NOMBRES ET CALCULS AU COLLEGE : INSTITUER UNE COHERENCE

Dominique BENARD
Irem du Mans

Des entiers au calcul littéral, en passant par les décimaux, les écritures fractionnaires, la « touche $\sqrt{}$ » de la calculatrice, le vocable « nombre » englobe une grande diversité d'écritures, de paroles, de gestes, d'algorithmes, de représentations.

Cette diversité, renforcée par la variété des travaux et situations où intervient le numérique, est tout à la fois constitutive d'une activité mathématique foisonnante et source de difficultés spécifiques pour l'apprentissage : l'apparition de divers genres de nombres et de calculs au long d'un cursus scolaire qui se préoccupe peu d'instaurer une cohérence conceptuelle vient appuyer une image déjà éclatée des mathématiques et un rapport éparpillé à sa maîtrise ; d'autant que, automatisme des calculs aidant, s'installe une impression d'insignifiance qui légitime qu'une conception étroitement légaliste (« Est-ce que j'ai le droit de …. ? ») prenne le pas sur une démarche constructrice et transformatrice du sens des activités numériques.

Derrière le vocable « nombre » et au delà des activités numériques, quels concepts, quelles représentations chez nos élèves ? Mais aussi chez les futurs enseignants, puisque l'approche constructive des ensembles de nombres a presque disparu de tous les niveaux d'enseignement, formation des maîtres comprise ?

Il semble donc important de suggérer, sinon d'élaborer, des activités, de dégager des problématiques susceptibles de mieux faire appréhender par nos élèves (et par nous aussi leurs professeurs) la notion de nombre, son universalité construite, expression d'une diversité toujours présente dans la pratique des travaux numériques. Ce faisant, il est impératif de respecter le fait que les nombres apparaissent au cours de la scolarité en dehors de toute dynamique constructive. Il s'agit donc de viser à instituer une cohérence qui ne repose pas sur la reconstruction formelle (des structures), mais qui passe par un retour sur les significations et leurs transformations des divers usages du nombre en lien avec des problématiques abordables au niveau du collège.

Les lignes qui suivent tentent les premiers pas dans cette direction.

Forme, nombre et calcul

Le nombre sert à compter. [1]

En ce sens premier, qui est celui de la comptine mais aussi des travaux de l'Ecole Elémentaire, il n'y a de nombre qu'entier. Et les premières opérations que l'on réalise peuvent toutes se penser comme courts-circuits de comptages.

Si j'ai compté, d'un côté 25 billes et de l'autre 13, l'addition $25 + 13 = 38$ se substitue au geste de rassemblement des deux collections et au comptage de l'ensemble ; la soustraction $25 – 13 = 12$ se substitue au prélèvement par comptage de 13 billes dans la collection de 25 et au comptage des billes restantes. Par ailleurs, la multiplication s'apprend comme court-circuit d'additions, la division avec reste comme court-circuit de soustractions, chacune de ces deux opérations se fonde encore sur le geste devenu inutile du comptage.

Mesurer, c'est encore compter.

Il s'agit bien d'abord de compter combien de fois une grandeur prise comme unité est contenue dans la grandeur à mesurer. Là encore, on ne manipule d'abord que des nombres entiers, en écriture décimale, auxquels on adjoint ensuite un nouveau signe, la virgule décimale qui indique la place des unités et l'endroit où l'on en change, par tranches de dix, lorsque le premier geste de mesure « ne tombe pas juste ». Quoiqu'il en soit, toute mesure effective renvoie à un comptage ; que l'on dise par exemple que cette porte mesure 1,53 mètres de large, on signifie alors le comptage possible de 153 centimètres.

Ainsi l'écriture décimale de nombres à virgule ne renvoie pas ici et tout d'abord à la création de nombres nouveaux, mais bien plutôt à une manipulation nouvelle des nombres entiers en écriture décimale, avec indication de la place de l'unité première de mesure. Ce n'est qu'ensuite, lorsque sont abordées les techniques opératoires sur les nombres à virgules que ces derniers acquièrent par ce biais le statut de nombres nouveaux c'est à dire ici non entiers. Mais le comptage reste le geste originaire qui en fonde l'écriture et la manipulation opératoire. Au reste les techniques opératoires sur les nombres décimaux ne diffèrent de celles utilisées pour les nombres entiers que par la prise en compte de décalages induits par la virgule décimale.

Le comptage fonde encore l'écriture fractionnaire.

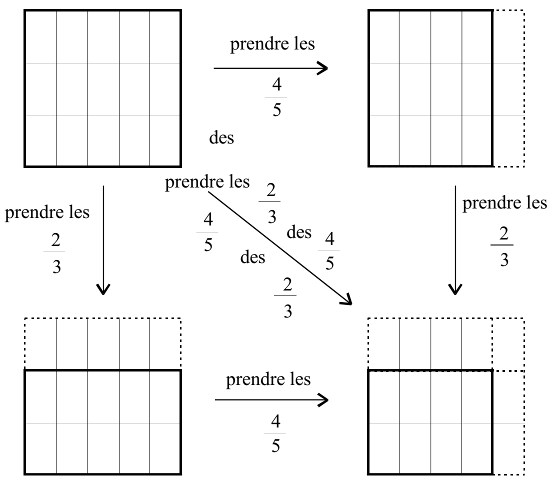
La contenance de ce vase est de 4/3 de litres. Qu'est-ce à dire, sinon que pour le remplir, il faudra utiliser quatre fois ce bol dont trois seulement rempliront la bouteille appelée « litre » ? Mesure par comptage encore, qui,

1 mais aussi à comparer et ordonner ; on trouvera dans [1] d'intéressantes considérations sur ces deux aspects, cardinal et ordinal, du nombre entier.

par rapport au nombre décimal, élargit les possibilités de changement d'unité.

Ici encore, il s'agit d'abord d'une manipulation nouvelle du comptage et donc des nombres entiers. Et là aussi, ce n'est qu'à l'instant où des techniques opératoires sont élaborées pour cette écriture nouvelle qu'elle acquiert le statut de nombre non nécessairement entier, ou même non nécessairement décimal, quoiqu'elle recouvre tous les nombres exprimés par les écritures précédentes. Peut se poser alors l'intéressante question de discriminer si un nombre exprimé dans cette écriture nouvelle est lui-même bien nouveau en tant que nombre.

Le comptage peut encore servir pour élaborer les techniques opératoires requises par cette forme nouvelle. Ainsi lorsque je veux additionner $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, il faut, et cela est intéressant, rétablir la possibilité de rassembler deux collections d'objets « identiques », ce qui veut dire ici revenir à la situation où l'unité première a subi le même partage pour les deux fractions. Bien sûr continuer à penser la multiplication comme une addition répétée devient délicat. Mais, si l'on a établi que le produit des nombres entiers p et q permettait de compter le nombre de carrés unité compris dans le rectangle dont les deux côtés comprennent respectivement p et q segments unité, cette signification basique peut être réactivée pour comprendre que dans le rectangle dont les côtés sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ du segment unité, on peut compter $2 \times 4 = 8$ rectangles dont les côtés sont respectivement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ du segment unité, alors qu'il en faut $3 \times 5 = 15$ pour paver le carré unité. La recherche d'une unité commune, d'une mesure commune est au cœur des opérations sur les écritures fractionnaires. La même situation éclaire par ailleurs un aspect qui rôde de manière implicite dans ces premières considérations, l'aspect « opérateur » du nombre qui condense des gestes de découpe, de décalque, de comptage. Car ce même rectangle peut s'obtenir de deux manières différentes à partir du carré unité : soit en en prenant les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$, soit en en prenant les $\frac{4}{5}$ des $\frac{2}{3}$, les deux voies se ramenant à en prendre les $\frac{8}{15}$ comme l'illustre la figure ci-dessous :



Rien n'est évidemment parfait et l'expression « prendre les $\frac{5}{4}$ de … » est troublante, comme ces multiplications dont le produit est plus petit que le multiplicande. Mais ce trouble est constitutif de la construction progressive du sens « numérique » du nombre, qui permettra sans confusion de continuer à utiliser ce verbe « prendre » même dans de telles situations où cela semble impropre : « prendre les $\frac{5}{4}$ de … » c'est quintupler le quart ou prendre le quart du quintuple.[2]

Faisons le point.

La diversification des procédés de comptage (comptine énumérant des individus ou des regroupements d'individus) et des procédés de mesure (changements d'unité) fonde l'apparition d'écritures nouvelles : écriture décimale entière, puis avec virgule décimale, écriture fractionnaire.

Passer de cette séquence de formes nouvelles à la distinction de trois types de nombres, entier, décimal, rationnel, est une décision opératoire d'existence dont l'examen des conséquences fonde le sens même de ces distinctions et des techniques opératoires nouvelles qui s'y rapportent.

Si en effet chacune de ces trois formes identifie une catégorie numérique, il importe de se demander d'abord si ces formes nouvelles produisent des nombres nouveaux ; et dans quelle mesure un même nombre est susceptible de l'une ou l'autre des trois écritures. Ici s'inscrivent les questions et les raisonnements concernant l'inclusion des trois catégories l'une dans la suivante, de l'entier au rationnel, ainsi que la discrimination des décimaux non entiers, des rationnels non décimaux, etc.

Par ailleurs, les techniques opératoires sur les formes nouvelles découlent des gestes premiers qui les fondent (compter et mesurer) et de la nécessité qu'elles prolongent les anciennes. Comment continuer à additionner, soustraire, multiplier, diviser, quand vient s'adjoindre une forme nouvelle (virgule décimale ou écriture fractionnaire) ?

En ce sens, il n'est de calcul que formel, c'est-à-dire sur des formes. Et c'est seulement au travers de cette élaboration opératoire qu'on peut attribuer à la forme nouvelle la vertu de faire émerger du numérique nouveau. Et bien qu'on puisse repérer ici, sous-jacent, l'emboîtement constructif des structures, il reste précisément sous-jacent, ne s'explicite jamais. Et ce sont alors trois gestes caractéristiques du numérique (compter, mesurer, calculer) qui permettent d'en instituer jusqu'ici une cohérence enveloppant la diversité de ses manifestations formelles.

Cette dernière remarque importe d'autant que les deux premiers gestes, compter et mesurer, vont se trouver mis à mal par l'irruption d'une autre forme, la racine carrée.

Le manque du nombre

A parler trop vite de nombres irrationnels, et à ne plus parler de grandeurs incommensurables, nous perdons sans doute un point d'appui essentiel pour l'introduction de ces formes numériques nouvelles.

Sur ce sujet, le texte du programme de Quatrième se présente ainsi qu'il est rappelé dans l'encadré de la page suivante.

Pour penser un enseignement, qui se préoccupe d'instituer une cohérence conceptuelle des diverses écritures numériques, peut-être convient-il d'envisager les commentaires

2 Sur les gestes et les paroles que condense l'écriture fractionnaire, je recommande [2] et [3]

contenu	compétences exigibles	commentaires
Touche $\sqrt{}$ de la calculatrice	Trouver à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.	Le théorème de Pythagore fournit l'occasion de calculer des racines carrées de nombres positifs dans des cas qui relèvent d'une situation où le nombre calculé a une signification que l'élève peut identifier. On peut aussi rattacher le calcul d'une racine carrée à des problèmes où interviennent l'aire d'un carré et la mesure de son côté.

comme les véritables contenus mathématiques et le contenu comme commentaire.

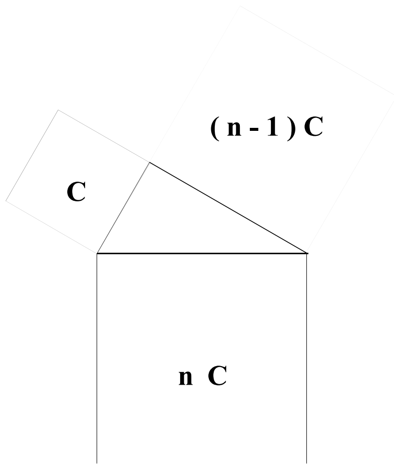
Précisons : le théorème de Pythagore (mais pas seulement lui) fournit des situations géométriques où le nombre vient à manquer. De la décision qu'il doit tout de même y avoir du nombre découle une forme nouvelle, « $\sqrt{}$ », et aussi la nécessité d'intégrer cette forme nouvelle aux anciennes, de continuer à calculer. L'intervention de la touche de la calculatrice devient alors un mode par lequel nous tentons de comparer ces nouvelles formes aux nombres décimaux.

Développons en filant un exemple.

Soit à déterminer un carré dont l'aire soit n fois (n entier) l'aire d'un carré donné.

Le théorème de Pythagore est l'outil (opératoire) qui permet de résoudre récursivement cette question.

Attention ! Bien que cela puisse évidemment y faire penser, il ne s'agit pas de « l'escargot de Pythagore », souvent rencontré dans les manuels de collège. Ce dernier propose une construction géométrique récursive des racines carrées des entiers, comme longueurs des rayons de la coquille qu'il déploie.



Ici, tout d'abord, il s'agit uniquement des aires des carrés et le théorème de Pythagore est l'outil de la résolution complète du problème posé. C'est ensuite seulement que je propose de poser la question : « Par quel nombre le côté du carré a-t-il été multiplié ?» ou mieux encore : « Y a-t-il un nombre qui, multipliant le côté du carré, produise le même résultat ? ». Il y a donc renversement du point de vue de « l'escargot ». Alors que ce dernier fournit une illustration ou une représentation géométrique de racines carrées déjà là, déjà conçues comme nombres (par exemple via la calculatrice), ayant ici la solution géométrique d'un problème nous partons en quête de sa solution numérique et donc des nombres qui la réaliseront.

Le collégien n'est pas tout à fait démuni pour cette recherche, du moins s'il a déjà traversé les deux expériences suivantes :

Exp 1 De deux carrés, l'aire la plus grande revient à celui qui a le plus grand côté.

Exp 2 Si l'on multiplie par l'entier p le côté d'un rectangle (ce qui s'opère géométriquement), et qu'on multiplie par l'entier q l'autre côté, l'aire du rectangle sera multipliée par l'entier p.q, produit *arithmétique* de p par q ; car, réalisant la chose, le nouveau rectangle est pavé de q lignes (ou q colonnes) comportant chacune p copies du rectangle d'origine, d'où le résultat conforme aux significations premières des nombres, des opérations, des mesures, propres à l'Ecole Elémentaire.

Multipliant ainsi le côté du carré par l'entier n, son aire sera multipliée par l'entier $n.n = n^2$, d'où le tableau suivant :

Multiplicateur du côté :

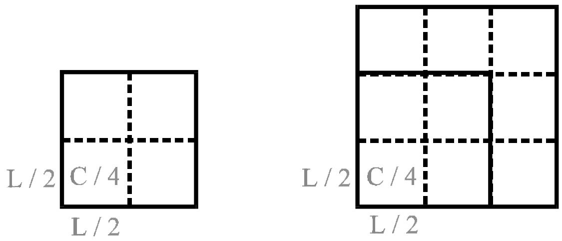
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…

Multiplicateur de l'aire :

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	…

Cela saute aux yeux : les multiplicateurs entiers du côté du carré sont insuffisants. Il importe alors de ne pas brusquer les choses, retarder encore le moment du doigt sur le fameux bouton, prolonger cette expérience première du manque, et entamer une recherche avec les autres nombres déjà connus.

La deuxième expérience (Exp 2) précédemment évoquée s'étend aux nombres rationnels, de sorte que multipliant le côté du carré par $\frac{p}{q}$, l'aire en est multipliée par $\frac{p^2}{q^2}$:



[Il faut 4 petits carrés pour paver le carré d'origine, il en faut 9 pour paver le carré obtenu en multipliant le côté par $\frac{3}{2}$]

La recherche, pour doubler par exemple ou tripler l'aire du carré, peut et même doit s'éloigner du sol géométrique, plonger dans le numérique, la question devenant par exemple : « existe-t-il un nombre rationnel, voire décimal, dont le carré *arithmétique* vaille 3 ? ». S'inaugure un travail par encadrement (Exp 1), pouvant bien avoir recours à la calculatrice (pour calculer des carrés) : ce nombre doit être compris entre 1 et 2, on constate que le milieu 1.5 est trop petit, de même que 1.7, par contre 1.8 est trop grand, etc. , etc.

Il faut savoir bien sûr quand et comment interrompre cette recherche, quand et comment annoncer qu'elle ne peut aboutir. Mais que cette annonce s'accompagne ou non d'une démonstration qu'aucun nombre décimal (en quatrième) ni même rationnel (en troisième) n'a 3 pour carré, ce résultat n'a pas pour l'instant la signification qu'on lui attribue ensuite d'irrationalité du nombre $\sqrt{3}$, il est bien plutôt la confirmation d'un manque et cela constitue une expérience mathématique importante : à s'en tenir donc aux nombres entiers, décimaux ou rationnels, la solution, géométriquement complète de notre problème comporte bien des lacunes numériques.

Le numérique est en retard sur le géométrique, le nombre sur la figure, le calcul sur la construction raisonnée.

La décision opératoire

Décidons de combler ce retard, c'est-à-dire que, pour chaque entier p, il existe un *nombre* tel qu'en multipliant par ce nombre le côté d'un carré, son aire s'en trouve multipliée par l'entier p. Baptisons le « racine carrée de l'entier p » et donnons lui la forme « $\sqrt{p}$ »[3]. Force est maintenant d'examiner les conséquences de ce geste mathématique majeur.

Puisque nous entendons considérer $\sqrt{p}$ comme un nombre, il nous faut comparer, calculer avec cette forme nouvelle et en même temps avec les anciennes. Pour ce faire, nous disposons du problème d'origine qui nous a mis en face du manque, et de la définition conséquente à la décision de le combler ; ensuite nous sommes guidés par la nécessité de continuer à calculer comme avant sur les formes anciennes, autrement dit nous voulons que les techniques nouvelles prolongent les anciennes y compris dans leur rapport au problème géométrique initial.

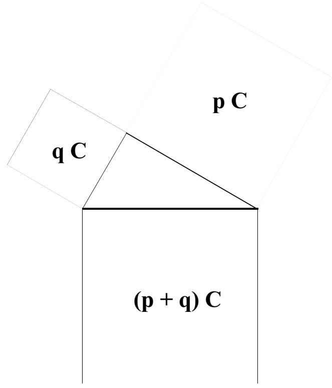
On en tire, par exemple, que le *carré arithmétique* de $\sqrt{p}$ doit être égal à l'entier p ($\sqrt{p} \times \sqrt{p} = p$) ; cette propriété prolonge en fait l'expérience évoquée selon laquelle, multipliant le côté du carré par le nombre rationnel a, son aire sera multipliée par a^2 . Mais aussi que $\sqrt{p^2} = p$.

Un exemple encore : nous pouvons faire l'expérience (par comptage d'ailleurs) que, multipliant le côté du carré par le nombre rationnel a, puis le côté du nouveau carré ainsi obtenu par le nombre rationnel b, au total l'aire aura été multipliée par $a^2.b^2$; mais le côté aura ainsi été multiplié par le nombre rationnel $a.b$ et donc l'aire aura été multipliée par $(a.b)^2$, de sorte que, nécessairement, $(a.b)^2 = a^2.b^2$ — ce qui est important ici n'est pas tant le résultat numérique que sa mise en rapport avec la question géométrique — ; si donc je multiplie le côté du carré par $\sqrt{p}$, puis par $\sqrt{q}$, l'aire aura été multipliée par p.q, de sorte que le côté aura été multiplié par $\sqrt{p.q}$, d'où suit nécessairement que $\sqrt{p} . \sqrt{q} = \sqrt{p.q}$.

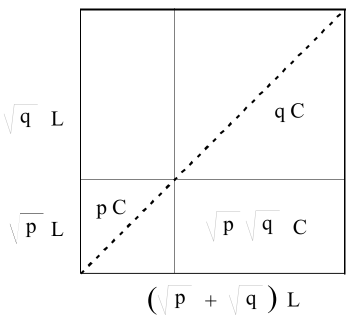
La question de $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ peut se régler sur le terrain du problème originaire, grâce à l'inégalité triangulaire (cf. premier encadré de la page suivante).

Mais on peut y adjoindre une démonstration qui, tout en s'appuyant sur du géométrique, n'en opère pas moins un déplacement vers du pur numérique (cf. deuxième encadré de la page suivante)…

3 La décision, sur l'existence du nombre et sur son écriture, le signe, se donne ici en deux phrases. Cela semble facile. Historiquement ce ne fut pas le cas. On pourra à ce sujet consulter [4], notamment sur le lien étroit entre la possibilité d'accepter les irrationnels comme nombres et l'invention de signes, de symboles, d'écritures.



$$\sqrt{p} + \sqrt{q} > \sqrt{p+q}$$



$$(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 = (\sqrt{p})^2 + (\sqrt{q})^2 + 2.\sqrt{p}\,.\sqrt{q}$$

$$= p + q + 2.\sqrt{p.q}$$

On peut ensuite confirmer ce déplacement en s'interrogeant sur la forme $\sqrt{\dfrac{p}{q}}$ et en répondant sur le terrain numérique encore contrôlé par la problématique première. En effet, multipliant le côté du carré par $\sqrt{\dfrac{p}{q}}$, puis par $\sqrt{q}$, l'aire aura été multipliée par $\dfrac{p}{q}.q = p$, le côté aura donc été multiplié par $\sqrt{p}$, d'où l'identité $\sqrt{\dfrac{p}{q}}.\sqrt{q} = \sqrt{p}$, de sorte que $\sqrt{\dfrac{p}{q}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$.

Aller plus loin encore en envisageant la forme $\sqrt{\sqrt{p}}$ par une définition purement numérique, comme le nombre dont le carré arithmétique vaut $\sqrt{p}$.

Il y ainsi renversement entre le géométrique et le numérique. Celui-ci avance maintenant d'un pas plus rapide que celui-là. Quelle est donc le correspondant géométrique de cette forme numérique ? Comment multiplier géométriquement l'aire d'un carré par $\sqrt{p}$? Question intéressante dont la résolution renvoie à des procédures de quadrature du rectangle (construire un carré équivalent en aire à un rectangle donné) , procédures abordables en collège, très liées au théorème de Pythagore [4]. Toutefois le renversement que j'évoque est pédagogiquement utile en ce qu'il annonce et prépare le moment nécessaire où la technique numérique va s'éloigner du terrain géométrique et fonctionner pour elle-même avec ses propres règles.

La (re)construction du sens

A nouveau faisons le point.

Quelque chose de tout à fait différent s'est glissé entre le doigt de l'élève et la touche « $\sqrt{\ }$ » de la calculatrice. Ce n'est pas seulement une forme nouvelle, c'est le sens même des opérations qui se trouve déplacé. Et sans doute est-il possible d'amener nos élèves à la conscience de ce déplacement : dire d'un rectangle, dont les côtés mesurent respectivement 2 cm et 3 cm, que la mesure de son aire est 6 cm^2 a le sens d'un comptage de 6 carrés de 1cm de côté dans la surface du rectangle ; ce sens est irrémédiablement perdu pour un rectangle dont les côtés mesurent $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ cm et dont l'on dit encore que l'aire mesure $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ cm^2. Les éventuelles démonstrations d'irrationalité, si elles sont rapportées à cette question de la mesure, marquent alors cette transformation du sens.

A partir de là, le comptage n'est plus l'expérience sur laquelle peut se fonder le concept de nombre, ni la signification opératoire. $\sqrt{2}$ ne compte rien, et, si elle mesure la diagonale du carré par rapport à son côté, c'est que mesurer ne se réduit plus à compter. Le produit $\sqrt{3} . \sqrt{5}$ n'est plus le court circuit d'une addition répétée, on ne peut plus le dire « racine de 3 fois racine de 5 ».

Et si l'on veut maintenir qu'il y a encore du comptage, c'est que ce comptage doit aller à l'infini. Certaines expérimentations sont possibles qui font éprouver une telle nécessité. La considération des développements décimaux, par exemple : ainsi, déterminer pas à pas (par encadrements) le développement décimal de $\sqrt{3}$, ce n'est pas seulement répondre à la question « combien ça fait ? », c'est aussi placer cette forme numérique nouvelle parmi les anciennes, son irrationalité nous assurant alors que cette procédure ne peut qu'aller à l'infini, de sorte que la réponse à la fameuse question sera définitivement partielle. Des travaux sur la périodicité du développement décimal d'un nombre rationnel permettent de signaler une autre marque de l'irrationalité : alors qu'il est possible de déterminer la mille deux cent trente deuxième décimale de $\frac{37}{7}$ sans avoir à expliciter la totalité des décimales qui la précèdent, pour $\sqrt{3}$ en revanche cette détermination requiert l'explicitation préalable des 1231 décimales précédentes. On peut également renforcer ce lien du rationnel et de la périodicité par des manipulations du style : $A = 2{,}1343434....$,
$10A = 21{,}343434....$, $B = 10A - 21 = 0{,}343434...$,
$100B = 34{,}343434.... = 34 + B$,

d'où $B = \frac{34}{99}$ et $A = \frac{2113}{990}$.

4 Pour de telles constructions, voir notamment [5], [6], [7] et [8]

Dans un autre registre, le problème de l'encadré ci-dessous est susceptible de faire éprouver que la distinction rationnel/irrationnel est pertinente pour la compréhension de phénomènes « concrets » voire « naturels ».

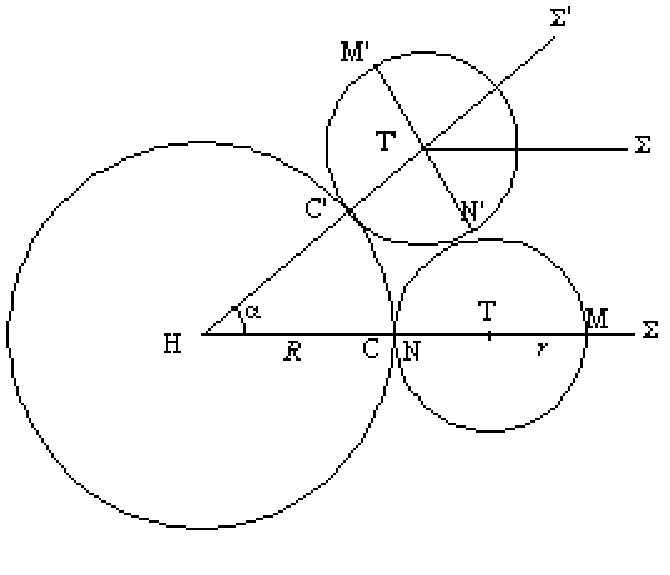
Le problème est ici posé de façon très générale. Il est évidemment recommandable d'expérimenter sur des cas particuliers : pièces identiques (R = r), pièces doubles (R = 2r ou r = 2R) etc., faisant émerger progressivement le rapport des deux rayons.

Notons au passage que la résolution de ce type de problème nécessite que l'on précise à un moment le sens de l'expression « faire un tour autour de … », autrement dit que l'on se donne des « repères ». Intéressante nécessité donc qui engage l'élève et son professeur avec lui dans un travail réel de modélisation.

Le négatif, l'imaginaire

Dans tout ce qui précède il n'a pas été question des nombres relatifs. Eux aussi arrivent un jour dans le paysage numérique du Collège et posent à l'enseignement des problèmes particuliers. L'histoire témoigne d'ailleurs de la spécificité des difficultés qui font obstacle à une pensée immédiatement sereine et une manipulation directement évidente des « moindres que rien »[5]. Sort qu'ils partageront avec les « imaginaires », apparus au XVIème siècle, devenus depuis « nombres complexes ».

Si dans la décision précédemment évoquée qu'il y a des nombres tels que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, le numérique se désarrime de l'activité de comptage, il reste toutefois fortement lié à la grandeur, à la quantité. Avec l'irruption du négatif, c'est ce dernier lien qui semble rompu : comment penser des grandeurs négatives,



La pièce de centre T roule sans glisser sur la circonférence de la pièce de centre H. Quand elle aura fait un tour complet autour de la pièce de centre H, combien de tours autour du centre T aura effectué un point quelconque de sa circonférence comme M ou N ?

Si au départ les points H, C, N, M sont alignés comme indiqués sur la figure dans la direction S, au bout de combien de tours retrouvera-t-on la même situation ?

5 Sur cette histoire, et sur ses liens avec des problématiques d'enseignement on pourra consulter [9], [10], [11] , [12]

alors que le zéro marque l'absence, la disparition de la grandeur ? Ce qui se retrouve au niveau de l'enseignement, puisque le premier modèle qu'on en donne, celui de la droite graduée (températures, ascenseur, etc.), propose le nombre entier relatif non plus comme se rapportant à une quantité mais à une position. Ordonner des positions, cela s'entend, mais les additionner ? les soustraire ? On déplace alors la signification du nombre de la position à sa variation. De sorte que lorsque j'écris « 3 + (– 2) = 1 », le nombre 3 désigne une position, le nombre – 2 ce dont elle varie, et le nombre 1 la position finale. Je peux écrire aussi « (– 2) + 3 = 1 » et les rôles des nombres 3 et – 2 se trouvent échangés. A ce stade, l'addition se présente comme opération « externe », l'aspect opérateur du nombre, toujours présent en fait mais souvent de manière implicite, est ici nécessairement explicite. Alors que l' écriture « 3 + 2 » peut se dire « la quantité 3 augmente de 2 » ou aussi bien « à la quantité 3 j'ajoute la quantité 2 », l'écriture « 3 + (– 2) » ne peut dans un premier temps que se dire « la quantité 3 a diminué de 2 ». Pour que, dans un second temps, on puisse y entendre « à la quantité 3, j'ajoute la quantité (– 2) », il faut avoir reconstruit la signification même du terme « quantité ».

L'épissure qui arrime le nombre irrationnel au comptage, c'est le calcul sur les séries numériques, donc avec l'infini. Celle qui arrime le nombre relatif à la grandeur entrelace quantité et direction (spatiale) dans un concept de « grandeur vectorielle », qui permet également de penser les nombres complexes comme grandeurs. [6]

Mais quoiqu'il en soit des situations dans lesquelles apparaissent les nombres relatifs (repérage, équations, …), leur statut numérique plein se constitue encore, comme pour la racine carrée, d'une décision qu'il s'agit bien de nombres et de l'examen des conséquences opératoires d'une telle décision. Nous décidons qu'il y a un nombre « – 2 » qui s'oppose au nombre « 2 », comme, par exemple, « reculer de 2 pas » s'oppose à « avancer de deux pas » [7].

Et la pratique opératoire, multiplication comprise, découle encore de la nécessité que cette forme nouvelle s'intègre du mieux possible aux formes numériques qui la précèdent. Même si certaines situations peuvent aider et aident effectivement à l'élaboration et à la compréhension des règles opératoires, le sens profond du numérique réside dans l'opératoire, qui est toujours manipulation de formes.

Disant cela, je n'entends pas révoquer en doute les activités et modèles concrets utilisés à ce propos dans nos classes. Toutes ces expériences sensibles sont nécessaires, pédagogiquement comme terrains « concrets » d'apparition de formes numériques nouvelles, scientifiquement pour dire le lien possible de ces formes avec un sensible qui les dépasse mais dont elles deviennent un outil de compréhension. Mais le nombre relatif, et avec lui l'écriture fractionnaire et la racine carrée, n'acquièrent leur plein sens numérique que dans la mesure où se constitue pour ces diverses formes une pratique opératoire qui dépasse et s'éloigne de tous les terrains d'épreuve où elles sont apparues nécessaires.

6 On pourra lire à ce sujet dans [12] pp.217-225, les extraits de l'Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, écrit en 1806, où Argand élabore l'idée de « lignes dirigées »

7 Lire également dans [12] pp.226- 228,les extraits de l'Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeurs négatives, écrit en 1763, où Emmanuel Kant distingue l'opposition logique par la contradiction de l'opposition réelle sans contradiction.

Conclusion

Il faudrait développer encore cette question du nombre relatif, parler ensuite du calcul littéral …

Les lignes qui précèdent ne sauraient évidemment prétendre à dresser un panorama complet des problèmes posés par le numérique au Collège. Le geste essentiel sur lequel j'attire ici l'attention est la décision qu'il y a du nombre encore, là où il semble manquer ; décision dont on doit tirer les conséquences tant sur le plan opératoire des manipulations formelles que sur celui des significations et de leurs déplacements ou transformations. Il s'agit aussi de suggérer des pratiques pour faire le point.

Un seul terme « le nombre » ; une multitude de pratiques et de règles, des expériences sensibles, parlantes ici, muettes ailleurs. Où en sommes-nous, nous les professeurs ? Qu'en est-il à ce sujet de la formation des maîtres ? Où en sont nos élèves ? Pouvons nous nous imaginer faire de temps en temps une pause, pour regarder avec eux les chemins parcourus, les expériences traversées, les pratiques apprises concernant *le* nombre ? Envisager de faire une place dans nos enseignements, au Collège mais aussi au Lycée et dans la formation des maîtres, pour des moments et des activités de reprise et de synthèse, propres à faire mieux appréhender ce qu'est *le* nombre dans ses diverses pratiques opératoires et les multiples situations où il opère ?

Bibliographie

[1] Dantzig, Tobias *Le Nombre Langage de la Science*, Librairie Albert Blanchard, Paris 1974

[2] Rouche, Nicolas, *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier, Bruxelles 1992

[3] Rouche, Nicolas, *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*, Ellipses, Paris 1998

[4] Barbin, Evelyne, *Saisir l'irrationnel : dire, montrer, faire toucher*, Bulletin APMEP n°400, septembre 1995

[5] Friedelmeyer Jean-Pierre, *Les aires : outil heuristique, outil démonstratif*, Repères-IREM n°31, pp.39-62, avril 1998

[6] Chamontin, Françoise, *Des aires sans mesures à la mesure des aires*, Repères-IREM n°44, pp. 33-62, juillet 2001

[7] Plane, Henry, *Démontrer avec les aires, fascicule n°1*, IREM des Pays de Loire, centre du Mans, octobre 2000

[8] Gravier Anne & Janvier Martine, *Démontrer avec les aires, fascicule n°2*, IREM des Pays de Loire, centre du Mans, mai 2001

[9] Gaud Dominique et Guichard Jean-Paul, *Aperçu historique sur les nombres relatifs*, Repères-IREM n°2, pp.94-123, janvier 1991

[10] Groupe 1er cycle, *Les nombres relatifs au Collège*, IREM de Poitiers, septembre 1996

[11] Boyé Anne & al., *Promenades historiques : les moins que rien et les imaginaires mènent au réel*, IREM des Pays de loire, Nantes mai 1998

[12] IREM, *Images, Imaginaires, Imaginations*, Ellipses, Paris 1998