extremum. La mise sous forme canonique est une technique de calcul qui relève pour nous de la routine. Ce n'est pas le cas pour un élève de seconde même si ce n'est pas pour lui une technique inconnue. Il faut de plus, qu'indépendamment de son exécution technique, il décide d'y avoir recours, prévoyant qu'elle va apporter la solution. En seconde, un élève a rarement à assumer ce genre d'initiative. La solution alternative proposée est, elle, moins standard et, quand on demande à des enseignants en formation, quelles techniques en seconde permettent de résoudre le problème, elle émerge rarement. Elle demande, même si l'on dispose d'un outil de calcul symbolique, pour piloter le calcul et le faire aboutir, une intelligence des formes algébriques sur laquelle nous reviendrons dans la suite. Même si l'on ne pousse pas l'anticipation jusqu'à prévoir un carré parfait, il faut penser la factorisation comme la technique de calcul exécutable par la machine qui va donner accès au signe de l'expression. La première généralisation est, pour nous, encore une fois, simple routine. Elle ne l'est bien sûr pas pour un élève de seconde, ni dans son principe, ni dans son exécution technique. Et, même si l'on met à sa disposition un outil de calcul symbolique, piloter le calcul en transposant dans le cas général ce qui n'a été fait que dans un cas particulier, sans se laisser influencer par l'accroissement de complexité ostensive induit par l'introduction des deux paramètres, relève à ce niveau de l'intelligence du calcul. L'intelligence du calcul est bien sûr à l'œuvre, à un tout autre degré, dans la seconde généralisation. Elle l'est dans la distance prise par rapport aux calculs effectués jusqu'alors et le déplacement d'attention qui s'ensuit au niveau fonctionnel : de la fonction aire à la fonction donnant la valeur pour laquelle le minimum est atteint. Ce déplacement d'attention est lui-même lié au repérage de l'invariance de la situation par homothétie et aux anticipations calculatoires que ce repérage permet à celui qui a l'expérience mathématique nécessaire. Il sait qu'il sera sans doute intéressant de rompre la symétrie des écritures cette fois en transformant la fonction de deux variables en une fonction d'une variable modulo le changement de variable x=a/b ou x=b/a. Mais c'est la symétrie inhérente au problème qui, exprimée par rapport à cette nouvelle variable x, va permettre au calcul d'aboutir en conduisant à une équation fonctionnelle simple et inattendue. Le calcul qui, ensuite, permet d'établir que si g est une fonction polynomiale, elle est affine et est la fonction déjà obtenue est, pour celui qui en est arrivé là, sans aucun doute simple mécanique. L'intelligence ici réside plutôt dans l'idée de soumettre les fonctions polynomiales à ce calcul, puis dans l'intuition, l'ayant effectué, qu'il n'a aucune raison de ne pouvoir se généraliser aux polynômes indéfiniment continués que sont les séries entières. La preuve géométrique par le calcul, enfin, est une illustration de l'intelligence qui peut être sous-jacente à ce type de calcul, même lorsque les décompositions, recompositions qui en sont les techniques de base ne font intervenir que des figures très simples et des isométries. L'intervention qu'y fait l'algèbre, avec le passage aux négatifs dans le cas de superposition est, elle, peu banale et le raisonnement qui soutient alors le calcul, basculant de la recherche d'un minimum à celle d'un maximum, le rôle que joue la visualisation permise par la géométrie dynamique dans l'apparition du carré et le calcul qui s'ensuit pour montrer l'invariance du périmètre et justifier la conjecture, font de l'ensemble une construction particulièrement subtile même si elle n'utilise que des techniques très élémentaires.

C. Calcul arithmétique

Le troisième exemple que nous prendrons est celui d'un calcul arithmétique. Il intervient dans la résolution du problème suivant :

Quels sont les entiers naturels qui peuvent s'écrire comme somme d'entiers naturels consécutifs non nuls ?

Une fois de plus, la technologie peut aider à explorer le problème et j'utiliserai cette fois un tableur (cf. figure 6) pour construire un tableau donnant dans la case (n,p) la valeur de la somme S(n,p) des p nombres consécutifs : n, n+1, …, n+p-1, pour n>0 et p>1.

n/p	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
2	5	9	14	20	27
3	7	12	18	25	33
4	9	15	22	30	39
5	11	18	26	35	45
6	13	21	30	40	51
7	15	24	34	45	57
8	17	27	38	50	63
9	19	30	42	55	69
10	21	33	46	60	75
11	23	36	50	65	81
12	25	39	54	70	87
13	27	42	58	75	93
14	29	45	62	80	99
15	31	48	66	85	105
16	33	51	70	90	111

Figure 6

Pour construire le tableau, j'ai calculé cette somme. C'est un calcul dont j'ai mémorisé depuis longtemps le principe et qui ne me demande plus d'intelligence. Ce n'était sans doute pas le cas de Gauss quand, enfant, il l'a produit, selon ce que l'on raconte, pour calculer la somme des 100 premiers entiers et c'est à juste titre qu'il a ainsi ébloui son maître. Mais, utilisant un tableur, j'aurais pu construire le tableau sans être capable de calculer cette somme, simplement en utilisant les relations de récurrence suivantes :

$$S(1, p+1)=S(1, p)+(p+1) \quad \text{et} \quad S(n+1, p)=S(n, p)+p$$

On repère tout de suite, en examinant le tableau, que l'on obtient dans la première colonne tous les nombres impairs et, dans les colonnes suivantes, des nombres de 3 en 3, de 4 en 4…. Tous les entiers ou presque semblent être là. En y regardant de plus près, on s'aperçoit cependant que manquent 2, 4, 8, 16, 32. D'où la conjecture : tous les entiers naturels sauf les puissances de 2 sont somme d'entiers naturels consécutifs.

La preuve va conjuguer raisonnement et calcul. Il faut pour cela caractériser, de façon accessible au calcul, la propriété pour un nombre de ne pas être une puissance de 2. On va le faire en écrivant que cette propriété est équivalente au fait d'avoir un diviseur impair et que ces nombres sont donc exactement ceux qui peuvent s'écrire sous la forme : $2^k.k'$ avec $k'>1$ impair.

Montrons d'abord, c'est le plus facile, qu'aucune puissance de 2 n'est atteinte. L'expression de S(n,p) en fonction de n et p devient ici nécessaire.

$$S(n,p) =$$

- Si p est impair, 2n+p-1 est pair et sa moitié est un entier. S(n,p) admet donc p comme diviseur impair.
- Si p est pair, p/2 est entier et 2n+p-1 est alors un diviseur impair de S(n,p).

Pour montrer, en sens inverse, que tous les entiers sauf les puissances de 2 peuvent être atteints, on va audacieusement apparier la factorisation que nous donne l'expression de S(n,p) et celle associée à l'écriture $2^k.k'$ d'un nombre quelconque non puissance de 2 donné.

Essayons d'abord avec l'appariement : $p = 2^{k+1}$ et $2n+p-1 = k'$. On a bien alors $p\geq 2$ mais, pour que n soit positif strict, il faut que l'on ait : $k'+1-2^{k+1} > 0$, soit : $k'-2^{k+1} > -1$.

Si ce n'est pas le cas, posons : $p = k'$ et $2n+p-1 = 2^{k+1}$. On a toujours $p\geq 2$ et, pour que n soit positif strict, il faut cette fois que l'on ait : $2^{k+1} - k'+1> 0$, soit : $k'-2^{k+1} < 1$

L'une des deux conditions au moins étant toujours satisfaite, l'appariement est toujours possible, ce qui termine la preuve de la conjecture.

En quoi réside ici l'intelligence du calcul ? Elle réside essentiellement, le lecteur l'aura compris en lisant les lignes qui précèdent, dans la capacité à exprimer sous une forme positive la propriété pour un nombre entier de ne pas être une puissance de 2 et à en déduire une expression symbolique caractérisant ce type de nombre. Elle réside aussi sans doute dans le pari qui est fait d'associer deux factorisations qui *a priori* n'ont pas de raison particulière d'être associées, renonçant en quelque sorte à la recherche d'une raison générale pour un calcul ad hoc qui se révèle marcher. Il y a aussi de l'opportunisme dans l'intelligence du calcul !

D. L'analyse et le caractère local du calcul

Le dernier exemple que je prendrai concerne le champ conceptuel de l'analyse et nous fera approcher les changements dans le rapport au calcul que l'entrée dans ce champ nécessite. Il s'agit là d'un exercice ordinaire sur les séries numériques mais les difficultés que rencontrent la plupart de mes étudiants de CAPES à le résoudre me paraissent bien montrer que, malgré une fréquentation de plus de cinq ans de l'analyse, ils ont toujours du mal à gérer intelligemment les calculs, même simples, que le travail dans ce champ nécessite. L'énoncé de l'exercice est le suivant :

Etudier la convergence de la série de terme général $u_n =$

Face à un tel objet, mes étudiants de CAPES ne sont pas bien sûr démunis. La plupart commencent par évaluer l'ordre de grandeur du terme général de la série et, menant mentalement ou plus souvent par écrit un calcul d'équivalents, par écrire au brouillon :

$n^2+1 \sim n^2$

$\sim$

Arrivés à ce stade, il reconnaissent une série de Bertrand divergente ou, plus élémentairement, minorent par 1/n et concluent en utilisant les théorèmes de comparaison à la non-convergence absolue de la série. Leur trajectoire rejoint alors celle de ceux qui, d'emblée, ont rangé la série à étudier dans la catégorie des séries alternées et essayé d'utiliser le théorème spécifique les concernant[7].

Il leur faut donc montrer que le terme général a pour limite 0 quand n tend vers l'infini, ce qui ne pose pas de problème, puis que la suite des valeurs absolues des u_n est décroissante à partir d'un certain rang. Montrer la décroissance passe par le calcul. Différentes techniques sont *a priori* possibles : calculer $|u_{n+1}| - |u_n|$, calculer $\left| \quad \right|$. Vu la forme de u_n , choisir la première ne serait pas très intelligent mais la seconde conduit à une expression dont la comparaison à 1 n'est pas évidente. Ceux qui se sont engagés dans l'une ou l'autre de ces voies assez vite renoncent et décident de prouver la décroissance en passant par l'étude de la fonction associée définie par : f(x) = sur IR^{+*}.

Ils se lancent donc dans le calcul de la dérivée de cette fonction pour obtenir, par un calcul routinier, f'(x)= . Comme le lecteur s'en rendra compte aisément, déterminer le signe de cette expression sur]0,+∞[n'est pas évident. C'est pourtant ce que tentent de faire chaque année les étudiants, associant une nouvelle fonction auxiliaire au numérateur de la dérivée et la dérivant sans bien sûr aboutir. Ils ne semblent pas anticiper le fait que, s'ils n'isolent pas le logarithme, la dérivation ne simplifiera pas les expressions. Pris par la routine de l'étude des variations des fonctions, ils oublient aussi que, ce qui les intéresse, ce n'est pas le signe de la dérivée sur IR^{+*} mais ce signe au voisinage de l'infini. Et, quand finalement cette indication leur est donnée, puis que certains réalisent que, pour s'en sortir, il suffirait de montrer que la limite en l'infini du numérateur de la dérivée est négative (elle est ici égale à -∞), ils ont le sentiment d'avoir fait une découverte.

La spécificité du calcul en analyse peut s'exprimer dans cet exercice de manière différente. Au lieu d'essayer d'utiliser directement le théorème des séries alternées, on peut, par exemple, par une stratégie de développement asymptotique classique dans ce domaine, utiliser l'équivalent initialement trouvé pour décomposer la série en somme de deux séries. On obtient alors :

$$u_n = \quad -$$

Il est cette fois facile de montrer que la première série vérifie le théorème des séries alternées, la fonction associée étant décroissante pour x>e. Quant à la seconde, son terme général est, en valeur absolue, équivalent à : . C'est donc le terme général d'une série absolument convergente. Finalement, on en conclut que la série de terme général u_n, somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente est convergente.

Comme on le voit aisément, l'intelligence du calcul ici, même si elle se nourrit des compétences acquises en calcul algébrique, nécessite d'autres connaissances qui conditionnent l'efficacité du jeu sur les ordres de grandeur relatifs des expressions manipulées, qui conditionnent l'exploitation du caractère local des calculs qui sont menés. Et les difficultés que rencontrent beaucoup d'étudiants de CAPES à le résoudre montrent bien que mettre en œuvre cette intelligence du calcul en analyse ne va pas de soi, même quand on dispose comme eux d'une expérience de plusieurs années de calcul dans ce domaine.

J'ai, dans cette seconde partie, essayé d'exploiter quatre exemples, en variant les niveaux de scolarité et les domaines mathématiques, parmi une multitude d'autres possibles. Dans ce qui suit, je vais essayer d'en synthétiser les leçons didactiques à partir des questions suivantes : quels sont les besoins mathématiques de l'intelligence du calcul ? Comment les satisfaire ?

III. Les besoins mathématiques de l'intelligence du calcul, la satisfaction de ces besoins

[7] Ce théorème assure que la série de terme général $(-1)^n u_n$ avec u_n de signe constant converge si la suite ($|u_n|$) est décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0.

A. Les besoins mathématiques de l'intelligence du calcul

L'intelligence du calcul, comme le montrent les exemples présentés précédemment, a des besoins mathématiques multiformes et qui varient d'un domaine mathématique à l'autre. Sans prétendre à l'exhaustivité, je distinguerai ici trois types de besoins qui me semblent essentiels : répertoire, flexibilité, spécificité.

1. Répertoires

L'intelligence du calcul a besoin, pour fonctionner, de répertoires. Ces répertoires sont de nature diverse. On pense bien sûr tout de suite aux répertoires basiques que constituent la table d'addition et les tables de multiplication. Ce répertoire est incontournable mais il est loin d'être suffisant et ce, pour de multiples raisons. D'une part, très vite le système des nombres manipulés s'étend au delà du domaine des entiers et le répertoire doit s'enrichir en conséquence ; le calcul lui-même s'étend à d'autres objets que les nombres et le répertoire va devoir dépasser le seul cadre numérique, pour permettre par exemple la reconnaissance, la manipulation de formes algébriques, d'expressions trigonométriques. D'autre part, le répertoire qui fonde l'intelligence du calcul, comme le montrent bien je l'espère les exemples ci-dessus, n'est pas seulement un répertoire de résultats numériques et de formules diverses, c'est aussi un répertoire de techniques, de stratégies, de situations, qui constituent la référence et vont permettre, en dehors des situations routinières :

- de faire des choix efficaces de type de calcul,
- de choisir des représentations pertinentes pour les objets engagés dans le calcul et d'interpréter celles qui apparaissent au fil du calcul,
- de faire des anticipations et de piloter le calcul en fonction du but poursuivi, des anticipations faites, et de ce que produit le calcul effectif, abandonnant au besoin une piste qui semblait au départ prometteuse,
- de contrôler le calcul en mettant en jeu des critères pertinents et économiques pour ce contrôle, au cours même du calcul ou en fin d'exécution,

de mettre, en d'autres mots, connaissances et routines au service de la créativité mathématique.

Dans les exemples choisis, le travail de contrôle interne au calcul a été peu mis en évidence. Les calculs étaient le plus souvent peu complexes et quand on aboutissait à un résultat, il s'imposait en quelque sorte puisque le calcul avait servi à prouver une conjecture élaborée par ailleurs. La situation est différente dans la situation que nous avons proposée en exercice à la fin de la conférence : celle du calcul approché avec contrôle de l'approximation de l'aire d'un cône à base circulaire dont le sommet n'est pas sur l'axe du cercle. Là, la longueur et la complexité des calculs rend le risque d'erreur plus important, on n'anticipe pas la valeur du résultat, le besoin de contrôler les calculs menés se fait naturellement plus régulièrement sentir. Le besoin d'outils efficaces de contrôle qui ne se limitent pas à refaire le calcul pas à pas, en en vérifiant chaque étape, devient alors essentiel. Ceci nous conduit naturellement au second type de besoin que je souhaitais pointer : les besoins en flexibilité.

2. Flexibilité

L'intelligence du calcul nécessite aussi de la flexibilité : flexibilité entre cadres, la notion de cadre étant ici prise dans l'acception que lui a donné en didactique des mathématiques R. Douady (1986)[8], entre registres sémiotiques[9], entre points de vue. On a vu dans certains des exemples ci-dessus jouer la

[8] Un cadre est ainsi défini comme un ensemble d'objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et relations.

[9] Ce terme est utilisé ici avec l'acception que lui donne R. Duval (Duval, 1995). Un registre de représentation sémiotique doit permettre les trois opérations fondamentales suivantes : la formation de représentations dans le registre, leur traitement à l'intérieur du registre, la conversion vers un autre registre de représentation. Ainsi par exemple, on distingue classiquement quand il est question d'algèbre et de fonctions : le registre de la langue

flexibilité entre cadres. Dans le cas du quadrilatère par exemple, même lorsque le calcul était mené dans un cadre algébrique, son pilotage, son contrôle, l'interprétation de ses résultats mettaient en jeu le cadre géométrique dans lequel se situait le problème. Cette flexibilité entre cadres est aussi la clef d'une des solutions à la question suivante[10] :

Est-ce que si deux nombres sont chacun somme de deux carrés d'entiers, leur produit l'est aussi ?

Le problème, posé dans un cadre arithmétique peut être bien sûr résolu dans ce cadre, en recourant au registre symbolique algébrique pour atteindre la généralité, mais le passage au cadre des complexes en donne une solution particulièrement élégante. Si $N=a^2+b^2$ et $N'=c^2+d^2$, associons à N le nombre complexe $z=a+ib$ et à N' le nombre complexe $z'=c+id$. On reconnaît alors dans N le carré du module de z et dans N' le carré de celui de z'. Le module du produit étant le produit des modules, N.N' est le carré du module de z.z', et c'est bien la somme de deux carrés : $(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$. On obtient ainsi l'identité $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$, connue sous le nom d'identité de Lagrange.

On a vu aussi jouer la flexibilité entre points de vue : appartenir à un segment, c'est être le barycentre avec des coefficients positifs de ses deux extrémités, ne pas être une puissance de 2, c'est avoir un diviseur impair par exemple. On a peut-être moins vu celle entre registres sémiotiques, même si différents registres sont intervenus : celui des figures géométriques, celui des écritures numériques, des systèmes de coordonnées, des expressions symboliques algébriques, des suites et séries, des fonctions. Même quand on se situe dans un cadre donné, le calcul fait en effet souvent intervenir plusieurs registres sémiotiques. Si l'on travaille avec des nombres complexes dans un cadre algébrique, par exemple, on a le choix entre le registre cartésien, le registre trigonométrique, le registre exponentiel et le registre symbolique intrinsèque, celui dans lequel s'expriment des formules telles que $|z| = z.\bar{z}$ ou $1/z = \bar{z}/z^2$. Les élèves de lycée tendent à privilégier la forme cartésienne qu'ils rencontrent en premier même lorsque d'autres formes seraient *a priori* plus adaptées au calcul, par exemple dans certains calculs de racines et de puissances[11]. En arithmétique aussi, comme l'a par exemple bien montré V. Battie dans sa thèse (Battie, 2003), plusieurs modes de représentation sont possibles, sous-tendant des points de vue différents sur les objets manipulés, et la capacité à choisir le mode de représentation le plus adapté à un calcul donné ou à changer de mode de représentation selon l'évolution du calcul est une des clefs de l'efficacité.

Et, même lorsque l'on reste à l'intérieur d'un même registre sémiotique, les besoins de flexibilité ne sont pas absents. Le problème du quadrilatère l'a bien montré en ce qui concerne le registre symbolique algébrique. Un objet algébrique : équation, fonction, admet différentes représentations symboliques. Si ces expressions ont la même référence, elles ne nous donnent pas la même information sur l'objet concerné, ce qu'exprime la distinction entre sens et dénotation introduite par Frege et reprise par de nombreux didacticiens (cf. (Bardini, 2003) pour une vision synthétique). Une expression développée donne un accès immédiat au terme de plus haut degré, à la valeur en 0 ; elle ne nous donne pas, sauf exception, un accès facile au signe de l'expression, ce que permet en revanche une expression factorisée. L'intelligence du calcul algébrique suppose que l'on sache piloter des calculs à dénotation fixe en fonction du sens des expressions.

3. Intelligence du calcul entre généricité et spécificité

---

naturelle, le registre des expressions symboliques algébriques, le registre des représentations graphiques. Plusieurs cadres peuvent utiliser le même registre et que le travail dans un cadre mobilise généralement plusieurs registres.

[10] Cette question est souvent revenue dans les réponses spontanées des divers collègues que nous avons sollicités en leur demandant des exemples de calculs intelligents, en préparant cette conférence d'ouverture.

[11] Si l'on veut par exemple résoudre l'équation en z, $e^z=u$, u étant un nombre complexe donné, il est commode d'exprimer l'inconnue z sous forme cartésienne z et la donnée u sous forme exponentielle.

Dans ce qui précède, j’ai évoqué des besoins qui peuvent être considérés comme des besoins génériques de l’intelligence du calcul même s’ils s’actualisent de façon différente suivant les domaines. Dans ce paragraphe, je voudrais insister en revanche, dualement, sur les spécificités de l’intelligence du calcul. Même s’ils partagent un fond commun, les calculs en combinatoire, arithmétique, algèbre, analyse, géométrie, probabilités et statistiques… ont chacun leur intelligence propre liée aux caractéristiques des objets qu’ils engagent, aux représentations disponibles pour ces objets et à leurs modes de traitement, aux stratégies de calcul spécifiques du domaine… C’est une intelligence propre qui prend ses racines dans l’épistémologie propre à chacun de ces domaines.

Le dernier exemple choisi en particulier visait à mettre en évidence certaines spécificités du calcul en analyse élémentaire. A l’appréhension ponctuelle et globale des objets fonctionnels qui marque le travail algébrique sur ces objets, l’entrée dans le champ de l’analyse superpose une appréhension locale et, comme le souligne le rapport de la CREM déjà cité, deux prises de conscience s’imposent :

- « comprendre que le calcul en analyse se différencie du calcul algébrique antérieur, par le jeu qu’il instaure entre ‘local’ et ‘global’ ;
- comprendre que c’est un calcul qui intègre de façon fondamentale la notion d’ordre de grandeur. » (p.241)

On calcule au voisinage de points, on simplifie les expressions à traiter en cherchant à identifier les ordres de grandeur, les parties principales associées et à les séparer de ce qui est négligeable par rapport à elles. Le calcul se trouve de ce fait porté par des raisonnements par condition suffisante qui remplacent les raisonnements par équivalence qui dominaient dans le calcul algébrique élémentaire, des raisonnements qui, on le sait, sont bien plus délicats, du fait des choix qu’ils supposent, du fait aussi que s’y imbriquent jeu sur les ordres de grandeur et jeu sur les voisinages. Mais les changements décrits ici au niveau du calcul ne sont que le reflet de différences épistémologiques profondes et du fait que le champ de l’analyse est par essence le champ de l’approximation.

B. Le développement de l’intelligence du calcul : quand ? Comment ?

Dans une conférence dont la seule ambition est de lancer la réflexion et le travail collectif d’une centaine de professionnels sur cette question complexe de l’apprentissage et l’enseignement du calcul, je ne prétends pas apporter des réponses précises et définitives à ces deux questions du quand et du comment. Nous les avons bien sûr longuement abordées dans le rapport sur le calcul auquel je renvoie le lecteur. Dans ce qui suit, je souhaiterais simplement souligner, comme je l’ai fait dans la partie précédente, en m’inspirant de ce rapport, un certain nombre de points qui me semblent pouvoir aider à organiser la réflexion.

1. Une attention permanente dès les premiers contacts avec le monde du calcul

Les besoins que j’ai mentionnés plus haut, en termes de répertoire et de flexibilité pourraient conduire à penser que, pour commencer à s’exercer, l’intelligence du calcul nécessite que soit préalablement construit un ensemble substantiel de moyens, en termes de répertoires et de techniques opératoires notamment, qui la rendent possible. Ce n’est absolument pas ce que j’ai voulu sous-entendre. Bien au contraire, je pense que, dès les premiers contacts avec le monde du calcul, doit se développer un rapport au calcul qui respecte la diversité de ses facettes et conjugue donc construction de répertoires et de techniques, automatisation et développement de l’intelligence du calcul. Comme je le soulignais au départ, l’intelligence du calcul est une notion toute relative et, pour un élève qui commence à apprendre la multiplication, retrouver le résultat d’un produit comme 7x8, en utilisant le fait que c’est 7x7+7, et la connaissance mémorisée de la valeur de 7x7, repérer qu’il est facile de mémoriser la table de 9 en passant par celle de 10, relève de l’intelligence du calcul. On pourrait même affirmer que, moins on dispose de moyens, de routines de calcul, plus le calcul est nécessairement intelligent. Ces formes d’intelligence serviront un temps à construire le rapport au nombre et au calcul puis, pour certaines d’entre elles, elles devront être dépassées, voire abandonnées et remplacées par des automatismes, des mémorisations pour que l'intelligence puisse se mettre au service de nouveaux objets, de nouveaux problèmes.

Les programmes de mathématiques, dès l'école élémentaire, aujourd'hui comme hier, permettent de développer cette intelligence, notamment :

- à travers les activités de calcul mental et réfléchi qui mettent directement en jeu les propriétés des nombres et des opérations,
- à travers les activités d'estimation liées à l'anticipation des résultats ou le contrôle des calculs instrumentés par les calculatrices, le jeu entre calcul exact et approché,
- à travers la mise en place des algorithmes de calcul, leur raffinement progressif, leur extension lorsque s'étend le champ des nombres,
- à travers la planification des calculs qui accompagne nécessairement la résolution de problèmes un peu complexes.

2. Une sensibilité permanente aux besoins de l'intelligence du calcul

Ceci suppose une attention permanente à la construction de répertoires, à leur consolidation et à leur enrichissement progressif, au-delà de leurs éléments les plus basiques, le dépassement progressif de techniques artisanales de calcul au profit de techniques plus économiques et efficaces, et enfin une routinisation suffisante de certaines d'entre elles.

Ceci suppose aussi le développement de la flexibilité sur laquelle repose tout calcul intelligent. Elle nécessite, pour pouvoir s'exercer, que tout ne soit pas figé, normé dans les pratiques de calcul, que l'association tâche-technique ne soit pas trop rigide, que les tâches de calcul ne soient pas atomisées en une succession de sous-tâches, que l'éventail des formes, des registres, des points de vue rencontrés par l'élève soit suffisamment riche. Or c'est une pente naturelle de l'enseignement, sous couvert d'efficacité à court terme, sous couvert de garantir la réussite de tous ou presque, de rigidifier et d'atomiser. Mais on sait bien, en sens inverse, qu'il ne suffit pas de mettre l'élève face à des tâches ouvertes, riches de potentialités diverses, pour que cette flexibilité puisse s'exercer. Il faut encore qu'elle lui soit accessible, qu'il puisse en prendre la responsabilité et l'assumer. Ceci suppose un capital d'expérience que les réflexions méthodologiques, pour si utiles qu'elles soient *a posteriori*, ne peuvent court-circuiter. Ce capital d'expérience, pour se constituer, nécessite du temps, un temps qui est sans doute ce dont on sent le plus le manque dans l'enseignement des mathématiques aujourd'hui. Cela rend d'autant plus nécessaire de mettre autant d'énergie et d'intelligence à penser la progression des compétences calculatoires, à penser la progression de la responsabilité mathématique de l'élève dans les calculs et l'effacement progressif de la médiation enseignante, qu'on en déploie pour penser l'introduction de notions nouvelles et inventer les problèmes, les questions, qui vont motiver, accompagner cette introduction.

Ceci suppose aussi que l'on soit attentif aux reconstructions nécessitées par l'entrée dans de nouveaux types de calculs : du calcul arithmétique au calcul algébrique, du calcul algébrique au calcul analytique, du déterministe vers l'aléatoire… L'enseignement a beaucoup trop tendance à sous-estimer ces reconstructions, particulièrement délicates pour l'élève quand beaucoup d'objets sont communs, quand les mêmes registres sémiotiques sont concernés, comme c'est le cas par exemple entre algèbre et analyse élémentaires. Il tend à laisser l'essentiel de ces reconstructions à la charge des élèves, générant ainsi des malentendus et incompréhensions durables.

3. Une prise en compte claire et cohérente des outils de calcul

Dans ce texte, je ne ferai que mentionner cette question des outils de calcul puisque c'était le thème d'une autre des conférences de l'université d'été, celle de Luc Trouche. Je voudrais cependant insister sur le fait que penser l'intelligence du calcul ne peut se faire sans prendre en compte les outils de ce calcul. Le calcul a, de tous temps, été instrumenté par des technologies diverses. Il l'est aujourd'hui, essentiellement, par des technologies informatiques. Elles sont omniprésentes dans la société ; elles sont présentes à l'école dès les premières années de la scolarité. Elles façonnent notre rapport au calcul et aux objets du calcul. Pourtant il faut reconnaître qu'alors que les calculatrices sont des outils scolaires officiels depuis une trentaine d'années, l'enseignement des mathématiques rencontre toujours des difficultés à trouver un équilibre satisfaisant entre calcul papier-crayon et calcul instrumenté par les calculatrices. Il rencontre toujours beaucoup de difficultés à mettre le calcul instrumenté au service du développement de l'intelligence du calcul. Pourtant ceci est possible, comme j'ai essayé de le montrer au fil de ce texte, en utilisant des ressources technologiques diverses. Mais ceci suppose que l'on organise réellement une progression dans l'accès aux outils au fil de la scolarité, que l'on prenne en compte le fait que ces outils ne deviennent pas des instruments mathématiques pour l'élève sans une prise en charge didactique des genèses instrumentales, ni sans une prise en charge institutionnelle des besoins mathématiques spécifiques de ces genèses instrumentales, comme l'ont bien montré les recherches didactiques menées sur les calculatrices symboliques (Guin et Trouche, 2001) ou plus récemment sur le tableur (Haspekian, 2005).

IV. Conclusion

Dans ce texte, je me suis intéressée à l'intelligence du calcul, arguant du fait que le calcul, dans la culture comme dans l'enseignement, souffre en mathématiques d'un discrédit totalement injustifié. Il ne constitue pas, selon la vision commune, la part noble des mathématiques mais plutôt une intendance qui soit suivre… mais malheureusement, souvent, ne suit pas, entraînant les lamentations des enseignants, du collège à l'université pour le moins. Dénué d'intelligence, le calcul est aussi souvent perçu comme quelque chose qui peut et doit s'apprendre mécaniquement : mémorisation, répétition, devenant les mots emblématiques de cet apprentissage. J'espère que le lecteur, à la lecture de ces quelques pages, se convaincra, s'il ne l'est déjà, de la richesse, de la beauté de ce monde du calcul, des trésors d'intelligence que les pratiques de calcul recèlent, et qu'enseignant ou formateur d'enseignants, il comprendra que faire aimer les mathématiques, c'est aussi faire aimer ce calcul sans lequel elles n'existeraient pas, sans lequel elles seraient impuissantes. Pour cela un équilibre doit être trouvé dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul entre automatisation et raison, ses deux facettes indissociables. Ce n'est sans doute pas facile, nécessite de l'attention et de l'intelligence, nécessite de contrer une pente naturelle qui tend plutôt à faire glisser le calcul du côté des automatismes sans âme, mais c'est un défi que l'enseignement doit relever, de la maternelle à l'université.

Ouvrages cités

ARTIGUE M. L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères – IREM*, n°54. p. 23-39., 2004.

BARDINI C., *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2003.

BATTIE V., *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique,* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2003.

DOUADY R., Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 7/2, p. 5-32, 1986.

DUVAL R., *Semiosis et Noesis*, Berne, Peter Lang , 1995.

GUIN D. & TROUCHE L. (eds), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique,* Grenoble, La Pensée Sauvage, 2001.

HASPEKIAN M., *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques – Etude du cas des tableurs,* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2005.

ISRAEL G., *La mathématisation du réel*, Paris, Editions du Seuil, 1996.

KAHANE J.P. (ed.), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Paris, Odile Jacob, 2002.
PERRIN-GLORIAN M.J. & ROBERT A. (eds), *Jeux de Cadres. Actes du Colloque en l'honneur de Régine Douady*, Paris, IREM Paris 7, 2001.
SERFATI M., *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique*, Paris, Editions Petra, 2005.