ERREURS ET INCOMPREHENSIONS EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

Lesley BOOTH
Chelsea College, Londres

La plupart des enseignants constatent que les enfants comprennent mal les questions d'algèbre. Si une mauvaise réponse est due à une faute d'inattention, elle peut être facilement corrigée, mais souvent l'erreur commise est le reflet d'une plus profonde incompréhension de la part de l'enfant.

Si seulement nous pouvions savoir pourquoi l'enfant a fait cette erreur, nous pourrions alors l'aider à surmonter sa confusion et éviter ainsi la faute. Malheureusement les enseignants n'ont d'habitude pas le temps d'étudier chaque cas particulier. L'étude des erreurs courantes et surtout certaines de ses mauvaises réponses données par beaucoup d'enfants peuvent faire l'objet de recherches.

C'est la tâche que le projet Stratégies et Erreurs dans les Mathématiques Secondaires (SESM*) s'est fixé. Ce projet a deux objectifs principaux : identifier les causes de quelques erreurs spécifiques aux mathématiques de l'enseignement secondaire, utiliser ces informations afin de développer de courts programmes d'enseignement pour aider les enfants à modifier leurs raisonnements et par là leur éviter ces erreurs. Le projet SESM a étudié plusieurs domaines des mathématiques, mais cet article ne décrira que le travail effectué sur l'algèbre élémentaire ou «l'arithmétique généralisée», en d'autres termes l'utilisation de lettres pour représenter des nombres et de l'écriture littérale pour des énoncés généraux.

Les erreurs courantes en algèbre élémentaire choisies pour être étudiées ont été celles que le projet Concepts dans les Mathématiques et Sciences du Secondaire

* Strategies and Errors in Secondary Mathematics.

«petit x» n°5, pp. 5 à 17.

(CSMS*), prédecesseur du SESM, avait établi comme étant des fautes commises par un grand nombre d'élèves de l'enseignement secondaire âgés de 13 à 15 ans. Le projet CSMS avait développé des recherches pour mettre en évidence la difficulté de certains concepts de base dans les différents domaines mathématiques, pour les enfants du groupe d'âge cité plus haut ; concepts tels que ceux de l'algèbre, fractions, proportion arithmétique, mesures, etc... Afin de réaliser cela le projet CSMS a sélectionné des tests dans chaque matière et les a appliqués à un large échantillonnage d'élèves de l'enseignement secondaire. Ces tests ont été développés sur la base des concepts jugés importants dans chaque matière par l'équipe du projet, et après une analyse de livres scolaires, des discussions avec des professeurs, des références se rapportant à des écrits psychologiques et à des recherches. Le plus important encore a été la contribution des interviews d'enfants du groupe d'âge concerné. Ces interviews n'étaient pas seulement utilisées pour permettre de décider comment les questions devraient être posées mais aussi pour donner des informations sur les idées et les méthodes employées par les enfants pour résoudre les problèmes mathématiques.

Dans le cas de l'étude de l'algèbre le test a été donné à environ 3 500 enfants âgés de 13 à 15 ans. Les résultats ont mis en évidence non seulement les questions que les enfants ont trouvées faciles ou difficiles, mais ils ont révélè aussi certaines erreurs commises par un grand nombre d'enfants (dans certains cas plus de 30% des élèves interrogés). Des exemples de ces erreurs sont présentés dans le tableau en annexe. Afin de trouver pourquoi les enfants faisaient ces erreurs, le SESM s'est appliqué à interroger ceux qui justement avaient donné ces mauvaises réponses. En tout, il y a eu 72 interviews avec un total de 55 enfants âgés de 13 à 15 ans. Chaque interview durait à peu près une demi-heure pendant laquelle on demandait à l'enfant d'expliquer son interprétation pour chaque question, de dire comment il résoudrait le problème et rédigerait sa réponse. Les questions utilisées au cours des interviews étaient du même genre que celles auxquelles les enfants avaient d'abord mal répondu (et qui se trouvent dans le tableau en annexe). En outre nous avons utilisé quelques questions supplémentaires afin de découvrir d'autres thèmes d'intérêt particulier. Tous les enfants interviewés appartenaient à des classes de niveau moyen en mathématiques. A la suite de ces recherches nous avons pu identifier trois domaines de difficulté importants en algèbre élémentaire qui semblent être la source des erreurs. Ces difficultés concernent la signification des lettres, la compréhension par les élèves des notations et conventions en algèbre et leur habileté à analyser et symboliser les méthodes dont ils se servent en arithmétique. Cet article va décrire seulement les deux premiers types de difficulté.

LA SIGNIFICATION DES LETTRES.

Nous avons noté deux principales difficultés au sujet de la signification des

* Concepts in Secondary Mathematics and Sciences.

lettres. Premièrement les élèves ont du mal à savoir si les lettres représentent des nombres ou des objets. Deuxièmement lorsqu'ils pensent qu'il s'agit bien d'un nombre ils croient généralement qu'il a une valeur définie (comme dans $x + 3 = 5$) plutôt q'un ensemble de valeurs posssibles (comme dans $x + y = y + x$). Quelques extraits des interviews illustrent ces points.

a) Les lettres en tant qu'objets.

Certains enfants interprètent «6a» comme «six «a»» (qui n'est pas la même chose que 6 fois a) ou «6 ananas».

Question.

Ajouter 3 à 5y. (I : Interviewer ; P : Peter, 15 ans).

I : Que veut dire «y» dans une telle question ? Qu'est-ce qu'il signifie, est-ce qu'il représente quelque chose ou bien est-ce juste une lettre comme ça ?
P : C'est une lettre mais elle représente quelque chose. Cela signifie **8** fois des «y».
I : Et **y** c'est quoi ?
P : Ça peut être n'importe quoi.
I : Quoi par exemple ?
P : Ça pourrait être... un yacht. Oui ça pourrait être **9** yachts.
I : Bien. Autre chose encore ?
P : Ça pourrait être un yaourt ou un «yam» (yam signifie patate douce).
I : Mais est-ce qu'il faut que ça commence par un «y» comme yaourt ou bien est-ce que ça pourrait être autre chose ?
P : Je crois qu'il faudrait que ça commence par **y**, puisqu'il y a la lettre «y» ici. Donc on a besoin de «y» pour commencer le mot.

Question.

Ecrire plus simplement $3x + 8y + 2x$. (Julie, 14 ans).

I : Est-ce que **x** et **y** veulent dire quelque chose ici ? Est-ce qu'ils représentent quelque chose ?
J : Non ce sont juste des lettres, c'est de l'algèbre.

Lorsqu'ils ont à répondre à des questions telles que «simplifier $3x + 8y + 2x$», les enfants, la plupart du temps, ne se préoccupent pas de la signification des lettres. Une grande partie des enfants interrogés a utilisé la règle suivante, même quand ils étaient capables de dire que les lettres représentent des nombres.

Question.

Simplifier $3x + 8y + 2x$. (Michaël, 14 ans).

M : **13xy.**

I : Comment as-tu obtenu cela ?
M : J'additionne les chiffres et ça donne **13**, ensuite il y a un **x** et un **y** dans la question donc on doit retrouver un **x** et **y** dans la réponse.
I : N'ai-je pas deux fois la lettre **x** dans la question ?
M : Oui, mais on n'en met qu'une dans la réponse. **13xy** veut dire que l'on a ensemble **13x** et **y**.
I : Qu'est-ce que c'est, **x** et **y** ?
M : Des nombres. Des nombres différents.

L'utilisation de 5y pour représenter 5 yachts ou de 6a pour 6 ananas a été assez générale. Il est tentant de suggérer qu'une des difficultés que les enfants ont avec la signification de x est qu'ils ont du mal à trouver beaucoup de mots commencant par «x»...

b) Lettres ne représentant qu'une seule valeur.

Certains élèves possèdent leurs propres règles pour décider quel est le chiffre qu'une lettre représente.

Question.

Que pouvez-vous écrire à propos du périmètre d'une forme qui aurait n côtés, chacun d'une longueur de 2 ? (R : Rodney, 14 ans).

R : **28.**
I. : Comment as-tu obtenu cela ?
R : Bien... tous les côtés font **2** et il y en a **14.**
I : Comment sais-tu qu'il y en a **14** ?
R : Il y a **n** côtés et **n** est **14.**
I : Comment trouves-tu que **n** vaut **14** ?
R : Avec l'alphabet. «**a**» est numéro 1, «**b**» est numéro 2, et ainsi de suite...

Certains des enfants semblaient croire que n valait toujours 14. Toutefois la plupart d'entre eux avait choisi cette valeur parce qu'ils croyaient que c'était la chose la plus sensée étant donné qu'ils n'avaient aucune autre information.

(Michelle, 14 ans).

I : Est-ce que **n** pourrait être un autre chiffre ou faut-il absolument qu'il soit **14** ?
M : Ça pourrait être n'importe quel nombre. Mais si vous formulez la question comme ça sans aucune indication supplémentaire... Il n'y a rien d'autre à faire, à part prendre l'alphabet et de s'arrêter au chiffre tombant sur **n**.

A un niveau plus élaboré les élèves ont compris que les lettres peuvent repré-

senter des valeurs inconnues mais ils ont tout de même commis des fautes en ne considérant pas qu'elles pouvaient représenter un ensemble de valeurs plutôt qu'une seule. Notamment nous avons relevé l'idée que différentes lettres doivent représenter différentes valeurs.

Question.

$x + y + z = x + p + z$. Est-ce vrai : toujours/jamais/quelquefois, quand... (Trevor, 15 ans).

T : Ça ne sera jamais vrai.
I : Jamais ?
T : Non jamais, parce que ça aura toujours des valeurs différentes... parce que **p** doit être différent de **y** et des autres valeurs, donc ça ne sera jamais vrai.
I : Donc **p** doit avoir une valeur différente... pourquoi dis-tu ça ?
T : Bien ! S'il n'était pas différent, alors on n'aurait pas **p**, on aurait **y**. Vous voyez on a une lettre différente pour chaque valeur différente.

(John, 13 ans).

J : (En réponse à la suggestion que **p** pourrait être égal à **y**). C'est un peu inutile, parce que vous n'aurez sûrement pas ce cas.
I : Qu'est-ce qu'on n'aurait pas ?
J : Vous n'aurez pas... deux lettres pour un nombre.

(Mandy, 13 ans).

M : Mais si **y** et **p** étaient les mêmes, vous auriez pensé qu'ils auraient mis **x, y** et **z** à la place de **x, p** et **z.**

(Tristant, 15 ans, justifie son opinion selon laquelle y et p auraient des valeurs différentes).

T : ... **y** ne peut pas être égal à **p.**
I : Oh ! Je vois, donc utilisant des lettres différentes...
T : ... veut dire qu'elles représentent des quantités différentes.
I : Ah oui, je vois. Et sont-elles toujours différentes ?
T : Je les ai toujours trouvées différentes. Je n'ai jamais rencontré un cas ou elles étaient identiques.

On pourrait penser que cette idée des lettres différentes représentant toujours des valeurs différentes entrainerait chez l'enfant une certaine confusion lorsqu'il serait confronté à des fonctions linéaires tels que $y = x$. Cependant, il n'y a peut-être pas lieu de trop s'inquieter, comme en témoigne Tristan.

I : Donc différentes lettres représentent toujours des valeurs différentes ? Et à propos du graphique **y = x** ? Sont-elles différentes ?

T : Ah, mais ça c'est autre chose. Ce sont des graphiques, ce n'est pas de l'algèbre. On peut avoir **y = x** en graphique.

Il apparaît clairement à travers ces interviews que la plupart des idées que les enfants ont au sujet des lettres ne sont pas dépourvues de logique. Beaucoup de manuels présentent des règles du genre $s = L \times \ell$ que les enfants traduisent par «surface = Longueur par ℓargeur», ou $e + 2 = v + f$* qu'ils traduisent par «edges + 2 = vertices + faces» («edge» = arête ; «vertices» = sommet), plutôt que par «le nombre de «edges»», etc... Il n'est donc peut-être pas surprenant que les enfants traduisent 5y par «5 yachts». De plus les lettres sont utilisées en arithmétique tout comme en algèbre, mais là 6m signifie «6 mètres» et non «6 fois le nombre représenté par m». Si nous voulons aider les enfants à atteindre une meilleur compréhension de l'utilisation des lettres en algèbre, il est peut-être utile de voir tous les cas où les lettres sont employées, distinguant en particulier l'utilisation des lettres en algèbre et en arithmétique.

De même la décision des enfants d'associer la valeur d'une lettre à la position qu'elle occupe dans l'alphabet semble être le résultat d'un profond désir de remplacer les lettres par des nombres. Cela semble provenir de la conviction de l'enfant qu'en mathématiques le but est toujours de trouver une réponse numérique. Pour ces enfants, les mathématiques sont un sujet empirique et la possibilité d'une réponse qui ne serait pas un nombre ne leur vient même pas à l'esprit. En fait, les réponses numériques sont pratiquement toujours demandées ; cette vision des choses ne devrait donc pas nous surprendre. L'interview suivant vient illustrer ce point relativement bien.

Question.

Un vaiseau spatial voyage par étapes, chacune d'une longueur de 11 années lumière. Que pouvez-vous écrire pour exprimer la distance accomplie par le vaisseau en y étapes ? (I : intervieweur ; W : Wendy, 14 ans).

W : Il y a une lettre là.

I : Qu'est-ce qu'elle signifie ?

W : Elle nous apprend le nombre d'étapes.

I : Bon. Peux-tu écrire quelque chose pour exprimer la distance accomplie par le vaisseau ?

W : Je multiplie par ce chiffre.

I : D'accord, peux-tu écrire quelque chose sur la distance, alors ?

NdlR : Il s'agit de la relation d'Euler satisfaite par certains polyèdres.

W : Quoi : dois-je écrire ce que je ferai ? (Elle écrit : «si **y** était un nombre je le multiplierais par **11**»).

I : Maintenant, peux-tu écrire la même chose sans utiliser des mots, mais en écriture mathématique ?

W : Quoi ? Que voulez-vous dire ? Quelque chose comme **11** multiplié par **y** ?

I : Oui d'accord.

W : (Elle écrit : «**11** X **y**»). C'est ça ?

I : Bien.

W : Donc c'est tout ce que c'était ? Pourquoi ne me l'aviez-vous pas dit, je croyais que vous vouliez la réponse !

I : Tu veux dire un chiffre particulier ?

W : Oui !

I : Et y a-t-il une réponse particulière ?

W : Non. A moins que vous ne connaissiez **y**.

I : O.K. Comment donc aurais-tu pu me donner cette réponse ? !

W : On ne peut pas. Mais je ne savais pas qu'il ne fallait répondre comme ça !

L'idée qu'une lettre ne représente qu'une seule valeur particulière est tout à fait compatible avec l'expérience arithmétique des enfants. En arithmétique chaque symbole qui représente une valeur n'en représente qu'une seule et unique. Il n'y a pas de choix possible sur la valeur du symbole «3», par exemple. Par ailleurs lorsque nous introduisons l'algèbre, nous présentons souvent les lettres dans des équations très simples telle que a + 2 = 5 ou dans des problèmes de substitution tel que «trouver a + b si a = 5 et b = 3». Dans chacun de ces cas il est clair que les lettres n'ont qu'une seule valeur, même si, au contraire des nombres symboles, la même lettre peut avoir différentes valeurs dans des problèmes différents.

L'idée que des lettres différentes telles que x et y peuvent avoir la même valeur dans un problème donné n'est pas des plus facile à admettre. En arithmétique également l'idée que «$\frac{2}{3}$» et «$\frac{4}{6}$» sont égales, pose un problème aux enfants. Aussi, bien que la plupart du temps nous prenions soin de dire aux enfants que la même lettre dans un problème donné représente la même valeur, nous oublions souvent d'ajouter que différentes lettres ne représentent pas nécessairement des valeurs différentes.

Enfin nous devons encourager les enfants à réfléchir sur la signification des expressions mathématiques qu'ils rencontrent. Des expressions telle que 3x + 8y + 2x sont dénuées de sens et tendent à être résolues incorrectement à moins que l'enfant ne comprenne à la fois la signification de termes comme «3x» et le fait que les lettres peuvent représenter des valeurs différentes dans certains cas. L'utilisation de l'analogie avec des objets (3 pommes + 8 bananes + 2 pommes) est rarement un succès et peut encourager la confusion objet/nombre décrite plus haut (dans nos interviews les enfants qui utilisaient cette analogie avaient autant de chance de donner la mauvaise réponse que la bonne).

LA COMPREHENSION DES NOTATIONS ET DES CONVENTIONS.

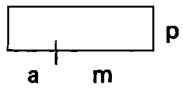
Ici nous avons noté deux difficultés, premièrement l'enfant peut écrire n^3 ou $3n$ comme réponse pour $n + 3$, et deuxièmement beaucoup d'enfants n'utilisent pas les parenthèses pour indiquer l'ordre dans lequel des opérations différentes doivent être effectuées.

a) «Assembler» en addition algébrique.

Pour certains enfants écrire «3n» pour «3 + n» semble refléter directement leur vue de l'addition en tant qu'un assemblage de deux collections ou mesures.

Question.

Que pouvez-vous écrire à propos de la surface de ce rectangle :



(I : Intervieweur ; M : Michaël, 14 ans).

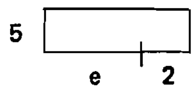
M : Je suppose que je peux dire **am** multiplié par **p** (écrit donc «**am** X **p**).
I : Ah, je vois. Et qu'est-ce que c'est que le morceau «**am**» ?
M : C'est la réunion des deux segments.
I : Ah oui, mais comment aurais-tu cet assemblage, que ferais-tu ?
M : Premièrement j'aurais à mesurer la longueur de **a** et de **m** et de les ajouter l'une à l'autre.

Cette erreur ne semble pas simplement être le résultat d'une confusion avec l'abréviation qui est enseignée pour le produit 3 fois n car on suppose que les enfants qui n'ont pas encore appris l'algèbre ne soupçonnent pas l'existence de cette source de confusion ; ils ont pourtant eux aussi tendance à écrire 3n au lieu de 3 + n.

Ce qui pousse les enfants à effectuer une somme algébrique de cette façon vient également du fait qu'apparemment ils considèrent qu'une formule telle que «3 + n» n'est pas une réponse valable parce qu'elle «vous dit d'additionner alors que vous n'avez pourtant pas encore additionné». Pour ces enfants le résultat d'une addition doit être un terme unique qui est généralement le terme réunion (voir aussi plus haut le paragraphe concernant la signification des lettres).

Question.

Que pouvez-vous écrire à propos de la surface du rectangle :



(Christopher, 15 ans, a écrit «5 X e2»).

I : Pourquoi dis-tu **5 X e2** ?
C : **5** fois **e2.** Ça veut dire le **e** plus **2**, le **2** et le **e** ensembles multipliés par **5.** C'est ce que la réponse doit être, **5** fois **e2.**
I : Que veut dire **e2** ?
C : **5** fois **e2...** le **e2** signifie que l'on a ajouté le **2** et **e** avant...

Ou à un niveau peut-être un peu plus élaboré.

Question.

L'équipe West Ham a eu x buts et Manchester United y buts. Que pouvez-vous écrire pour le nombre total de buts obtenus ? (Michaël, 14 ans).

M : Je ne vois pas vraiment de solution, je veux dire, **x** et **y**, c'est vraiment sans espoir. A moins bien sûr que vous ne précisiez avant, **x = 3** ou **y = 2.** J'ai déjà vu ça. Ensuite ils posent la question et vous n'avez plus qu'à répondre.
I : Si tu savais combien **x** et **y** valent, que ferais-tu alors pour obtenir la réponse ?
M : J'aurais à additionner les **x** buts aux **y** buts et cela serait, disons **z** buts...
I : Donc tu dirais ... **y**...
M : Plus **x.** Oui donc par conséquent s'ils se donnent comme ça, je suppose que j'ai juste à écrire **z** vraiment... (Il écrit juste **z**).

Ce dernier exemple illustre la conception qu'a Michaël de la conclusion dans les systèmes mathématiques, mais malheureusement cela n'est généralement pas considéré comme correct en algèbre !

D'autres enfants lisent le terme «réunion» comme un nombre de deux chiffres (par exemple 5y = 5 dizaines + y unités).

Question.

Ajouter 3 à 5y. (Wayne, 15 ans).

W : **y** pourrait être un nombre, par exemple un **4**, et cela donnerait (**5y**) **54** ou bien **5** à la puissance **4**, donc **20** (il écrit **54**, 5^4).
I : Comment pourrais-tu savoir lequel c'est parmi ces deux là ?
W : (Arrêt)... Je ne sais pas !
I : Tu crois que ça pourrait être n'importe lequel ou bien tu penses que c'est un des deux seulement. Tu ne peux pas choisir toi-même ?
W : Non, ça pourrait être les deux, on ne peut pas dire.
I : Donc, c'est soit... **5** avec un petit **4** ou c'est... qu'est-ce c'est l'autre ?
W : Quoi... cinq quatre... non, cinquante-quatre !
I : Cinquante-quatre ?
W : Oui.

Cependant cette interprétation peut avoir ses limites comme le montre la suite de l'interview de Wayne.

I : Est-ce que ça pourrait être autre chose que **4**, le **y** ?
W : Oui, **7, 8,** n'importe quoi !
I : Donc ça pourrait être n'importe quel nombre ? (Wayne acquiesse de la tête). Suppose que ça serait vingt-trois. Qu'écrirais-tu alors ?

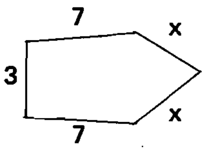
W : Oh ! (Il rit). Bien ! (Il rit encore). Cinq cent vingt-trois. Mais je ne sais pas... ça n'a pas l'air très prometteur... je ne sais pas... Attendez. Ça pourrait être vingt-huit, **5** plus **23**... oui. (Pause). Là encore ça pourrait être **5** à la puissance **23** (il écrit **5 + 23**, 5^{23}).

Une confusion analogue entre puissances et produits a été notée dans certaines interviews.

D'autres enfants semblent avoir acquis l'idée que la réunion de termes signifie multiplication, ils transfèrent ensuite cette interprétation à des termes numériques qui apparaissent dans le même contexte.

Question.

Que pouvez-vous écrire à propos du périmètre de cette forme :



(Tanika, 15 ans).

T : Je dirais deux sept, deux **x**, et un trois... (écrit **27 + 2x + 13**).
I : Bon, regarde bien ce que tu viens d'écrire, deux sept... qu'est-ce que ça veut dire ?
T : Oh ! ça devrait être plus petit, autrement vous allez penser... (elle écrit 2_7 plaçant le **7** en indice).
I : Que veux-tu dire par là ?
T : Deux multiplié par sept, deux multiplié par **x**...
I : D'accord ! Donc tu ne veux pas dire vingt-sept ?
T : Non ! Deux fois sept... Oh ! (elle écrit 1_3 au lieu de **13**).

La nature étendue de ce problème de symbolisation semble indiquer que l'on devrait apporter une plus grande attention à l'enseignement des notations en arithmétique comme en algèbre. Encore une fois la confusion des enfants entre arithmétique et algèbre apparait dans plusieurs de ces interviews. En arithmétique la concaténation est utilisée et elle signifie l'addition à la fois dans l'écriture décimale (53 = 5 dizaines + 3 unités), et dans l'écriture fractionnaire ($2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$). Cette expérience des enfants en arithmétique peut par conséquent les encourager à attendre les mêmes règles en algèbre.

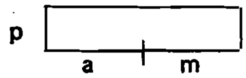
b) L'utilisation des parenthèses.

Bien souvent, les enfants ne voient pas le besoin d'utiliser des parenthèses et donc ne s'en servent pas. Dans le cas d'un problème arithmétique avec plusieurs opérations différentes, les enfants croient que les calculs doivent s'effectuer de gauche

à droite (donc que les parenthèses ne seraient pas nécessaires pour préciser cela), ou simplement savent quelle opération doit être effectuée en premier (et là encore il n'est pas besoin de parenthèses). En arithmétique savoir quelle opération calculer en premier lieu est généralement suffisant pour obtenir une réponse correcte alors qu'en algèbre l'omission des parenthèses aboutit le plus souvent à une mauvaise réponse.

Question.

Que peut-on écrire à propos de la surface de ce rectangle :



(Neil, 15 ans).

N : p multiplié par... a plus m (écrit p X a + m).

I : Bon, donc tu as écrit p X a + m. Mais que ferais-tu en fait, que dois-tu faire d'abord ?

N : Je ne vous suis pas.

I : Bon, reprenons. Pourquoi as-tu écrit cela ? p multiplié par a + m ?

N : Parce qu'on multiplie ce côté p par l'autre côté qui est a et m, et ce côté (a et m) on ne le connait pas, donc on doit additionner a + m afin de les multiplier avec l'autre côté p.

I : Bien, quel morceau vas-tu calculer d'abord ?

N : J'additionne ces deux là (a et m), et ensuite je les multiplie par p.

I : Et c'est ce que tu as écrit ?

N : Oui.

I : Suppose que je crois que p X a + m soit p multiplié par a, et ensuite on ajoute m ?

N : Non, ce n'est pas ça. Si vous multipliez p et a ensembles vous n'avez qu'une partie de la surface. Vous devez calculer a plus m pour avoir toute la longueur et ensuite la multiplier par p. Mais la première chose à faire, c'est d'ajouter a et m.

Marika (15 ans) avait d'abord écrit «a + m X p» et avait ensuite mis les parenthèses autour de «a + m».

I : Que viens-tu de faire ?

M : J'ai juste mis les parenthèses pour montrer que c'est la somme a + m que l'on multiplie par p. **Mais vous auriez su cela de toute façon.**

Omettre les parenthèses entraine quelque fois d'autres erreurs. Par exemple, ayant écrit e + 2 X 5 pour la surface du rectangle mesurant 5 sur e + 2 certains élèves simplifient ensuite cela en e2 X 5 qui devient donc 5e2 ou 10e, et en viennent à observer que l'on aurait pu multiplier les nombres d'abord, donnant e + 10 ou 10e, ce qui leur permettrait une vérification facile. D'autres ont montré que lorsqu'ils savaient quelle opération effectuer en premier, ils ne faisaient pas attention à l'ordre dans lequel ils écrivaient la formule.

(Marie, 16 ans, a proposé à la fois $5 \times e + 2$ et $e + 2 \times 5$ alors que le rectangle mesure 5 sur $e + 2$).

I : Tu crois que $5 \times e + 2$ et $e + 2 \times 5$ sont justes ?

M : Oui. Le premier ($5 \times e + 2$) multiplie le côté 5 par le côté $e + 2$ et ça n'en fait qu'un $e + 2 \times 5$.

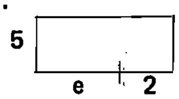
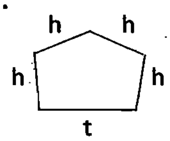
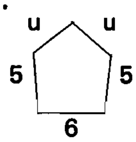
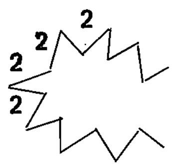
Ce manque d'attention au sens précis des expressions mathématiques a également été remarqué en arithmétique où il arrive que les enfants échangent allègrement et sans s'en s'alarmer le moins du monde $3 \div 12$ à $12 \div 3$. Lorsqu'ils savent dans quel ordre ils vont effectuer leurs calculs, ils ne sentent plus le besoin de précisions particulières dans la rédaction même du problème.

Une fois de plus l'expérience des enfants en arithmétique, en ce qui concerne l'omission des parenthèses, semble avoir des conséquences directes sur leurs erreurs en algèbre. Bien entendu supprimer les parenthèses en arithmétique peut également être incorrect mais bien souvent cela passe inaperçu si la réponse finale est juste. Si nous voulons aider les enfants à comprendre la nécessité des parenthèses en algèbre, nous devons peut-être avant tout nous demander comment les enfants comprennent les formules en arithmétique et pourquoi ils pensent qu'il n'est pas important d'être rigoureux dans leur rédaction.

Les observations que nous avons décrites ici ont été obtenues au cours d'une étude sur les causes d'erreurs en algèbre élémentaire pour les élèves du secondaire. Un examen de ces observations a notamment révélé des origines dans l'enseignement de l'arithmétique comme dans celui de l'algèbre. Bien qu'une grande partie de l'algèbre élémentaire puisse être considérée comme de «l'arithmétique généralisée», il est clair qu'il y a aussi des différences importantes entre ces deux domaines et que ceci peut déboucher sur des difficultés pour l'élève si ces relations ne sont pas reconnues par le professeur. Afin d'aider les enfants à une meilleur compréhension de l'algèbre, nous devons donc considérer ce qu'ils font en arithmétique et le lien qu'ils établissent entre le programme en arithmétique et leurs conceptions des processus algébriques.

ANNEXE

Erreurs sélectionnées pour étude par le SESM (algèbre)

question du CSMS	réponse* erronée	% donnant** une réponse erronée	% donnant ** une réponse juste
1. Surface de : 	5e2, e10, 10e, e + 10	42	7
2. Périmètre : 	hhhht, 4ht, 5ht	27	57
3. Périmètre : 	uu556, 2u16	20	28
4. Périmètre (n côtés de longueur 2) 	32 à 42	25	9
5. Ajouter 4 à 3n	3n4, 7n 7, 12	45 17	22
6. Multiplier n + 5 par 4	4n5, n45 n + 20, n + 9 20, 9	12 39 16	8
7. Simplifiez si vous le pouvez : 2a + 5b	7ab, 8ab	45	7
8. L + M + N = L + P + N est vrai : toujours/jamais/quelquefois, quand...	jamais	55	11
9. c + d = 10 et c est inférieur à d. Qu'est-ce que c'est le c ?	simple valeur 0, 1, 2, 3, 4 (ou 5)	43	7

* Erreurs principales pour chaque question.
** Enfants de 13 ans.