

Enseigner l'algèbre élémentaire avec Vygotski : séquence d'activités

Bertrand TOQUEC, Yves CHASSIN, Bernard VIDAL,, IRES de Toulouse.

Toute une littérature (française et étrangère) montre que l'entrée dans l'algèbre pose de grandes difficultés aux élèves. Consciemment ou non, tout enseignement suppose des conceptions sous-jacentes. Menant en parallèle une recherche sur les différentes conceptions, nous avons perçu que les travaux de Lev Vygotski pouvaient fournir des pistes et un cadre pertinent à un enseignement de l'algèbre élémentaire. Nous avons donc élaboré une séquence d'introduction au calcul littéral reposant sur certaines idées-clés de Lev Vygotski comme celle de développement des concepts et celle de dialectique des concepts quotidiens-concepts scientifiques. Lev Vygotski pour qui notamment toute généralisation s'appuie sur les généralisations précédentes sans les annuler. Il nous paraît aussi essentiel de saisir le lien entre développement et apprentissage-enseignement.

Dans cette suite d'activités, se feront jour

- la nécessité préalable d'une réelle construction des nombres, elle même établie à partir de la compréhension des grandeurs mesurables,
- l'importance de la construction avec les élèves d'une solide idée de ce qu'est le calcul et l'égalité, ce qui permet de garder du sens, au moment de l'abord de l'algèbre.

Pour faciliter la tâche du lecteur, des notes, de nature plutôt théoriques, sont reportées à la fin de l'article. On peut donc lire le texte de manière linéaire et se reporter ensuite sur ces notes.

Les quelques notes de bas de page sont le moyen de relier ces conceptions à des auteurs qui, tout en n'étant pas directement enchassables dans notre approche, ont des ramifications certaines et autorisent des prolongements fertiles.

De plus, très souvent, l'introduction à l'algèbre se fait par la résolution de problèmes **au moyen de** l'algèbre. Il est certes nécessaire de travailler cet aspect mais en complément, nous sommes convaincus qu'il est fondamental de faire travailler **sur** l'algèbre (en tant que structure). Nous rejoignons là la manière dont les concepts se forment et deviennent opérants.

L'élaboration de cette séquence s'appuie grandement sur une analyse préalable d'erreurs d'élèves et sur différentes recherches concernant l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

Cet atelier est le complément de celui intitulé "Analyse d'erreurs en algèbre élémentaire : l'apport de Vygotski" qui précise les présupposés sur lesquels s'est appuyée la construction de cette séquence. [A].

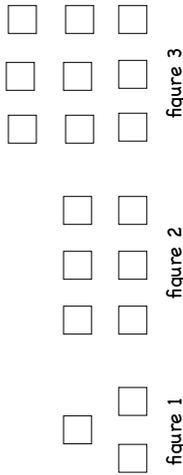
- L'idée qu'un concept isolé n'a pas de sens; que la compréhension d'un concept ne peut se faire qu'en liaison avec d'autres. [B]

Les travaux du groupe nous ont conduits à réfléchir à l'amont de l'enseignement du calcul littéral, à savoir la construction des nombres, leur lecture, leur écriture, au «*calcul chiffral*»¹. Il est utile ici de préciser que nous ne considérons pas l'algèbre comme une arithmétique généralisée.

- La formation des concepts [B]
- La pensée par complexe [C]
- La médiation sémiotique et le rôle du professeur comme médiateur [D]
- La Zone de Proche Développement (ZPD) [E]
- L'objectivation [F]

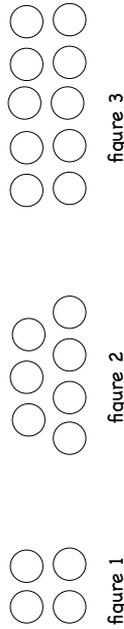
¹ Le "calcul chiffral" ne s'effectue que sur des nombres écrits à l'aide de chiffres, contrairement au calcul littéral qui peut s'effectuer sur des nombres dont certains sont écrits à l'aide de lettres.

Activité 1 - A



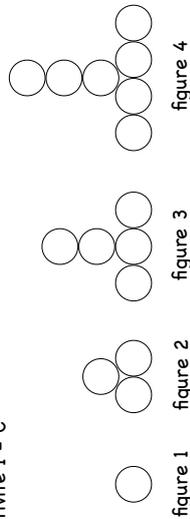
- Combien de carrés comprend au total la figure 5 ? Faire le dessin
- Sans faire de dessin, combien de carrés comprend au total la figure 10 ?
- Combien de carrés comprend au total la figure 144 ?

Activité 1 - B



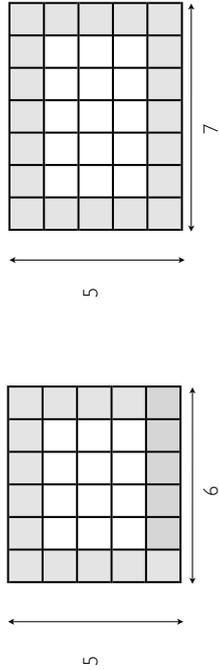
- Combien de cercles comprend au total la figure 6 ?
- Sans faire de dessin, combien de cercles comprend au total la figure 11 ?
- Combien de cercles comprend au total la figure 207 ?

Activité 1 - C



- Combien de cercles comprend au total la figure 5 ? Faire un dessin.
- Sans faire de dessin, combien de cercles comprend au total la figure 10 ?
- Combien de cercles comprend au total la figure 207 ?

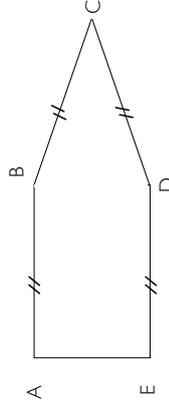
Activité 2



- On peint toutes les cases en bordure du rectangle. Dans chaque cas, déterminer le nombre de cases peintes.
- Quel est le nombre de cases peintes quand la longueur est 11 ? puis 19 ? Décrire la méthode.
- Exprimer le nombre de cases peintes pour une longueur quelconque du rectangle. (de manière précise).

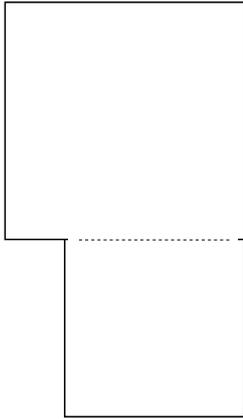
Activité 3

- Une unité de longueur étant choisie, on travaille avec les mesures. On donne un pentagone ABCDE tel que $AB=BC=CD=DE$ et $EA = 3$.
- Comment exprimer le périmètre de ce pentagone ?
- Que vaut le périmètre quand $AB = 11$?
- Que vaut le périmètre quand $AB = 7,2$?



Activité 4

La figure suivante est composée de deux carrés accolés. Les mesures des longueurs des côtés des carrés sont deux nombres entiers consécutifs.



Activité 5

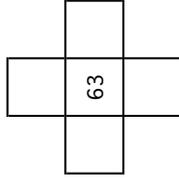
« Table de multiplication ou de Pythagore »

x	1	2	5
1			
2		4	10
3			12 15 18
4			20

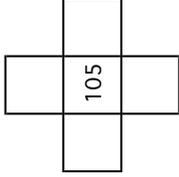
• Comparer $10 + 15 + 20$ et $12 + 15 + 18$

• Compléter sans faire de calcul

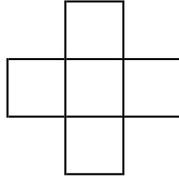
- choisir deux nombres qui conviennent et déterminer la mesure du périmètre
- comment exprimer le périmètre dans tous les cas possibles ?



ligne 7 ; colonne 9

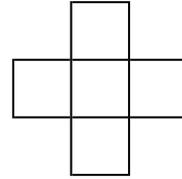


ligne 7 ; colonne 15

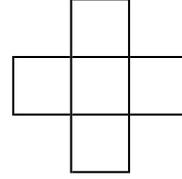


ligne 7 ; colonne 23

• Compléter



ligne 7 ; colonne a



ligne n ; colonne 5

• À quel moment de la progression annuelle ?

Comme indiqué ci-dessus, un certain nombre de pré-requis sont nécessaires. Dans la progression annuelle cette séquence a été réalisée en janvier-février faisant ainsi suite à des activités sur «nombres - opérations - calculs» depuis le mois de septembre, mais également à un travail important sur la proportionnalité et les grandeurs mesurables. La proportionnalité parce qu'elle donne à voir l'idée de relation, relation entre deux grandeurs mesurables ou deux suites numériques. La notion de relation permettant un travail complémentaire sur l'égalité (en particulier la réflexivité) [B].

• Quelles modalités et pourquoi ?

Les deux premières activités ont été données dans le cadre d'un travail de groupe (groupes de 3 ou 4 élèves). Pour clarifier immédiatement notre position il est évident qu'on ne doit pas attendre de ce travail de groupe le fait que les élèves «re-inventent» seuls les notions qui sont les objectifs de cet apprentissage. Notre démarche n'est pas constructiviste [C].

Dans notre approche, le travail de groupe a comme objectif d'amener les élèves à co-élaborer un certain nombre de significations partagées par la nécessité imposée de rédiger le plus clairement possible les réponses. Cela avec l'aide du professeur qui doit donc être vu comme un «médiateur sémiotique» et qui par son passage, les questions qu'il pose, oriente l'évolution des «signes»² utilisés dans le groupe de «sens individuels» vers une signification partagée, de plus en plus scientifique et culturelle. On englobera dans une définition étendue de «signes» toutes les ressources mobilisées par les élèves pour répondre : mots - gestes - regards - schémas ... oral et écrit ...

On profite ainsi de la perméabilité entre perception, action et connaissances et en retour les actions en train de se faire augmentent cette perméabilité.

Dans le groupe, les élèves vont agir en parlant, en «gesticulant», en écrivant, en dessinant, en mobilisant des objets mathématiques. Ils accomplissent une succession d'actions qui prennent une signification commune. Pour reprendre J.Bruner nous avons à faire à une «construction contextuelle et culturelle» des significations. On retrouve ici la pertinence de L.Vygotski quant à ses écrits sur le caractère particulièrement médiateur d'objets ainsi construits.

Cette construction commune résulte d'expériences différenciées des co-auteurs que sont les élèves et de cette différence³ initiale naît la valeur de ce qui est élaboré, étant entendu que seule cette différence ne suffit pas à l'appropriation du concept visé.

² «Un signe [...] est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre.» C.S..Peirce

³ «La verbalisation est une activité qui change les différences en valeurs » M.Bakhtine

Le travail collaboratif au sein du groupe va créer ce que nous appelons une «ZPD du groupe» (par expansion de la notion de ZPD d'un individu) que l'enseignant va mettre à profit lors de ses interventions pour hisser les élèves à un niveau supérieur de compréhension des notions visées.

On peut dire que la ZPD du groupe est «supérieure» à la somme des ZPD de chacun des élèves du fait des échanges, des productions partagées... Le rôle du langage⁴ est ici particulièrement prégnant (comme communication et comme formation de la pensée : les deux fonctions du langage indiquées par L.Vygotski) : chaque nouvelle intervention d'un élève provoque une modification sur les autres et l'écho⁵ entraîne une réorganisation de son système antérieur de connaissances (idem pour tous les membres du groupe).

Cette nouvelle organisation individuelle demande à se «cristalliser» pour devenir connaissance transmissible aux autres. Elle doit prendre une forme qui peut être signifiante pour les autres.

Demander aux élèves de récapituler, de synthétiser les faits, d'écrire des remarques sont autant de moyens de faire prendre conscience, de faire se mobiliser les processus mentaux supérieurs.

À ce moment-là, l'écriture littérale d'un nombre n'est toujours pas introduite. En quelque sorte, les mots et les phrases utilisés sont une forme en devenir, et donc en cours de maturation, du langage symbolique des mathématiques; «l'ensemble sémiotique instanciel» (l'ensemble des signes évoquées plus haut) contient en germe la langue officielle du calcul littéral. À partir de la formulation nécessairement imprécise et floue du départ les interventions de l'enseignant conduisent progressivement les élèves à une rédaction plus précise, plus rigoureuse, à la nécessité ressentie d'une formulation efficace.

Pour le professeur, il existe également un deuxième intérêt à ce travail de groupe et à l'analyse de sa ZPD, c'est de diagnostiquer au plus près les «connaissances» à cet instant des élèves et d'adapter les interventions.

Après le premier travail en groupe, par la mise en commun au niveau du groupe-classe s'opère un changement de facteur d'échelle. On retrouve le rôle de «médiateur» de l'enseignant à ceci près que les fonctions psychologiques des élèves ont évolué. La mise en commun va agir comme une «montée en généralité» plus grande par confrontation/fusion des «objets» produits par chacun des groupes.

⁴ «La merveille du langage est qu'il se fait oublier : je suis des yeux les lignes sur le papier, à partir du moment où je suis pris par ce qu'elles signifient, je ne les vois plus..... l'expression s'efface devant l'exprimé, c'est pourquoi son rôle médiateur peut passer inaperçu.» M.Merleau-Ponty (La perception phénoménologique)

⁵ «Quand l'élan spirituel se fraie un chemin par les lèvres, son effet revient frapper l'oreille. La représentation est par là transposée en une véritable objectivité sans être soustraite par cela à la subjectivité. Cela seul le langage le peut : sans cette transposition continue en une objectivité qui revient au sujet (même pendant le silence), la formation d'un concept et donc toute vraie pensée est impossible». W.Humbolt, cité par I.Meyerson.

• À partir de quel «matériau» mathématique ?

Les deux premières activités portent sur les nombres entiers naturels. Plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, en classe de cinquième, l'ensemble des entiers naturels est certainement celui qui est le mieux maîtrisé tant au niveau de la connaissance du nombre que de celle des propriétés des opérations.

Ensuite, avec ces nombres, il est très facile de construire des «motifs figuraux» comme ceux utilisés et le passage (réversible) du figural au numéral semble assez simple.

Ces situations associant figural / numéral ou géométrique / numéral permettent aux élèves de «garder du sens» à partir de leurs connaissances antérieures (quotidiennes, mathématiques...), de démarrer une réflexion et d'émettre des réponses (quelquefois partielles) en gardant comme appui sécurisant ces connaissances antérieures sur lesquelles ils peuvent faire retour. Ces appuis garantissent une certaine confiance chez l'élève qui peut commencer ainsi à analyser sa production et distinguer le particulier du général. On est là dans une dimension affective, non négligeable dans l'enseignement.

En s'appuyant sur le concept de conversion de R.Duval, on peut dire qu'il est aisé pour les élèves de construire, schématiser les figures manquantes ou celles qui vont servir au cours de l'activité pour tester, s'assurer de la pertinence des réponses proposées.

Par ailleurs, il est plus facile de contrer une certaine habitude des élèves de ne percevoir dans un cadre arithmétique que l'aspect calculatoire, qui consiste à ne fournir uniquement et systématiquement qu'un résultat sous «forme réduite», par une focalisation sur l'aspect relationnel, nécessitant l'attention volontaire sur les opérations en jeu et favorisant le faire/défaire un nombre [tricotage / détricotage] : - faire accepter que la réponse soit $2 \times 5 - 1$ plutôt que la forme réduite 9.

[$2 \times 5 - 1$, suivi de $2 \times 6 - 1$, $2 \times 7 - 1$ donnant plus à voir dans ce cas que 9 ; 11, 13]

- mettre en avant la nécessité du travail sur l'équivalence de deux expressions d'un nombre basé sur les propriétés (ainsi mises en avant de manière plus explicite [$5 + 5 - 1$ ou comme la somme de 5 et de la différence de 5 et de 1 ou comme la différence du double de 5 et de 1])

- insister sur le renforcement de la signification du « $=$ » en un sens plus algébrique que «faire».

Ce «faire», qui dans l'expression très souvent formulée «8 plus 2 fait 10» introduit subrepticement l'idée de temps, passé et présent, entraîne pour l'élève l'oubli de ce passé et donc de la compréhension de ce 10 comme d'une somme et donc de l'équivalence si souvent fertile en mathématiques.

C'est aussi l'occasion de mettre en évidence une des connaissances opérantes en mathématiques, trop souvent implicite, qui est celle consistant à changer de point de vue.

Une même demande faite à partir de nombres autres qu'entiers serait plus fastidieuse, moins directe et masquerait très certainement le fil conducteur de l'activité qui est de faire émerger des relations.

La troisième activité doit permettre d'élargir la réflexion aux autres ensembles de nombres, de ne pas laisser croire que l'on ne peut travailler qu'avec les nombres entiers (de passer en quelque sorte du discret au continu), de poursuivre l'analyse dans un énoncé entre «ce qui varie» et «ce qui ne varie pas», de lier géométrique et algébrique (il peut être demandé aux élèves des constructions de différentes configurations de la figure soit manuelles, soit assistées par un logiciel de géométrie dynamique).

Elle a été proposée en classe entière et a également servi pour évaluer les conséquences de la réflexion sur les deux premières activités.

• Quelques commentaires ...

Cette séquence, à quelques petites modifications près, a été proposée à différentes classes sur plusieurs années scolaires et cela correspond en tout à huit classes soit deux cents élèves environ. Les commentaires regroupent les remarques et observations sur ces élèves.

Dans l'activité 1-A, la relation en jeu est une relation de proportionnalité. Cette situation se place délibérément dans le prolongement du travail sur la proportionnalité fait antérieurement et permet certainement une meilleure entrée dans l'activité pour les élèves dont beaucoup d'entre eux se sont retrouvés en terrain connu.

Par ailleurs, 1-A et 1-B sont complémentaires en ce sens que plusieurs groupes ont remarqué qu'il y avait un «écart», un «décalage» de 1 entre le nombre de carrés et le nombre de cercles. Cette proximité renforce la motivation pour aller plus loin.

Lors de la première mise en place de cette séquence avec une classe l'activité 1-A n'était pas proposée et il semble que les productions de réponse ont mis plus de temps à éclore.

La situation 1-C complète la série. Bien que son énoncé reprenne le même modèle que les deux autres, son rôle est différent (en tout cas dans l'intention au moment de l'élaboration de la séquence). Elle est destinée à tester «le niveau de solidité» à cet instant des nouvelles connaissances / compétences en cours de formation. La réaction des élèves est instructive. Son analyse permet à l'enseignant de savoir avec quels élèves il faut insister pour que l'idée de relation devienne première.

Les différentes manières de verbaliser la relation apparaissent plus vite; dans un même groupe, plusieurs points de vue sont exprimés. Tout cela fournit un terreau fertile pour les interventions de l'enseignant.

Dans la suite, nous présenterons quelques travaux d'élèves relevés en classe dont certains font apparaître des manières de répondre relativement riches et non anticipées par l'enseignant.

La disposition des carrés ou des cercles a aussi un effet sur la réflexion des élèves : des questions émergent sur son importance ou non pour dessiner les figures manquantes; elle permet également à l'enseignant d'évaluer ce qui est perçu comme important, ce qui pour lui est «l'objet» du problème et éventuellement de recentrer le questionnement (par exemple pour cet élève qui ne percevait dans l'arrangement des cercles qu'un T renversé et ne lisait pas du tout le nombre de cercles). Ce fait est fondamental parce qu'il souligne toute l'attention à porter au lien entre perception, lecture, lecture en contexte et représentation. Autrement dit le travail en cours n'est pas uniquement disciplinaire et contribue à développer des compétences plus générales mais cet aspect n'est pas l'objet de cet article⁶.

Au cours du travail des élèves, le professeur intervient soit pour faire préciser des éléments de réponse, soit pour des questions supplémentaires.

Un exemple : Dans le 1-B, quel est le numéro de la figure dont le nombre de cercles est 3052 ?

À ce moment-là, tous les élèves ont perçu que pour passer d'une figure à la suivante, il suffisait d'ajouter 3. Avec l'aide de l'enseignant, ils sont également arrivés à écrire que «le nombre de cercles d'une figure est la somme du triple du numéro de la figure et de 1» (il existe plusieurs formulations de cette relation entre les groupes; la mise en commun portera justement sur leur analyse d'un point de vue de la mobilité langagière). À partir de là, comment répondre à la question ? Enlever 3 pour arriver à une figure dont le numéro est connu paraît fastidieux... Idem en ajoutant 3 à partir du début... Le «détricotage» de la relation verbale obtenue s'est imposée peu à peu aux élèves mais sa réalisation a soulevé quelques difficultés qui ont nécessité une réflexion plus approfondie sur la signification de cette relation et des nombres en jeu au travers de leur écriture. [Cette partie nous confirme dans le fait que l'introduction à l'algèbre se prépare le plus tôt possible, dès l'abord de l'arithmétique].

Toute la réflexion se fait essentiellement au moyen de la langue naturelle; l'écriture du «détricotage» prend du temps... [On est déjà dans une phase de résolution d'équation sans que ce terme apparaisse]. Un manque apparaît assez rapidement dans le discours des élèves : comment appeler / désigner ce nombre ? Cette phase est intermédiaire entre «écriture chiffrée» et «écriture littérale».

Se met également en place, conceptuellement parlant, la notion de «**propriétés universelles**», c'est à dire que la relation / propriété est vraie pour tous les nombres en jeu, ici les numéros des figures. Encore une fois, médiation par le langage. L'enseignant fait oraliser et écrire

⁶ «La pensée abstraite de l'enfant se forme lors de toutes les leçons et son développement ne se décompose nullement en processus séparés correspondant aux différentes matières entre lesquelles se répartit l'apprentissage scolaire» L.Vygotski (Pensée et langage - page 349)

des phrases du type « quel que soit **le numéro...** ». Ce nombre englobe en quelque sorte **tous** les autres. Cette phase de généralisation est très importante puisqu'elle oblige à penser le nombre autrement qu'arithmétiquement, une nouvelle catégorie de nombre apparaît à la conscience des élèves.

Comme chaque fois que l'élève a rencontré une nouvelle catégorie de nombre (décimal, fraction...) il a été nécessaire d'en établir une **écriture dans un système d'écriture** : on va étendre ce principe à ce «nombre algébrique»⁷ avec l'écriture littérale.

Ce nouvel objet en train de se construire est à cheval sur l'instant de sa création : il s'enracine dans son passé et s'oriente vers son futur et les potentialités de ce nombre algébrique⁸ : exemple générique, variable, inconnue, paramètre...

Une autre objet voit, lui, s'élargir son potentiel de sens : l'égalité. Le travail de détricotage entrepris aura comme prolongement possible, en passant par l'objet «équation», la création de nouveaux nombres : les nombres négatifs⁹.

Dans le cas de démonstrations futures que rencontreront les élèves, le passage par «l'exemple générique» permettra l'établissement d'une preuve rigoureuse. Insister sur la véracité de la relation pour n'importe quel nombre prépare l'élève aux nombreuses situations qu'il va rencontrer où il ne devra pas singulariser un cas plus qu'un autre... sauf quand il s'agira justement de trouver un (des) nombre(s) particulier(s)... au moyen du traitement d'une équation.

Du point de vue de la formation des concepts, l'exploration de relations entre quantités (par dépassement du seul comptage ou calcul, autrement dit de leurs connaissances antérieures, elle oblige à les percevoir de manière tout à fait nouvelle) favorise une approche plus théorique et donc le développement d'une «pensée abstraite».

Le travail de comparaison des différentes configurations d'une même situation conduit les élèves, pour convaincre ses partenaires par exemple, à formuler une phrase prenant en compte la totalité des configurations, cette dernière s'instituant en relation.

Avec 3052 cercles, la «représentation algébrique» en train de se cristalliser est appliquée dans ce cas pour lequel une vérification empirique est trop coûteuse.

En fonction des classes des questions annexes se font jour. Par exemple, «la différence du double d'un nombre et de un» et «la somme d'un nombre et de la différence de ce nombre avec un» sont-ils le même nombre ? Ce type de question, en focalisant sur la structure d'un nombre non

⁷ «L'objet conduit au signe.» I.Meyerson (Les fonctions psychologiques et les œuvres)

⁸ L'algèbre n'est pas une arithmétique généralisée : ce «nombre algébrique» oblige à penser différemment, du fait justement de ses potentialités dont ne dispose pas le «nombre arithmétique».

⁹ «La limitation opposée à l'accomplissement des opérations indirectes (soustraction et division) est chaque fois devenue la cause véritable d'un acte nouveau de création : ainsi ont été créés par l'esprit humain les nombres négatifs et les nombres fractionnaires.» R.Dedekind

calculable «chiffrement», concourt au développement de l'attention volontaire et donc globalement des fonctions psychiques supérieures.

L'activité 2 est donnée en travail de groupe avec une demande supplémentaire : proposer au moins deux manières d'exprimer le nombre de cases peintes en fonction du nombre de cases sur la longueur. Le passage de l'enseignant dans les groupes consiste à s'assurer que l'énoncé est bien lu et que la nouvelle demande est bien prise en compte.

Les élèves ne disposent toujours pas de l'écriture littérale à ce moment de la séquence.

La deuxième question continue d'interpeller les élèves. Quelques exemples d'échanges :

«on ne peut pas savoir puisqu'on ne connaît pas le nombre de cases» - «que veut dire quelconque ?» - «si la longueur est de 14... combien de cases ?» «il n'y a qu'à compter» «oui, mais si c'est 32 ?» «... et si c'est 3000... ?» - « la largeur reste pareil...» - «on ne connaît pas l'autre nombre» - «on pourrait prendre 11 par exemple» (On reconnaît là un cas d'exemple générique - par un effet de type métonymie, qu'il est relativement fréquent de trouver en classe tant que les élèves n'ont pas atteint un degré de généralisation suffisant au niveau du calcul algébrique).

Il est nécessaire dans chaque groupe d'amener les participants à verbaliser correctement l'énoncé des relations trouvées pour lesquelles les élèves ont fait preuve d'imagination (quelquefois jusqu'à six manières de décrire le nombre de cases peintes en sus du comptage). Comme l'écriture en français n'est pas des plus simple, on voit se produire un travail sur la structure des nombres en jeu (le produit de la somme de..., la somme du produit de...) et l'apparition d'abréviations pour nombre de cases sur la longueur, nombre de cases sur la largeur... (une forme «d'algèbre syncopée» comme on en trouve dans l'histoire de l'évolution de l'algèbre [algèbre de Diophante], germe de notre écriture littérale).

La mise en commun est un moment important : chaque groupe va présenter les différentes manières qu'ils ont définies. Chaque élève-récepteur doit alors faire l'effort d'attention et de compréhension de la phrase énoncée; des débats nourris se produisent alors. C'est le moment où l'enseignant indique que l'on va recenser toutes les propositions dans un tableau récapitulatif mais en reprenant des écritures mathématiques comme ci-dessous. Par contre, à chaque fois, l'élève aura à lire «correctement» la relation et à l'expliquer éventuellement à ses camarades.

manières de «lire» le problème	pour nombre de cases sur la longueur = 6	pour nombre de cases sur la longueur = 7	pour nombre de cases sur la longueur = ...
[1] par comptage	18	20	
[2]	$\text{nbre cases} = 6 \times 5 - 4 \times 3$	$\text{nbre cases} = 7 \times 5 - 5 \times 3$	
[3]	$\text{nbre cases} = (6+5) \times 2 - 4$	$\text{nbre cases} = (7+5) \times 2 - 4$	
[4]	$\text{nbre case} = 6 \times 2 + 3 \times 2$	$\text{nbre case} = 7 \times 2 + 3 \times 2$	
[5]	$\text{nbre case} = 6 \times 2 + 5 \times 2 - 4$	$\text{nbre case} = 7 \times 2 + 5 \times 2 - 4$	
[6]	$\text{nbre case} = 6 \times 5 - 12$	$\text{nbre case} = 7 \times 5 - 15$	

Les écritures sont analysées, commentées... des rapprochements se font.

Par exemple entre les écritures [2] et [6] : 4×3 est-il «plus parlant» que 12, en particulier si l'on veut compléter le tableau dans la dernière colonne pour un nombre de cases de 34 ?

Autre remarque qui est apparue : le premier terme de la différence des écritures dans les variantes [3] et [5] est logiquement le même nombre (ce raisonnement peut se mener assez facilement)... l'idée de distributivité n'est pas loin.

Les échanges autour de ce tableau sont différents dans chaque classe en fonction des différentes manières trouvées, les détours ne sont pas les mêmes mais globalement les remarques convergent à la fin.

À ce stade, l'écriture littérale est introduite à partir de la discussion avec les élèves : comment donner une écriture à un nombre qui n'a pas de «valeur chiffrale» fixe tout en permettant des calculs comme en calcul chiffral ?

Les élèves sont ensuite invités à ré-écrire toutes les relations formulées «en langue naturelle» avec cette nouvelle écriture. Il est fondamental à ce niveau de faire discuter de l'apport de cette écriture en terme d'économie de moyens (facilité d'écriture, de lecture possibles) et de commencer de «petits» calculs littéraux.

En revenant à l'activité 2, en ajoutant un autre cas, celui où le rectangle a n cases sur sa longueur et en comparant l'ensemble du tableau, on fait continuer l'effort de focalisation sur la structure des nombres, ligne par ligne par exemple.

Comme prolongement, il est demandé aux élèves de reprendre sous forme d'expression littérale toutes les relations écrites dans l'activité 1.

La troisième activité doit permettre d'élargir la réflexion aux autres ensembles de nombres, de ne pas laisser croire que l'on ne peut travailler qu'avec les nombres entiers, de lier géométrie et algébrique, de passer du discret au continu, de poursuivre l'effort de distinction entre «ce qui varie» et «ce qui ne varie pas». Un complément possible est la construction manuelle de différentes configurations de la figure ou l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour «étirer» la figure.

Maintenant que le système d'écriture littérale commence à être utilisable par les élèves, il semble pertinent de faire mener une réflexion sur la relation «signe» et «objet» représenté. Autrement dit que la forme que l'on donne au signe n'est pas autonome par rapport à la signification de l'objet. C'est à cela qu'est destinée l'activité 4.

L'objectif est de faire analyser et comparer l'écriture littérale donnant la mesure du périmètre de la figure à partir de la mesure de la longueur du côté du petit carré et celle à partir de la mesure de la longueur du côté du grand carré.

L'enseignant va amener les élèves à écrire ces deux égalités en nommant P la mesure du périmètre et a la mesure de la longueur du côté, pour arriver à les mettre côte à côte.

On obtient donc

$$P = 6 \times a + 4$$

$$P = 6 \times a - 2$$

qui semble révéler une contradiction.

On peut à cet instant demander s'il est possible de s'assurer de la vérité de ces deux égalités. C'est à dire que dans le premier cas la mesure du périmètre est bien supérieure de 4 unités à ce que serait la mesure du périmètre de deux petits carrés accolés et dans le second cas que la la mesure du périmètre est bien inférieure de deux unités à ce que serait la mesure du périmètre de deux grands carrés accolés. Retour au géométrie avec manipulation de segments au tableau qui arrive à convaincre les élèves.

La place est maintenant laissée sur la lecture de ces deux égalités et il ressort très vite qu'il est incontournable pour ce type d'écriture de bien préciser ce qu'est le nombre a .

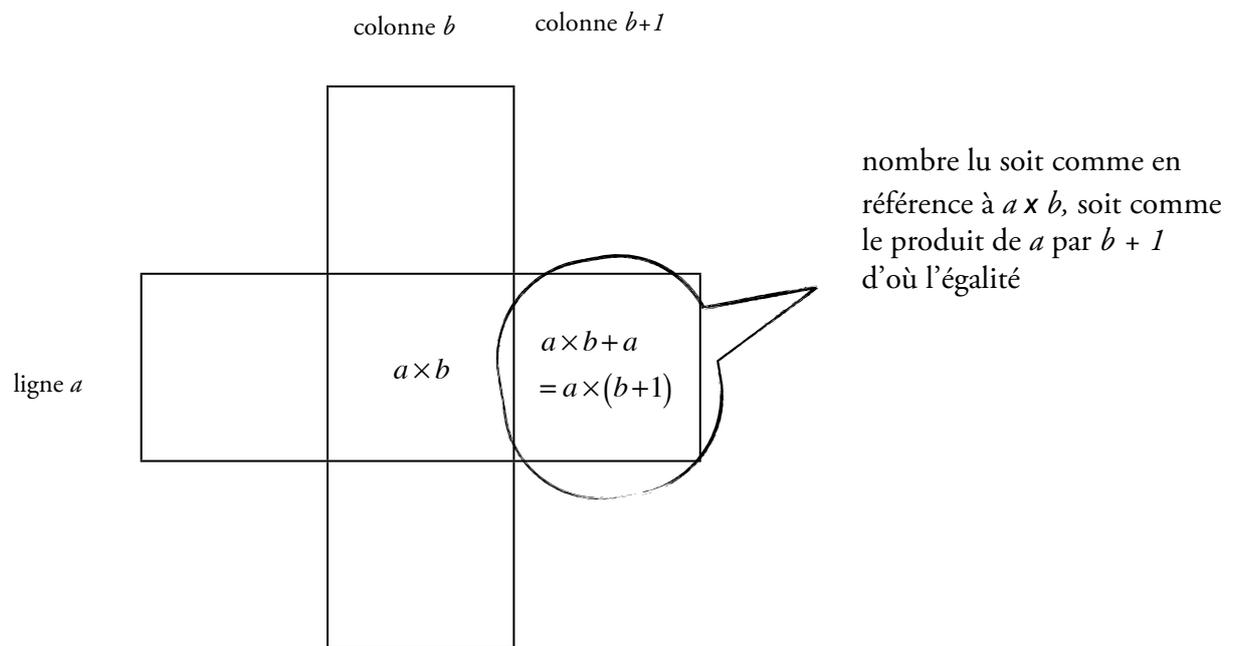
Dans l'activité 5, en imposant aux élèves de travailler «sans calcul»¹⁰, notre intention était de faire manipuler les nombres, au départ en écriture «chiffrale», de manière plus algébrique en travaillant sur l'aspect structural et la décomposition. Une comparaison identique à celle

¹⁰ Définition travaillée avec les élèves : Calculer un nombre, c'est écrire ce nombre sous une forme adaptée au problème dans lequel il intervient. Si le problème est seulement de calculer un nombre, calculer ce nombre c'est l'écrire sous sa « forme réduite », c'est-à-dire la forme qui nécessite le moins de signes possible pour l'écrire.

demandée pour la première égalité va être menée dans chacun des cas suivants et va provoquer l'utilisation du calcul littéral.

Il semble ici particulièrement intéressant de faire «lire» chaque nombre à l'intérieur d'une croix de différentes manières

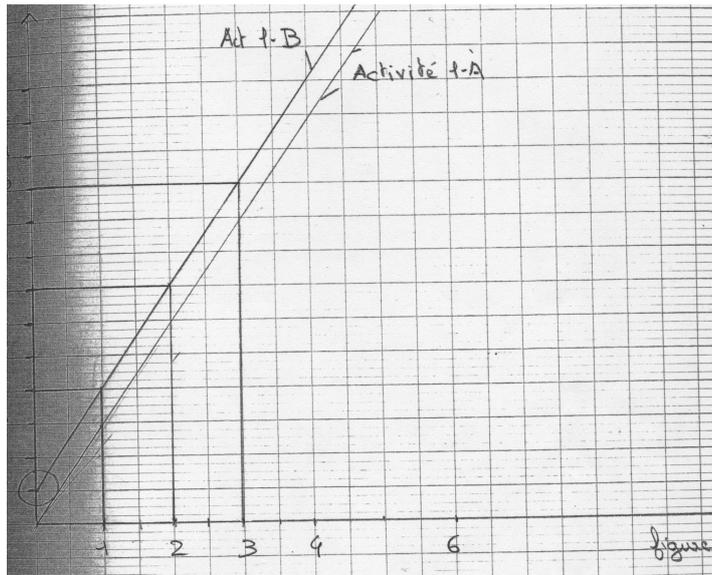
À partir de l'exemple ci-contre, qui concerne le cas «le plus général», on peut faire effectuer plusieurs calculs littéraux et faire accéder aux propriétés des nombres et des opérations.



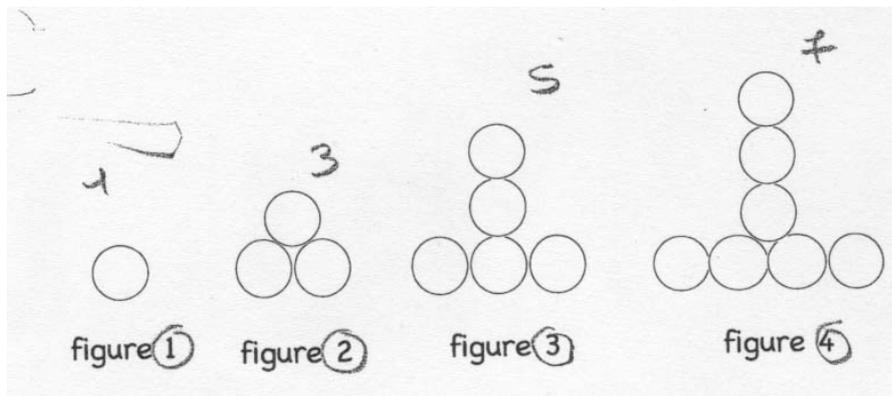
nombre lu soit comme en référence à $a \times b$, soit comme le produit de a par $b + 1$ d'où l'égalité

• Quelques travaux d'élèves ...

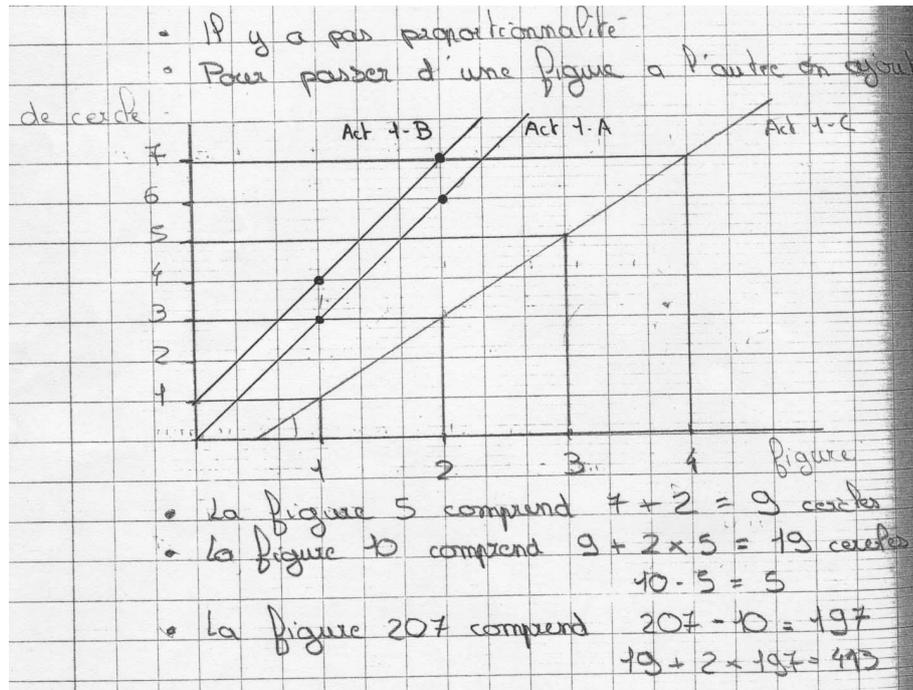
Activité 1



• On sait qu'il n'y a pas proportionnalité.
 • On sait que pour l'activité 1-A on multiplie le nombre de la figure par 3.
 • Comme on remarque que dans les deux activités on passe d'une figure à l'autre en ajoutant comme pour l'activité B la figure 1 = 4 cercles pour l'activité A la figure 1 = 3 cercles.
 • Donc pour passer d'une figure à l'autre multiplie le nombre de la figure par 3 et on ajoute.
 • Comme $6 \times 3 + 1 = 18 + 1 = 19$ donc la figure comprend 19 cercles.
 • De la même manière $10 \times 3 + 1 = 31$ donc $10 = 31$ cercles.
 • $199 \times 3 + 1 = 597 + 1 = 598$



Activité 1



- On ne peut pas savoir car les figures 1, 2, et 3 ne sont pas proportionnelles entre elles.
10 et 7 ne sont pas des multiples de 6.

- Vu que le numéro de la figure est le nombre de cercles ne sont pas proportionnelles on ne peut pas trouver le résultat, le nombre de cercles pour les figures.
On peut seulement faire la proportionnalité sur entre une figure et une autre.

- La figure 6 comprend 19 cercles au total ($4+3=7$; $7+3=10$ ) Il y a 3 cercles de différence entre les figures.

- La figure 10 comprend 30 cercles au total.

~~• La figure 166 comprend cercles au total~~

- Pour trouver le nombre de cercles total pour la figure 166, il faut mettre en place une relation : num. de la f. $\times 3 + 1$
donc $(166 \times 3) + 1 = 498 + 1 = 499$.

- Le nombre de cercle = $3 \times$ le num. de la f. $+ 1$.

$1 = 1 + (2 \times 0) = 1$	$1 \times 2 - 1$
$2 = 1 + (2 \times 1) = 3$	$2 \times 2 - 1$
$3 = 1 + (2 \times 2) = 5$	$3 \times 2 - 1$
$4 = 1 + (2 \times 3) = 7$	$4 \times 2 - 1$
$5 = 1 + (2 \times 4) = 9$	$5 \times 2 - 1$
$10 = 1 + (2 \times 9) = 19$	$10 \times 2 - 1$
$207 = 1 + (2 \times 206) = 413$	$207 \times 2 - 1$

• le nombre de cercle pour la figure 5 est de $1 + (2 \times 4)$ soit 9 cercles
 • le nombre de cercle pour la figure 10 est de $1 + (2 \times 9)$ soit 19 cercles
 • le nombre de cercle pour la figure 207 est de $1 + (2 \times 206)$ soit 413 cercles
 le nombre de cercles est $1 + 2 \times (\text{la figure} - 1)$

Activité 1 - c

* GRAPHIQUE

le nombre de cercle d'une figure est égal au n^2 de la figure $\times 2 - 1$

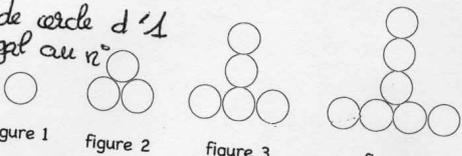
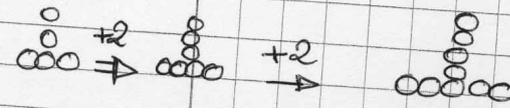


figure 1 figure 2 figure 3 figure 4

- Combien de cercles comprend au total la figure 5 ? Faire un dessin.
- Sans faire de dessin, combien de cercles comprend au total la figure 10 ?
- Combien de cercles comprend au total la figure 207 ?

• la figure 5 contient 9 cercles.
 le nombre de cercles dans la figure 5 est de 9 cercles.



Il n'y a pas proportionnalité entre la longueur et le nbr de cases peintes car on ne peut pas passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant

$$\begin{matrix} \uparrow 1 & \left(\begin{matrix} 6 & \longrightarrow & 18 \\ 7 & \longrightarrow & 20 \end{matrix} \right) & \downarrow 2 \end{matrix}$$

Il y a une relation entre la longueur et le nbr de cases peintes :

longueur $\times 2 + 6 =$ nbr de cases peintes

Le nbr de cases peintes est égal au double de la longueur et en ~~ajoutant~~ ajoutant 6

Le nbr de cases peintes est 28 pour la figure 11.

$11 \times 2 + 6 = 28$

" " " " " " " " " " " " 19.

$19 \times 2 + 6 = 44$

$(\text{longueur} \times 2 + \text{largeur} \times 2) - 4 = \text{périmètre}$

$(5 \times 2) + (6 \times 2) - 4 = 10 + 12 - 4 = 22 - 4 = 18$

Pour le 1^{er} cas le nombre de cases est 18

$(5 \times 4) + (7 \times 2) - 4 = 20 + 14 - 4 = 34 - 4 = 30$

Pour le 2^e cas le nombre de cases est 20

$(5 \times 8) + (11 \times 2) - 4 = 40 + 22 - 4 = 62 - 4 = 58$

$(5 \times 2) + (19 \times 2) - 4 = 10 + 38 - 4 = 48 - 4 = 44$

le nombre de cases pour la figure 11 est 28 et pour 19 = 44

méthode : largeur $\times 2 +$ longueur $\times 2 -$ les 4 angles.

$(5 \times 8) + (28 \times 2) - 4 = 40 + 56 - 4 = 96 - 4 = 92$

$(1 \times 2) + (1 \times 2)$

Si la longueur est 28 le nombre de cases peintes est 92.

⑥ Le nombre de case peintes est 22 car : on additionne 5 et on fait le produit onze par deux = vingt-deux.

⑦ Le nombre de case peintes est : on la somme des 19 par 2 et de quarante-quatre

⑧ longueur = 8. le nombre cases peintes est : vingt et un car la somme de cinq et de six puis le produit de 3 par égal à dix-huit

Le nombre de case est sur la longueur $\times 2 +$ nombre longueur = 2

Le nombre de cases peintes est égal à la différence du produit du nombre de cases sur la longueur par le nombre de cases sur la largeur (et) du produit de la différence du nombre de cases sur la longueur et de 2 par la différence du nombre de cases sur la largeur et de 2. [1]

Le nombre de cases peintes est égal à la différence de somme du produit du nombre de cases de la long par deux (2) et du produit du nombre de cases de la largeur par 2 et de 4. ?

Le nombre de case peintes est égal à la différence de la somme du nombre de cases sur la longueur et du nombre de case sur la largeur par 2 est de 4. ?

Le nombre de case peintes est égal au produit de la différence de somme du nombre de cases de la l

• Le nombre de cases peintes est égal à la somme du produit de cases sur la longueur par 2 et du nombre de cases sur la largeur par 2, à la quelle on enlève 4. [1]

• Le nombre de cases peintes est égal à la différence du produit du NC longueur par NC largeur (et) du produit du NC longueur moins 2 par 3. [2]

• Le nombre de cases peintes est égal à la différence du produit de la somme du NC longueur et du NC largeur par 2 et de 4. [3]

1^{er} cas 1) Le nombre de case peintes en bordure du rectangle est de 18.
 $5 \times 2 = 10 + 5 \times 2 = 20 - 4 = 18$ cases peintes.
 Le nombre 2 vient que à chaque extrémité il y a le même nombre de cases peintes. Le nombre 4 vient que si on fait pas moins 4 on compte les cases peintes dans les angles de chaque rectangle.

2^{ème} cas 2) Le nombre de case peintes en bordure du rectangle est de 20.
 $5 \times 2 = 10 + 7 \times 2 = 24 - 4 = 20$ cases peintes.

3) Le nombre de case peintes alors que la longueur est de 28.
 $5 \times 2 = 10 + 14 \times 2 = 32 - 4 = 28$ cases peintes.

Le nombre de case peintes alors que la longueur est 19 est de 44.
 $5 \times 2 = 10 + 19 \times 2 = 48 - 4 = 44$ cases peintes.

3) Le nombre de case peintes alors que la longueur est 386.
 $5 \times 2 = 10 + 386 \times 2 = 782 - 4 = 778$ cases peintes.

[A]

L'approche historico-socio-culturelle prend ses sources dans les travaux de différents auteurs au premier rang desquels Lev Vygotski mais également Henri Wallon. Il n'est pas ici le lieu de développer ces travaux¹¹ tellement ils sont riches en prolongements possibles pour l'éducation. Nous reprendrons seulement quelques idées-forces sur lesquelles s'appuie la séquence proposée. Il est également nécessaire de préciser que toutes ces idées forment un tout, qu'il n'est pas possible de les lire de manière disjointe (ce serait d'ailleurs en perdre tout l'intérêt). Nous nous contenterons d'exposer quelques points et comme la lecture que nous faisons de ces idées-forces est forcément réductrice nous renverrons le lecteur pour une étude plus approfondie aux œuvres fondatrices suivantes

- Pensée et langage de Lev Vygotski qui constitue l'ossature de cette conception, en particulier les chapitres 6 et 7
- Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures de Lev Vygotski
- De l'acte à la pensée de Henri Wallon

D'une manière générale, pour l'approche historico-socio-culturelle (ASHC), le développement des fonctions psychiques supérieures (extension de la pensée et de la conscience) est social et découle de modifications des fonctions psychiques à partir de l'appropriation/intériorisation des différents types «d'outils» culturels construits par les générations précédentes. Il s'ensuit que l'enseignement-apprentissage doit précéder le développement (c'est un des points qui différencient cette approche des autres conceptions d'éducation).

Pour citer Bernard Schneuwly : «Le développement à l'âge scolaire n'est possible que grâce à l'enseignement». L'enseignement, étant conçu sur une base disciplinaire, doit être systématique. Il doit susciter la réflexion, la prise de conscience et le contrôle dirigé de sa propre activité psychique.

[B]

La formation des concepts

Vygotski distingue les concepts quotidiens («appris sur le tas» - ils ont une portée locale - ils sont contextualisés - ils sont relativement isolés les uns des autres) et les concepts scientifiques (ils ont une portée générale - ils forment des systèmes - ils se créent avec le concours essentiel du langage).

¹¹ On peut noter que ces travaux ne forment pas un Tout définitif, monolithique, dogmatique. Ce serait d'ailleurs faire un énorme contre-sens que de le croire. Du fait, en particulier, de la disparition prématurée de Vygotski, de la nature même de la réflexion menée, de nombreuses pistes sont encore à suivre apportant des éléments de réponse comme en témoignent les nombreuses publications actuelles.

Il convient de citer un domaine en pleine expansion, prometteur, quasi-inexistant au moment où sont publiés les ouvrages cités plus haut, qui peut éclairer l'AHSC, celui de la neurobiologie : on lira avec profit les publications de Antonio Damasio et Gerald Edelman.

Autrement dit : les concepts spontanés/quotidiens peuvent être compris comme une forme de généralisation, quasi-exclusivement empirique, des expériences quotidiennes, sans enseignement systématique alors que les concepts scientifiques doivent être entendus comme généralisation de l'expérience de l'ensemble de l'humanité - les sciences au sens large embrassant toutes les connaissances humaines.

L'école est le lieu où les concepts scientifiques sont en cours d'appropriation / de constitution. Bien évidemment l'appui sur les autres concepts est incontournable.

Pour faire suite à ce qui est écrit précédemment, certains traits distinctifs prennent plus de force. Parmi les objets une différenciation s'opère, une «première» généralisation a lieu puis l'abstraction. On peut dire que le concept est une synthèse de «pensées».

L'idée d'un concept «isolé» n'a pas de sens. Les concepts sont toujours en perpétuel développement chez chaque individu, insérés dans un système de concepts. Le développement de cette «structure de concepts» modifie la nature de la pensée de l'élève qui en retour accroît le développement de sa «structure de concepts». Ceci permet d'expliquer pourquoi l'enseignement de notions isolées n'a pas de sens.

Par exemple, la notion de nombre ne devient concept que reliée aux notions d'opérations, d'égalité..... (à leur tour «concepts se développant»).

Classiquement, on distingue deux catégories de «connaissances», les connaissances déclaratives ou structurales (principes, définitions, propriétés...) et les connaissances procédurales (méthodes, techniques de traitement, de résolution...). Très souvent, l'entrée dans l'algèbre se fait pour les élèves par l'acquisition de connaissances procédurales; on remarque alors que ces savoirs procéduraux sont dépourvus de sens et ne sont pas transférables comme le constate entre autres Bruer «nombreux sont les élèves qui ne savent pas pourquoi les procédures mathématiques qu'ils apprennent fonctionnent.».

L'autre manière qui consiste à faire travailler l'élève uniquement sur les connaissances déclaratives n'est pas satisfaisante non plus, ce qu'avait déjà anticipé Vygotski en affirmant que «la difficulté avec les concepts scientifiques tient à leur verbalisme»¹².

L'enseignement systématique de savoirs «combinés», déclaratifs et procéduraux, semble très prometteur, si l'on en juge à partir des études à notre disposition (on peut citer par exemple celles de Jean Schmittau et Anne Morris - *The Development of Algebra in the Elementary Mathematics*).

¹² On peut rapprocher ce point avec l'évolution de la pensée L.Wittgenstein qui de «le signifié coïncide immédiatement ou médiatement, à travers un concept, avec la chose désignée par le mot» de ses premières recherches en arrive à écrire dans ses derniers textes que «la garantie du fait que les formes ont un signifié se trouve dans l'usage que l'on fait d'elles dans les communautés historiques particulières».

Cet enseignement combiné met en évidence une troisième catégorie de «connaissances», que l'on pourrait appeler «capacités de recontextualisation» qui sont celles qui permettent à l'élève de savoir pourquoi utiliser telle ou telle connaissance et comment les utiliser. Ces connaissances ne sont pas «inscriptibles noir sur blanc», elles sont individuelles, se construisent peu à peu en fonction du système de significations propre au sujet.

Il est intéressant de remarquer que pour Vygotski, l'algèbre est un exemple prototypique de formation d'un concept pour un élève (Pensée et langage - page 392 et suivante) : les connaissances en construction en algèbre se fondent sur les connaissances arithmétiques qui en retour, du fait même de ces nouvelles acquisitions se modifient, se transforment. L'effet de ces transformations/réorganisations dynamiques sont une plus grande autonomie de fonctionnement pour l'élève. Les nouveaux concepts scientifiques opérants agissent en médiateur de sa pensée et étendent sa capacité de résolution de problèmes.

[C]

La notion de pensée par complexe

Ce type de pensée se trouve chez l'enfant mais également chez l'adulte. On retrouve un tel fonctionnement lorsque qu'un élève aborde un nouveau «domaine conceptuel» comme l'algèbre par exemple.

Cinq complexes (associatif, collection, en chaîne, diffus, pseudo-concept) sont définis par L.Vygotski mais ce n'est pas le lieu, ici, de les distinguer. Dans ce type de «pensée» l'individu lors de «classements» réunit des objets concrets hétérogènes. Les liaisons se font de manière empirique et de manières très diverses. Tous les traits distinctifs sont «à égalité». Le complexe n'est pas supérieur à ses éléments. Ce qui signifie que cette «pensée» n'est pas totalement opérante pour résoudre des problèmes tout en ayant une certaine forme de cohérence.

Le pseudo-concept permet de comprendre et d'expliquer certains phénomènes observés en classe. C'est un pont entre la pensée concrète et la pensée abstraite. D'où cette dualité : intérieurement c'est un complexe et extérieurement cela ressemble à un concept. Il y a là une difficulté pour l'enseignant de distinguer pensée par complexe et pensée par concept. Autrement dit, lors «d'expressions» utilisées en classe ce sont les mêmes objets pour l'élève et le professeur, le même référent, mais ils n'ont pas la même «signification opérante» dans l'activité en cours.

On peut donc penser qu'il est important de réduire le plus possible la part d'implicite dans le dialogue professeur/élève (sans toutefois arriver à tout expliciter, ce qui aurait pour effet malheureux de supprimer ce «jeu» - au sens mécanique - fondamental dans la construction des significations propres à chacun). La verbalisation dans différents registres (symbolique, langue naturelle, graphique...) est une piste essentielle. En algèbre, les propriétés qui interviennent ne sont pas toujours explicitées et leur énoncé est rarement écrit.

La présence d'un concept et la conscience d'un concept ne coïncident pas.

Autrement dit, un enseignant peut présenter une nouvelle notion à un élève, ce nouveau concept est là; il faut que cet élève l'intègre à sa «structure de concepts» pour que ce concept devienne «opérant».

La verbalisation (langage oral et langage écrit très complémentaires) est un puissant moyen pour y arriver. On trouve là toute l'importance du rôle fonctionnel de la signification de l'«énoncé verbal» dans l'acte de la pensée.

Le concept «pour autrui» se développe avant le concept «pour soi». Les idées ne prennent toute leur consistance que lorsqu'elles rebondissent sur celles des autres.

Dans l'activité proposée, il y a obligation pour chaque élève de composer avec un ou des partenaires puis avec l'ensemble des groupes.

La diversification des situations soumises aux élèves leur permet de mettre «en contact» un certain nombre de notions, de créer des liens entre ces notions, d'éprouver ces notions dans différents contextes. Ces liens se croisent à des nœuds - ces nœuds sont les «concepts en développement». Très schématiquement, on peut dire que plus il y a de liens, plus les «concepts en développement» sont opérants.

[D]

Un point crucial de l'approche historico-culturelle est le concept de médiation : par les «instruments psychologiques» qui modifient radicalement la relation de l'homme à lui-même et à son environnement social, par la médiation sémiotique qui permet un développement conjoint de la pensée et du langage, par la médiation humaine (entre élèves ou entre élève et enseignant).

L'amplification des fonctions psychiques supérieures (attention, volonté, mémoire, formation de systèmes de concepts, langages écrits...) procède de la différenciation des fonctions antérieurement indifférenciées. L'intégration de «signes» re-structure leur fonctionnement et leur forme.

De ce fait, les «instruments psychologiques» ne sont pas seulement des prothèses (avec une seule fonction d'aide) mais sont des «transformateurs» de l'individu.

Le langage comme outil de construction et de maîtrise de la pensée
Les interactions entre élèves et entre élève et professeur provoquent des réorganisations mentales.
L'édification de la «pensée» se fait de manière interpersonnelle puis intrapersonnelle.

Quand on est conscient de l'existence ce processus, il n'est pas rare de le rencontrer en classe : lors de débats, il arrive qu'un élève s'approprie l'idée d'un autre et que l'on entende « toi, tu dis ça [phrase]

mais.....» et en même temps on constate la transformation de la pensée du locuteur... en une sorte de réflexion «par contradiction».

On peut rajouter ici l'apport d'auteur comme Bakhtine sur l'autre fonction du langage : la fonction discursive. Pour les enseignants, les échanges entre élèves sont aussi le moyen d'obtenir des informations sur l'état de leur «développement».

[E]

La notion de Zone de Proche Développement (ZPD) est certainement celle la plus utilisée parmi toutes celles contenues dans les travaux de Vygotski mais également celle qui a le plus grand nombre d'interprétations.

Revenons au texte : «La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un est précisément le symptôme le plus notable qui caractérise la dynamique de son développement et de la réussite de son activité intellectuelle. Elle coïncide entièrement avec sa ZPD.» (Pensée et langage - page 353)

Pour nous, elle n'est pas une «zone» dans un sens géographique. Citons Françoise Savioz : «sous la locution zone de proche développement, est souvent entendu un aspect morphologique du développement intellectuel, voire quasi topologique ; ceci peut découler de sa traduction par «zone proximale de développement», formulation qui fait porter l'accent logique sur le mot "zone" (une étendue), plutôt que sur le mot "développement" (une dynamique) ; mais peut-être aussi, cette acception s'adapte-t-elle au flou qui entoure la notion d'âge mental».

Elle n'indique pas qu'il y aurait des situations d'enseignement «parfaites».

Elle ne signifie pas non plus qu'il y aurait pour chaque élève un «potentiel», vu comme «caractéristique intrinsèque à apprendre» qu'il suffirait de déclencher (cette conception est proche du modèle biologique avec la métaphore du «germe à la plante» et de l'enseignant comme jardinier).

En accord avec le modèle de développement d'un individu exposé par Vygotski, la ZPD concourt à révéler les fonctions psychologiques en cours de maturation, à en connaître leur état et à trouver les médiations qui vont favoriser leurs extensions et transformations.

La ZPD peut être vue comme espace-temps d'une tension entre l'extérieur et l'intérieur d'un élève, «croisement entre deux logiques, l'une d'enseignement, l'autre de développement» pour reprendre les propos de B.Schneuwly.

[F]

Concernant tout ce qui est lié à l'objectivation, nous renvoyons aux différents articles de Lluís Radford sur la «Théorie de l'objectivation».

Nous compléterons par ce que dit Lluís Radford dans «Semiótica cultural y cognición - Universidad del Chiapas - Mexique - juillet 2004» :

« Soit A une activité avec un objectif O. Pour atteindre l'objectif O, les individus mobilisent certains concepts $C_1, C_2 \dots$. Une situation usuelle est celle dans laquelle pour atteindre O, un nouveau concept \hat{C} est introduit. Avant son apparition, \hat{C} se rencontre comme simple «chose mathématique». Cette «chose mathématique» est une forme confuse, simplement présentée comme mathématisable.

Utilisant la notion de ZPD nous pouvons dire que cette «chose mathématique» est un élément de la ZPD à un moment donné. L'objectivation du savoir est de passer de la «chose mathématique» au concept \hat{C} .» (*traduction par nous-mêmes*)

«Exactement comme nous disons qu'un corps est en mouvement et non qu'un mouvement est dans un corps, nous devrions dire que nous sommes en pensée et non que les pensées sont en nous.» C.S..Peirce

Bibliographie

- Groupe Pédagogie Collège (2011), Éléments 1, IRES de Toulouse (<https://gpc-maths.org/>).
- Groupe Pédagogie Collège (2013), Éléments 2, IRES de Toulouse (<https://gpc-maths.org/>).
- Artigue M.; « L'intelligence du calcul », Le calcul sous toutes ses formes, Actes de l'Université d'été de Saint-Flour, 2005
- Bardini C., Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique, thèse de doctorat, 2003
- Baton B., Giot R., Noël Y., L'initiation à l'algèbre, Collection Documents du CREM n°3, 1997
- Bednarz N., Kieran C., Lee L., Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching, Kluwer Publishers, 1996
- Benard, D., « Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence », Repères-IREM, n° 47, 2002
- Booth I., Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, Petit x n° 5, IREM de Grenoble
- Chevallard Y., Le passage de l'arithmétique à l'algébrique (3 parties), Petit x n° 5, 19 et 23, IREM de Grenoble

- Condillac, La langue des calculs, Presses Universitaires de Lille, 1981
- Dziurla R., Semiotics of Play in View of the Development of Higher Mental Functions, Poznan University - Pologne
- Honclaire B., Faire de l'algèbre ou algébriser à douze ou treize ans, Collection Documents du CREM n°5, 1997
- Kieran C., Concepts associated with the equality symbol (*traduction du Groupe IREM Premier Cycle*), Educational Studies in Mathematics, 1981
- Kieran C., Booker G., Filloy E., Vergnaud G., Wheeler D., Cognitive processes involved in learning school algebra, Mathematics and Cognition, Cambridge UP, 1990
- Kieran C., Chalouh L., Prealgebra : the transition from arithmetic to algebra Research ideas for the classroom, MacMillan, 1993
- Kieran C., Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics Educator Vol.8, 2004
- Lebesgue H., De l'arithmétique à l'algèbre et à l'analyse mathématique, L'enseignement mathématique - Tome 2 - fasc.1-2, (1956)
- Marum, T., Isler, I., Stephens, A., Gardiner, A., Blanton, M., & Knuth, E. From specific value to variable: Developing students' abilities to represent unknowns - Proceedings of the thirty-ird Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2011
- MEN - Groupe National d'Équipes de Recherche en Didactique des Mathématiques, Algèbre et fonctions, 1998
- Radford L., Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts, ZDM, 2007
- Radford L., L'altérité comme problème éducatif, Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs, Université Laurentienne - Canada, 2009
- Radford L., Théorie de l'objectivation, Brochure Éléments 1, IREM de Toulouse
- Radford L., Bardini C., Sabena C., Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations, CERME 4, 2005
- Rouger-Moinier F., Quelques problèmes pour donner du sens à des règles de calcul littéral en troisième, Repères IREM n° 42, Topiques Éditions, 2001
- Savioz F., De la mobilité langagière en classe, avec l'exemple de l'apprentissage des mathématiques, Thèse de doctorat, 2007
- Schmittau J., Morris A., the Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov, e Mathematics Educator Vol.8, 2004
- Schmittau J., The Development of Algebraic Thinking. A Vygotskian perspective, ZDM Vol 35, 2005

Schneuwly B., Vygotski, l'école et l'écriture, Cahier de la section des sciences de l'éducation n°118, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation

Vygotski L., Conscience, inconscient, émotions, La Dispute, 2003

Vygotski L., Pensée et langage, La Dispute, 1997

Vygotski L., Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures, La Dispute, 2014

Wallon H., De l'acte à la pensée, Flammarion / collection Champs,

Wells G., Learning and teaching «Scientific Concepts» Vygotsky's ideas revisited, Conference, «Vygotsky and the Human Sciences», 1994