Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques:
la position “naïve” dans une théorie “réaliste”
contre
le modèle “anthropologique” dans une théorie “pragmatique” [1]

D’Amore B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 1, 17-46.

Bruno D’Amore

Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna, Italia

Facoltà di Scienze della Formazione Primaria
Libera Università di Bolzano, Italia
Freie Universität Bozen, Italien

Résumé. Dans cet article on analysera de différentes interprétations des termes “concept” et “objet” en Mathématique, dans l’histoire de la pensée philosophique, psychologique, et dans la toute récente acception “anthropologique”, en montrant qu’il est nécessaire d’adopter une théorie “pragmatique”.

Summary. In this article various interpretations of the terms "concept" and "object" in Mathematics are analysed, using the History of Philosophical Thought, Psychology, and the recent "anthropological" perspective, demonstrating how it could be necessary to enter into a "pragmatic" theory.

[1] Travail executé dans le cadre du Programme de recherche locale: *Recherches sur le fonctionnement du système élève-enseignant-savoir: motivations de la dévolution manquée*, avec des financements ex-60%.

1. Les concepts: terminologie courante, philosophique et littéraire.

On a écrit des oeuvres entières sur la nature des concepts, et des philosophes de premier plan se sont occupés de ce thème.[2]

Dans les dictionnaires de philosophie on en trouve des définitions qui se ressemblent assez; j'utiliserai la définition suivante, à caractère aristotélique, comme prototype: «En général, tout procédé rendant possible la description, la classification et la prévision des objets connaissables». Il faut remarquer que, selon cette acception:

- le concept est un processus, quelque chose donc de dynamique et non de statique;
- il peut exister un concept de n'importe quoi, des objets concrets (le concept de *table*) aux abstraits (le concept du *nombre 3*); des objets réels aux irréels, inexistants, imaginaires;
- il existe une différence entre *nom* et *concept*; il suffit de penser que des noms différents peuvent se référer au même concept.

À ce point, deux problématiques fondamentales s'imposent:

- la *nature* du concept
- la *fonction* du concept.

La question sur la *nature* du concept a eu, en philosophie, deux réponses différentes:

- le concept est l'*essence* même des choses, donc leur essence nécessaire (ce qui rend les choses comme elles sont) (malgré la présence de nombreuses différences, comme il est compréhensible, je dirais que cette idée, née avec Socrate et détaillée par Aristote, a eu nombre de disciples jusqu'à Husserl)
- le concept est le *signe* de l'objet, donc il se trouve en rapport de signification avec ce dernier (cette idée est d'origine stoïque, mais elle a été reprise pendant le Moyen Age, en remontant peut-être à Boétius et puis à Abelard; mais elle a été adoptée par les logiciens au début du vingtième siècle).

La question sur la *fonction* du concept a donné lieu à deux conceptions fondamentalement différentes:

- de type *final*: le concept a comme but celui d'exprimer ou de révéler la substance des choses;
- de type *instrumental*: et on a là quatre déterminations ultérieures:
  - le concept est un instrument pour *décrire* les objets et pour en permettre la *récognition* (cette définition a été anciennement adoptée par les Epicuriens et par les Stoïques; puis par certains philosophes de la science au vingtième siècle);

[2] Pour la rédaction de ce paragraphe 1, j'utiliserai essentiellement D'Amore (1999), chap. 6.

- le concept est un instrument pour *classifier* les concepts de la manière la plus *économique* possible (Mach, par exemple, adopte cette idée ; et là la question se déchaîne, selon laquelle les concepts scientifiques seraient des pseudo - concepts au sens de Croce);
- le concept est un instrument pour *organiser* les données de l'expérience de sorte à établir entre elles des *connexions* de caractère logique (cette idée a été acceptée par Duhem);
- le concept est un instrument pour *prévoir* (on peut citer à ce propos Dewey et Quine, par exemple, même si pour des raisons complètement différentes).

Une manière complètement différente de discuter philosophiquement des concepts est celle de l'école française et allemande. Il s'agit là moins de *définir* les concepts que d'essayer d'analyser *comment ils se forment*. Nous avons donc les précisons suivantes:

- concepts *à priori* ou concepts *purs* (pour utiliser la terminologie kantienne) : il s'agit des concepts qui ne dérivent pas de l'expérience: concepts d'unité, de pluralité et cetera (je trouve ces exemples justement chez Kant);
- concepts *à fortiori* ou concepts *empiriques*: ce sont des notions générales définissant des classes d'objets donnés ou construites; par exemple: le concept de *vertébré*, de *plaisir* et cetera ; ils concernent tous les individus appartenants à ces classes, et eux seulement, qu'on puisse les isoler (*un* chat, choisi dans la classe des vertébrés) ou non (comme il serait le cas pour *un* plaisir).

La position ci-dessus, par exemple, est celle qu'assume André Lalande dans son *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (PUF, Paris 1926).
Il est donc clair dans quel sens on peut parler, en tout cas, d'*intension* et d'*extension* d'un concept (au pire des cas il y aura des concepts à extension vide...).

Mais qu'est-ce que signifie *concept*, du point de vue étymologique? Son nom latin (*conceptus*, de *concipere*) se réfère clairement au résultat de l'acte de conception ou de génération de l'esprit pendant son détachement de l'immédiat des impressions sensibles et des représentations particulières et sa réalisation d'une signification universelle. Mais alors, on pourrait penser à une coïncidence avec le mot *idée*; ou bien on pourrait faire coïncider le concept avec le λόγοζ (le *verbum*, la langue mentale); ou encore avec le mot *notion*.
Chacune de ces interprétations (et d'autres encore) fut soutenue dans le temps par quelques éminents philosophes. Cela nous autorise à confondre dorénavant le *concept* avec l'*idée*, même si l'*idée* implique aussi une sorte de *représentation* tandis que le *concept* pourrait aussi en être immune.

Si on passe à des dictionnaires de langue commune, non philosophiques, édités dans des pays différents, on trouve par exemple:

- «Ce que l'esprit entend et comprend par le moyen de l'observation, de la réflexion et de l'induction»; parfois, outre à *entend* et *comprend*, on trouve aussi *arrive à des conclusions*;
- «La créature conçue - la chose imaginée et inventée par notre intellect»;
- «Pensée que l'esprit forge à partir de deux ou plusieurs idées, en remontant de l'individuel au général ; [mais aussi :] Idée, opinion»;
- «Pensée conçue par l'esprit; et de manière plus détaillée: idée, notion exprimant les caractères essentiels et constants d'une réalité donnée que l'on forge en saisissant tous ensemble (...) les différents aspects d'un objet déterminé qu'on tient à avoir à l'esprit dans leur complexe»;
- «Terme philosophique se référant en général au contenu logique ou à la signification des signes linguistiques et des images mentales».

Pour compléter cette introduction, il peut être intéressant de voir l'usage que quelques hommes de lettres font de ce terme. Dante Alighieri utilise *concepts* au sens de *conceptions* dans le *Paradis* 3-60; de nombreux hommes de lettres de différents pays du monde utilisent ce mot dans le même sens. Mais il est clair que les hommes de lettres utilisent ce mot de la manière la plus vaste possible, comme d'autre part, on fait, et il est juste de le faire, dans la langue commune, où *concept* signifie aussi *opinion*, *manière de voir, principe, projet, intention, estime, réputation* et cetera, selon la langue qu'on utilise.

Tout cela n'était que pour témoigner de l'énorme difficulté et des différences qu'on rencontre quand on s'engage à faire face de manière significative et rigoureuse à une problématique comptant parmi ses fondements un mot qu'on a employé des milliers d'années à définir.

2. Les concepts: terminologie psychologique, dans le domaine didactique.

Si nous voulons faire des progrès significatifs et spécifiques il faut chercher des textes qui conviennent davantage à l'esprit de notre recherche.
Je ne puis donc pas m'empêcher de rappeler que L. S. Vygotskij (1960, 1962) travailla longuement sur la formation des concepts, justement, dans le cadre d'un plus large domaine de recherche sur l'influence des causes sociales sur les différences psychiques entre les individus (influence du milieu sur les différences psychiques). Dans ce cas il parle justement de *développement conceptuel*, en distinguant essentiellement trois phases (mais sa théorisation est beaucoup plus complexe, je simplifie ici):

- *phase des accumulations syncrétiques*, caractérisée par le manque d'une référence objective stable;
- *phase de la pensée par complexes*; dans cette phase le sujet tend vers une manière de penser objective; le sujet reconnaît des connexions concrètes, mais non logiques ou abstraites;
- *phase conceptuelle*; dans cette phase le sujet opère en utilisant sa capacité d'abstraction.

Vygotskij consacra une attention particulière à la formation des concepts scientifiques, spécialement de type scolaire au cours de l'enfance, et il mit en évidence le lien que les enfants établissent entre ces concepts et les composantes concrètes et figuratives, longtemps avant de les établir avec des composantes logiques ou abstraites. Cette priorité parait nécessaire pour la "fondation" du concept elle-même. À propos de l'ordre de l'acquisition des concepts, Vygotskij (1962) fit une affirmation célèbre, apparemment paradoxale, selon laquelle les concepts scientifiques se développent *avant* les concepts spontanés; mais Vygotskij dit aussi: «si le programme fournit le matériau approprié»; en somme : la supposée nécessité enfantine de devancer la phase abstraite d'apprentissage par la phase empirique ne semble pas aussi nécessaire qu'on le croyait. [On reviendra sur les concepts scientifiques et sur Vygotskij dans **4.**].

Mais alors on peut mettre en discussion la position de J. Bruner (1964), celle de la célèbre triade des modes de représentation des concepts:

- *exécutif*
- *iconique*
- *symbolique*

qui, disons-le pour précision, se référait justement à la mathématique.

Prenons un exemple très célèbre: l'acquisition du concept de mesure par les enfants âgés de 3 à 5 ans; et mettons en juxtaposition les modalités de Piaget et celles d'un célèbre disciple de l'école soviétique : Gal'perin.

■ Dans la description de l'apprentissage spontané du concept de mesure qu'effectuent Piaget, Inhelder et Szeminska (1948), on propose à l'enfant des situations empiriques où on lui demande d'effectuer une mensuration, jusqu'à arriver à un concept abstrait, tout en respectant la théorie des étapes évolutives. Le comportement de l'enfant suivrait un *iter* très connu, et tenu toujours en grande considération à l'école maternelle et au cours du premier cycle de l'école primaire italienne: l'enfant effectue d'abord des mensurations spontanées avec des pseudo-unités de mesure, et on a là une prédominance de l'activité perceptive; ensuite il choisit plus attentivement l'unité de mesure, et il acquiert la capacité de réutiliser plusieurs fois l'unité; il aboutit finalement à la conscience de la conservation des grandeurs (et des mensurations). Comme on le voit la terminologie typiquement piagetienne est encore utilisée avec fréquence.

■ L'épreuve de Gal'perin (1969) lie davantage la mensuration à l'idée de chiffre en prenant appui entre autre, des idées fondationnelles de A. N. Kolmogorov. Le premier objectif est celui d'arriver à l'idée d'unité; puis au fait

que la mesure par rapport à une unité donnée est un chiffre dont on peut se souvenir même sans en connaître le nom, tout simplement en mettant de côté un petit morceau de bois ou un bouton chaque fois qu'on utilise une unité; à ce point on fait coïncider la mesure avec le nombre de fois où on a utilisé l'unité (l'exemple proposé est: remplir une carafe avec des verres d'eau pour en évaluer la capacité); et enfin identification et acceptation de la relativité du chiffre-mesure, par rapport à l'unité utilisée.
Il me semble que tout cela explique bien quel est l'acharnement et l'intérêt avec lesquels les plus célèbres théoriciens de l'apprentissage conceptuel se sont intéressés à ce sujet; et cela nous explique de plus en plus, au moins de manière implicite, ce qu'ils entendent avec *concept,* au moins dans le domaine de l'apprentissage cognitif.

3. Les concepts dans les processus d'enseignement et d'apprentissage.

Doit-on enseigner les concepts? *Peut-on* apprendre les concepts? Et encore: ces questions ont-elles du sens?
Ces dernières sont des questions-pivot, sur lesquelles il est nécessaire de réfléchir, et que quelques Auteurs traitent de manière trop hâtive ou trop naïve.
Cette problématique s'est développée aux environs des années '60, surtout dans les pays anglophones, dans le cadre du vaste mouvement international pour le renouvellement curriculaire qui a touché le monde entier. Cela a été provoqué très certainement par la grande revalorisation éducative des contenus de différentes disciplines, des sciences en particulier, et spécialement de la mathématique. Dans ce contexte, l'un des auteurs de ce virage à niveau mondial a été très certainement J. Bruner.[3] Cela porta par conséquent à un débat animé concernant le curriculum scolaire, surtout par rapport justement au secteur des sciences en général et de la mathématique en particulier.
Je vais résumer ce débat, en commençant par cette question, préliminaire aux questions précédentes: à *quoi* doit-on éduquer, quand on enseigne les sciences à l'école? Il y a deux réponses possibles:

- à la *méthode scientifique*: l'objectif est celui de faire acquérir une certaine maîtrise dans la méthodologie;
- à l'acquisition et à la maîtrise des *concepts essentiels* de la science.

Le débat n'était pas nouveau; la première réponse peut certainement se reconduire à la *méthode de l'intelligence* de John Dewey (1933), mais les années '60 témoignèrent d'un débat enflammé à l'intérieur duquel tous ceux qui

[3] Pour en comprendre la raison, voir Tornatore (1974), chap. 9.

promouvaient des idées didactiques assez bien construites[4] eurent un succès facile.
Dans ce débat s'insère bien un autre type de proposition, celle de Gagné (1965-1985) qui tend à séparer la didactique des concepts *concrets* de celle des concepts *abstraits*; le caractère concret et l'abstraction doivent être considérées par rapport à la qualité de référence des objets qu'on considère dans les concepts:

- s'il s'agit de concepts dérivés de l'observation empirique des objets, il s'agit de concepts concrets;
- s'il s'agit de concepts dérivés de définitions, et impliquant donc des relations abstraites, il s'agit de concepts abstraits.

Gagné élabore une théorie des hiérarchies d'apprentissage au sommet de laquelle, comme dernier point on trouve les concepts abstraits.
Cette idée des hiérarchies poussa nombre d'autres auteurs à l'idéation de hiérarchies similaires, en suivant d'autres paramètres; et en particulier je me réfère aux travaux de Klausmeier, Gathala et Frayer (1974) et Klausmeier (1979, 1980) qui divisent l'apprentissage des concepts dans l'école primaire en quatre niveaux:

- niveau concret: l'enfant reconnaît un objet qu'il a déjà vu dans la même situation;
- niveau d'identité: l'enfant reconnaît un objet qu'il a déjà vu, mais dans des conditions différentes;
- niveau de classification: l'enfant reconnaît que deux choses se ressemblent sous un certain aspect, et, en généralisant, il les classifie dans la même catégorie, même si les critères de classification ne sont pas clairs;
- niveau formel: l'enfant est capable de nommer la classe qu'il a obtenue au troisième niveau, c'est à dire qu'il est capable de nommer le concept sélectionné par les attributs qui lui ont permis la classification.[5]

Il semble donc que cette étude sur la manière de développement des concepts concerne surtout l'âge 3-10. Il sera nécessaire de tresser cette recherche avec la recherche didactique.
Le développement des concepts et l'apprentissage sont donc très liés entre eux.
Peut-on arriver à penser que le moment culminant de l'ontogenèse est l'organisation de la connaissance par catégories? Luria (1982) soutient cette thèse, et les méthodes utilisées pour effectuer cette organisation sont les suivants à son avis:

- méthode de la définition du concept: on demande de répondre de manière spontanée et libre à des questions du genre : «Qu'est-ce que c'est?» ; les

[4] Sur ce débat, mais de manière plus approfondie, voir Pontecorvo (1983, pages 262-263).
[5] Des clarifications ultérieures sur les liens entre les niveaux de Klausmeier, les phases de Gagné et les stades de Piaget, ainsi que des exemplifications d'applications didactiques, peuvent être retracées dans Pontecorvo (1983).

réponses peuvent être spécifiques, c'est à dire référées à des particularités, ou de type catégoriel;
- méthode de la comparaison – différentiation: on donne deux objets différents, mais avec quelques caractéristiques en commun et on demande d'identifier les caractéristiques communes et les différences;
- méthode de la classification: on donne plusieurs objets et on demande d'en classifier un sous-ensemble, formé par les objets ayant une caractéristique commune;
- méthode de la formation des concepts artificiels: on revient à Vygotskij; l'expérimentateur a tout prédisposé pour arriver à un concept bien établi auquel on voulait parvenir.

Toutefois il faut dire qu'on ne peut qu'être d'accord avec Cornu e Vergnioux (1992, pages 55-56) quand ils affirment que l'apprentissage de un concept isolé est impossible, car chaque concept est mis en corrélation, joint à des autres. On dois parler alors de trames conceptuelles. On reviendra sur ce point dans peu de temps (et je renvoie à D'Amore, 1999).

4. Le rôle du langage dans l'apprentissage et dans la formulation des concepts.

Il est évident qu'en tout cela le langage joue un rôle d'une importance extraordinaire.
Il est bien connu que de la position de Piaget on a approché toujours plus «une dévaluation cognitive progressive du langage» (Pontecorvo, 1983, page 292); Ce dernier «doit être vu par rapport à la position de Piaget. Elle se situe contre toute conception identifiant l'origine de la pensée dans la communication sociale à travers le langage, et contre toute conception assimilant les systèmes logiques à des systèmes linguistiques (...) La pensée, insiste Piaget, n'est pas originée par le langage (...) la "structure" d'un système opératoire n'est pas la structure d'un système de signes mais la structure d'un système "d'actions intériorisées"» (Tornatore, 1974, page 137).
Voilà pourquoi Piaget assume la position suivante:
- l'image est un signifiant dont le but est celui de désigner des objets de manière figurative;
- le concept est un signifié ayant comme fonction l'individuation des caractères constitutifs de l'objet par rapport à d'autres termes de la même classe (et non de le nommer);
- le mot, signe verbal désignant le concept n'ajoute rien, quant à la connaissance, au concept lui-même.

La position de Vygotskij (1962, page 106) est très différente: en effet il voit le langage comme un médiateur entre l'individu et la culture; il affirme que la formation d'un concept se vérifie par le moyen d'une opération intellectuelle guidée par l'utilisation des paroles nécessaires à la concentration active de l'attention, l'abstraction de certains concepts, la synthèse et la symbolisation de ces concepts par le moyen d'un signe.
L'organisation cognitive de l'enfant reçoit donc, grâce au langage, une dimension n'appartenant qu'à elle, et qui lui est naturelle depuis son début: la dimension *sociale*. S'il est vrai que l'enfant apprend à catégoriser dans le rapport linguistique avec l'adulte, il est vrai aussi que des formes de catégorisation doivent être déjà présentes en embryon *avant* leur systématisation définitive et adulte. Vygotskij établit donc une comparaison entre les concepts spontanés (ou quotidiens) et les concepts scientifiques:

- les premiers ont la caractéristique d'appartenir à l'expérience personnelle,
- les seconds font déjà partie d'un système de concepts. L'effet de l'école sur les compétences de l'enfant est celui de systématiser les concepts qu'il possède déjà et ceux qu'il acquiert au fur et à mesure.

Une position, celle-ci véritablement révolutionnaire, sur laquelle se fonde une grande partie de la didactique actuelle.
Je veux terminer cette rapide vue d'ensemble sur le langage et l'apprentissage des concepts en rappelant, parmi tant d'études possibles, ceux de Madame Nelson (1974, 1977). Comme je l'ai déjà souligné, le concept, au moins du point de vue de l'apprentissage cognitif, est interprété aujourd'hui comme quelque chose de plus en plus vaste, qui n'est plus lié exclusivement aux catégories, aux classes, et cetera; le concept, pour Nelson (1977), est lié à n'importe quelle acquisition de connaissance, à la condition qu'elle soit «définie et incorporée dans un contexte ou un système». Par conséquent, indépendamment du degré de généralité ou d'abstraction, ce qui compte est qu'il y ait un cadre de référence, un réseau de relations: «les concepts existent nécessairement à l'intérieur d'un cadre (*framework*) conceptuel» (Nelson, 1977).
Il devient alors décisif pour l'apprentissage d'un concept le fait d'avoir une série de connaissances se référant, par exemple, à un objet. L'exemple que l'auteur elle-même propose se réfère au terme "balle" dans une expérience avec un enfant de 12 mois: le réseau de relations tournant autour du mot "balle" se réfère à l'endroit où elle a été vue, à l'activité que d'autres personnes font avec elle, que l'enfant même peut faire avec elle, aux caractéristiques fonctionnelles de l'objet, les lieux où tout cela peut se dérouler et cetera. L'objet est donc lié à un vaste réseau de relations, dont l'ensemble finit par constituer le concept; et, comme on l'a vu, le *mot* joue un rôle décisif. Avec le temps, l'enfant ajoutera à cette première formation du concept d'autres attributions, d'autres fonctions et cetera, en permettant ainsi au concept de contenir des éléments fonctionnels, relationnels, perceptifs, *descriptifs*, jusqu'aux termes qui les désignent, aussi bien individuellement que collectivement. Il est évident aussi que le lien avec les

scripts est très fort, et que ces derniers ont été pensés comme des plus amples cadres de référence à l'intérieur desquels il sera possible de situer les concepts dans les différentes phases de leur évolution et de leur présentation. Tout cela permet de reconnaître les traits d'identification du concept, ce qui permet à son tour de reconnaître les nouveaux exemplaires pouvant partager le *nom* avec celui qui les précède.
Mais le point d'aboutissement est celui où, malgré des *scripts* différents, le sujet arrive, comme on le dit, à supercatégoriser: «Les catégories aussi bien que les *scripts* peuvent offrir des cadres de référence pour les concepts eux-mêmes: en effet, il n'y a aucune raison pour laquelle les concepts insérés dans un contexte ou l'autre soient différents dans le contenu ou dans la structure. Par exemple: les ours peuvent faire partie du *script* relatif au zoo ou bien ils peuvent faire partie d'une catégorie taxinomique relative aux animaux.» (Nelson, 1977, page. 223).
Pensons à quel point l'évidence de ces réflexions s'impose dans l'activité de didactique de la Mathématique, quand le même concept, introduit dans un *script* donné, n'est pas accepté quand on le retrouve dans une catégorie différente.
Qu'est-ce qui rend la compréhension des concepts difficile? Quel est le niveau dans lequel il existe des difficultés dans la compréhension des concepts?
Les réponses possibles sont plusieurs. D'abord, les différents niveaux de formations des concepts: des études sur ce point sont plus communes dans le monde de la didactique des sciences naturelles (Giordan, De Vecchi, 1987; Astolfi, Develkay, 1989) et de l'histoire (Clary, Genin, 1991). Et puis l'existence d'objectifs-obstacles (Meirieu, 1987 ; Astolfi, Develkay, 1989).

5. Les définitions de concept et de schéma élaborées par Vergnaud.

Gérard Vergnaud, a affronté dans plusieurs occasions la problématique visant à distinguer et à définir les idées de concept et de schéma. Après avoir déclaré que la connaissance rationnelle doit être de type opératif, il définit le schéma une organisation invariante du comportement par une classe de situations données (Vergnaud, 1990).
En particulier, beaucoup de ses exemples sont tirés du domaine de la mathématique:

- la numération d'une petite collection d'objets de la part d'un enfant de 5 ans nécessite de l'application d'un schéma lui permettant de coordonner les mouvements des yeux et des mains et de coordonner la séquence numérique avec eux; en particulier, il existe une constante significative d'un comportement de type schématique dans la répétition du dernier nom numéral, prononcé sur un ton différent;

- la résolution d'équations linéaires par des adolescents suit à son avis un schéma, une organisation inchangée;
- l'exécution de l'addition en colonne de nombres naturels suit un schéma déjà assumé;

et cetera.

Selon Vergnaud, si on analyse de manière critique la difficulté de certains élèves dans la solution de devoirs de mathématique, par exemple d'enfants face à des problèmes d'arithmétique, c'est en termes de *schémas* qu'il faut analyser le choix des données à utiliser, le choix des opérations, surtout quand il existe plusieurs choix possibles. Même les procédures ne seraient que des schémas.

À ce point il introduit l'idée de "concept-en-acte" et de "théorème-en-acte"; il s'agit des connaissances contenues dans les schémas : on peut aussi les désigner avec l'expression plus compréhensive d' "invariants opérateurs".

Selon Vergnaud il existe trois types logiques d'invariant opérateur:

- invariants du type *proposition*, ceux auxquels convient l'attribution d'être vrais ou faux;
- invariants du type *fonction propositionnelle*; avec ce terme on peut désigner une expression contenant une ou plus variables individuelles telles que quand on met à leur place des constantes individuelles elle donne lieu à une proposition;
- invariants du type *argument*: ils peuvent être des objets, des relations, des propositions, des fonctions propositionnelles, ou autre: il s'agit substantiellement d'instantiations de variables ou exemples de fonctions propositionnelles, ou de propositions elles-mêmes.

On revient maintenant aux concepts. Selon Vergnaud, le point décisif dans la conceptualisation du réel et dans la didactique est le passage des *concepts-comme-instrument* aux *concepts-comme-objet* et une opération linguistique essentielle dans cette transformation est justement la nominalisation. Cela pourrait se résumer en un seul mot: *conceptualisation*.

Il est donc fondamental, de donner une définition pertinente et efficace de *concept* on ne pourrait jamais y renoncer. Dans plusieurs travaux, avec des variations minimes, Vergnaud en suggère une qu'on peut illustrer de la manière suivante :

un concept est une triade d'ensembles:

$C = (S, I, \mathcal{S})$

où:

- S est l'ensemble des situations donnant sens au concept (le *référent*);
- I est l'ensemble des invariants sur lesquels se fonde la capacité operationnelle des schémas (le *signifié*);
- $\mathcal{S}$ est l'ensemble des formes linguistiques et non linguistiques permettant de représenter symboliquement le concept, ses procédures, les situations et les procédures de tractation (le *signifiant*).

Selon Vergnaud, le fait d’étudier le développement et le fonctionnement d’un concept signifie prise en considération tour à tour de ces trois “plans” séparément et dans leurs relations réciproque et mutuelle.

6. Le virage “anthropologique”: signifié institutionnel et personnel des objets mathématiques.

Malgré cela, les questions sur la nature cognitive des concepts mathématiques et sur la nature de la signification des objets mathématiques prirent tout autre direction déjà au cours des années ’70.
«Une théorie de la signification est une théorie de la compréhension; c’est à dire, ce dont doit rendre compte une théorie de la signification est ce qu’on connaît quand on connaît le langage, soit quand on connaît les significations des expressions et des discours du langage», déclarait Dummet en 1975 (Dummett, 1991).
Peu d’années après, en 1980, Brousseau se demanda: quelles sont les composantes de la signification déductibles du comportement mathématique qu’on observe dans l’élève? Quelles sont les conditions qui mènent à la reproduction d’un comportement tout en gardant la même signification? (Brousseau, 1981). N’existerait-il pas, par hasard, une “variété didactique” du concept de sens, spécifique pour la mathématique, jamais étudiée, jamais soulignée jusqu’à présent ni en linguistique ni en psychologie? (Brousseau, 1986).
L’accentuation de la nécessité d’études sur les concepts centrés sur les procès d’apprentissage a été mise en acte par Sierpinska (1990) aussi: «La compréhension du concept sera (…) conçue comme l’acte d’acquisition de sa signification. Tel acte sera probablement un acte de généralisation et synthèse de significations par rapport à des éléments propres à la 'structure' du concept (la 'structure' du concept est le réseau de significations des énoncés qu’on a pris en considération). Ces significations particulières doivent être acquises par des actes de compréhension. (...) La méthodologie des actes de compréhension est concernée principalement par le processus de construction de la signification des concepts».
On se trouve là face à la nécessité d’éclairer la nature de la signification, en confrontant deux catégories différentes dans lesquelles les théories peuvent être partagées en théories réalistes (ou figuratives) et en théories pragmatiques (cette division a déjà paru en Kutschera, 1979).

Dans les théories réalistes la signification est «une relation conventionnelle entre des signes et des entités concrètes ou idéales existant indépendamment des signes linguistiques; par conséquent elles se fondent sur un réalisme conceptuel»

(Godino, Batanero, 1994). Comme le déclarait déjà Kutschera (1979), «Selon cette conception la signification d'une expression linguistique ne dépend pas de son utilisation dans des situations concrètes, mais il advient que l'utilisation se fonde sur la signification, une division nette entre sémantique et pragmatique étant possible».
Dans la sémantique réaliste qui en dérive, on attribue des fonctions purement sémantiques aux expressions linguistiques: la signification d'un nom propre (comme 'Bertrand Russell') est l'objet que ce nom propre désigne (dans ce cas Bertrand Russell) ; les énoncés atomiques (comme 'A est un fleuve') expriment des faits décrivant la réalité (dans ce cas A est vraiment le nom d'un fleuve); les prédicats binaires (comme 'A lit B') désignent des attributs, ceux indiqués par la phrase qui les exprime (dans ce cas la personne A lit la chose B). Toute expression linguistique est donc un attribut de certaines entités: la relation nominale qui en dérive est la seule fonction sémantique des expressions.
On reconnaît là les positions de Frege, de Carnap, et les positions assumées par Wittgenstein dans le *Tractatus*.
Une conséquence de cette position est l'admission d'une observation scientifique (en même temps donc empirique et objective ou intersubjective) comme pourrait l'être, à un premier niveau, une logique des énoncés et des prédicats.
Du point de vue qui nous intéresse le plus, si on applique les suppositions ontologiques de la sémantique réaliste à la mathématique, on en tire nécessairement une vision platonique des objets mathématiques: dans ce domaine en effet, les notions, les structures, et cetera, ont une réelle existence qui ne dépend pas de l'être humain, parce qu'elles appartiennent à un domaine idéal; «connaître» du point de vue mathématique signifie découvrir des entités et leurs relations dans ce domaine. Et il est évident aussi que cette vision comporte un absolutisme de la connaissance mathématique en tant que système de vérités certaines, éternelles, non modifiables par l'expérience humaine, vu qu'elles la précèdent ou, au moins, elles lui sont étrangères et indépendantes. Des positions de ce genre, même si elles ont des nuances différentes, ont été adoptées par Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel, …; et elles durent faire face à des critiques véhémentes [le conventionnalisme de Wittgenstein et le presque empirisme de Lakatos: voir Ernest (1991) et Speranza (1997)].

Dans les théories pragmatiques les expressions linguistiques ont des significations différentes selon le contexte où on les utilise, toute observation scientifique résulte donc impossible, parce que la seule analyse possible est "personnelle" ou subjective, de toute manière circonstanciée et non généralisable. On ne peut qu'examiner les différentes "utilisations": l'ensemble des "utilisations" détermine en effet la signification des objets.
On reconnaît là les positions de Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques*, quand il admet que la valeur significative d'un mot dépend de

sa fonction dans un jeu linguistique, vu qu'à l'intérieur de celui-ci, le mot a un mode d'«emploi» et un but concret pour lequel il a été utilisé, justement. Le mot n'a donc pas de signification en lui-même, et cependant il peut être significatif.
Les objets mathématiques sont donc des symboles d'unités culturelles qui émergent d'un système d'utilisations caractérisant les pragmatiques humaines (ou, au moins, de groupes homogènes d'individus) et se modifiant sans cesse dans le temps, aussi suivant la nécessité. En fait, les objets mathématiques et la signification de ces objets dépendent des problèmes affrontés en mathématique et de leurs solutions.

	THEORIES "REALISTES"	**THEORIES "PRAGMATIQUES"**
signification	relation conventionnelle entre signes et entités concrètes ou idéales, indépendantes des signes linguistiques	dépend du conteste et de l'emploi
sémantique contre pragmatique	division nette	non-division ou division nuancée
objectivité ou intersubjectivité	totale	absente ou discutable
sémantique	les expressions linguistiques ont des fonctions purement sémantiques	les expressions linguistiques et les mots ont des significations "personnelles", ils sont significatifs dans des contextes convenables, mais ils n'ont pas de significations absolues, en soi
analyse	possible et licite : la logique, par exemple	une analyse "personnelle" ou subjective, seule, est possible, l'analyse ne doit pas être généralisable, ni absolue
conséquente vision épistémologique	conception platonique des objets mathématiques	conception problématique des objets mathématiques
connaître	découvrir	employer dans les contextes qui conviennent
connaissance	elle est un absolu	elle est relative à la circonstance et à l'emploi spécifique
exemples	Wittgenstein dans le *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel]	Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques* [Lakatos]

Dans la direction pragmatique, on comprend la définition que donne Chevallard (1991) d'objet mathématique: un objet mathématique est «un *émergent* d'un système de pratiques où sont manipulés des objets matériels qui se découpent dans différents *registres sémiotiques*: registre de l'oral, des mots ou expressions prononcés; registre du gestuel; domaine de la scription, de ce qui est écrit ou

dessiné (graphismes, formalismes, calcul etc.), c'est-à-dire registre de l'écrit» étant donné que le “praxema” est un objet matériel lié à la praxis, l’objet est alors émergent d’un système de praxème. Dans cette acception, la notion de signification d’un objet a moins d’intérêt que celle de *rapport à l’objet*, relation avec l’objet. C’est sur cette idée que s’appuie la construction de la “théorie de la connaissance” de Chevallard, ou mieux de son “anthropologie cognitive”, à l’intérieur de laquelle on peut situer la didactique.
Mais alors la personne (ou l’institution, comme ensemble de personnes) qui se met en relation avec l’objet est centrale, et non l’objet en lui-même: «Un objet existe dès lors qu’une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un *existant* (pour elle). Plus précisément, on dira que l’objet O *existe pour X* (respectivement, *pour I*) s’il existe un objet, que je note R(X,O) (respectivement $R_I(O)$), que j’appelle *rapport personnel de X à O* (respectivement *rapport institutionnel de I à O*)» (Chevallard, 1992, page. 86).
Cette position a marqué un tournant intéressant dans le contexte des théories encadrant toute recherche en Didactique de la Mathématique, encore plus si on souligne les recherches successives dans lesquelles plusieurs Auteurs ont éclairci et rendu opératoires les notions de Chevallard, en créant des instruments conceptuels adéquats et en les mettant en rapport à ceux que d’autres positions avaient fourni à ce propos.
Par exemple, une clarté exemplaire nous vient des études de Godino et Batanero (1994) parce qu’on définit là de manière rigoureuse tous les termes de la question: ce que signifie “pratique”, ce que c’est qu’une “pratique personnelle”, ce que c’est qu’une institution, ce qu’est une pratique institutionnelle, quelle est la différence entre des objets personnels et institutionnels et comme on définit chacun d’eux, ce que sont les significations d’un objet personnel et d’un objet institutionnel, quels liens existent entre signification et compréhension, … Un des mérites de ce travail, auquel je renvoie, consiste aussi bien dans son éclaircissement des termes, que dans la proposition d’exemples adéquats, et aussi enfin, dans la mise en évidence des similitudes et des différences entre les différentes théories de la signification.
Pour donner, d’un coup, une caractéristique de cette position dans la formulation de Chevallard-Godino-Batanero l’essentiel est l’activité des personnes face à la résolution de domaines de problèmes (phénoménologie), d’où émergent les objets (concepts, termes, énoncés, relations, théories etc.), relatifs aux contextes institutionnels et personnels. Ces contextes se définissent suivant les domaines de problèmes qu’on affronte et suivant les instruments sémiotiques disponibles.
Je reviendrai d’ici peu sur cette position, avec des exemples significatifs.
Encore une note. Pour expliquer l’emphase avec laquelle on traite des phénomènes typiques de la cognition humaine dans le travail de Godino et Batanero (1994), il vaut mieux mettre en évidence le fait que, tandis que dans le texte de Chevallard (1992) on juge le contexte institutionnel plus important par rapport au contexte personnel, Godino et Batanero tendent à privilégier la

"sphère du mental", du sujet humain, pour essayer un équilibre entre les deux contextes et pour empêcher que la sphère du personnel soit occultée du domaine institutionnel.

7. Quelques précisions, avant de continuer.[6]

Dans ce paragraphe, il s'agira de quelques précisions terminologiques, de considérations complémentaires et de notes cautionnelles.

7.1. Parfois, en mathématique, on parle de "concepts" parfois d' "objets". Quelle est la différence? Elle pourrait être le résultat d'un caprice des mathématiciens, mais il s'agit par contre d'une différence bien fondée, puisqu'elle se base sur les trois points suivants:

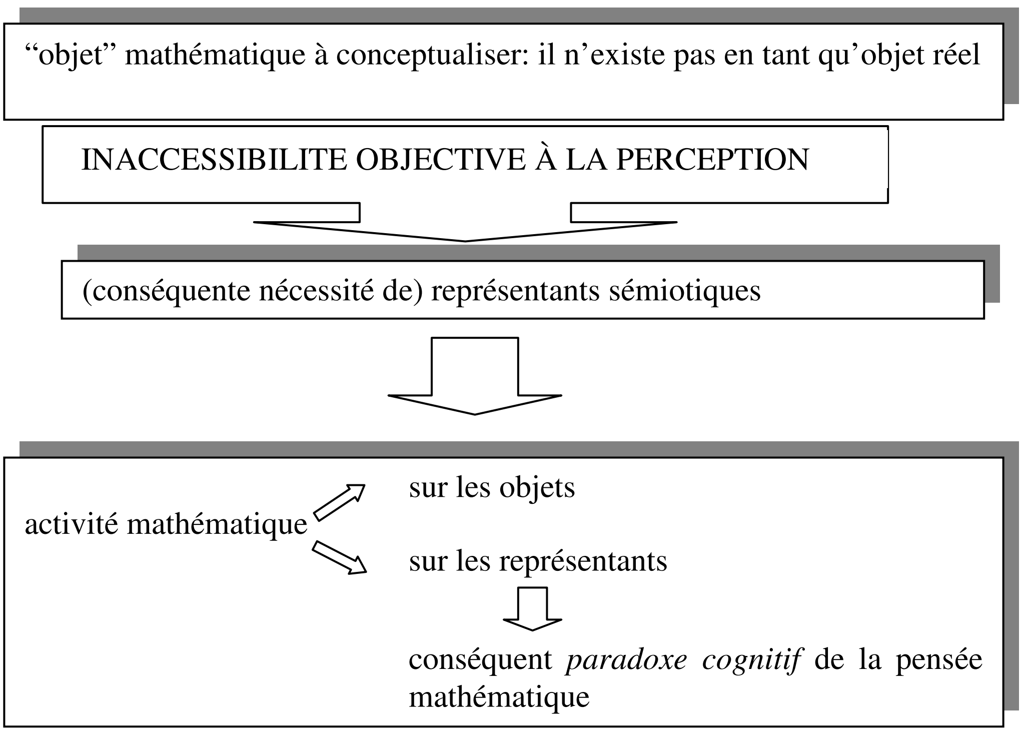
- Tout concept mathématique a des liens avec des "non-objets", du point de vue du réalisme naïf; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations s'appuyant sur la réalité concrète, et elle ne peut pas l'être, vu que, dans les mathématiques, des renvois ostensibles ne sont pas possibles;
- Tout concept mathématique doit nécessairement se servir de représentations, vu qu'il n'y a pas d'"objets" à exhiber à leur place ou à leur évocation;[7] la conceptualisation doit donc nécessairement passer à travers des registres de représentation qui, pour de différentes raisons, surtout s'ils ont un caractère linguistique, ne peuvent pas être univoques: dans les mathématiques il n'y a pas d'accès sensible (vue, toucher, …) direct aux "objets" mais seulement à leurs représentations sémiotiques dans des différents registres linguistiques;
- On parle plus souvent en mathématique d'"objets mathématiques" que de concepts mathématiques car en mathématique on étudie *de préférence* des objets plus que des concepts: «La notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances» (Duval, 1998, p. 139).

7.2. Dans la voie ouverte par Duval, la notion de concept, préliminaire ou au moins prioritaire chez presque tous les Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui assume un caractère prioritaire est le couple (*signe*, *objet*), ce qui mène au *paradoxe cognitif de la pensée mathématique*, mis en évidence justement par

[6] Pour la rédaction de ce paragraphe je me sers de D'Amore (*).
[7] Ici on entend "objet" dans le sens d' "objet réel" ou de "chose". Dans la *Métaphysique,* Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la chose, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes: tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire de plusieurs sens à la fois) indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres "choses".

Duval (1993)[8] et que je présenterai plus bas. En Duval (1996) on cite un passage de Vygotskij dans lequel on déclare dans la substance qu'il n'y a pas de concept sans signe: «Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune supérieure, celle d'être des processus médiatisés, c'est à dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques (…) L'élément central (du processus de formation des concepts) est l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours des propres processus psychiques…» (Vygotskij, 1962; dans l'édition française, 1985, aux pages 150, 151, 157).
Il est clair que si on met l'accent sur le couple (*signe*, *objet*), toutes les représentations triadiques (de C.S. Peirce, de G. Frege, de C.K. Ogden et I.A. Richards) deviennent fausses.[9]

7.3. Je résume une partie de ce qu'on a déjà vu, en interprétant Duval (1993), dans le schéma suivant (soumis à l'acceptation de la part de l'Auteur) :



Voyons donc comment on peut définir ce *paradoxe cognitif de la pensée mathématique*, qui a des fortes répercussions cognitives (Duval, 1993, p. 38):

[8] Mais les premiers travaux de Duval sur cet argument remontent au 1988 (Duval, 1988 a, b, c).
[9] Voir D'Amore (*) pour une tractation plus complète.

«(…) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presque inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques».
Dans ce paradoxe, que Raymond Duval a mis en évidence magistralement, il peut se cacher une cause potentielle de dévolutions manquées, comme j'essaie de démontrer dans D'Amore (*). Le problème principal (qu'on résume brièvement ici) réside dans le fait que l'enseignant, les représentants de la noosphère et l'étudiant lui-même peuvent penser en contact direct avec un "objet" mathématique. Mais, et parfois personne ne semble s'en rendre compte, l'étudiant n'a pas accès qu'à une représentation sémiotique particulière de cet "objet". L'étudiant n'a pas d'accès direct à l' "objet", et ne peut pas l'avoir, tandis que l'enseignant et les représentants de la noosphère croient que l'un lui donne automatiquement l'autre! Et l'étudiant est bloqué, pour ainsi dire, inhibé: il ne peut rien faire, excepté confondre l' "objet" et sa représentation sémiotique parce qu'il n'a pas les moyens de les distinguer. Son rapport personnel au savoir a comme "objet" quelque chose de nuancé, de confus. Et donc, face à une successive nécessité conceptuelle, se manifestant par exemple avec la nécessité de modifier la représentation sémiotique de ce même "objet", l'étudiant n'a ni des moyens critiques ni culturels ni cognitifs; l'enseignant et la noosphère n'en comprennent pas la raison et ils accusent l'étudiant, en le culpabilisant ainsi de quelque chose qu'il ne comprend pas, on l'accuse d'une incapacité indéfinie, non circonstanciée ni détaillée: personne ne sait *exactement* ce que, au juste, l'étudiant sait ou ne sait pas faire.

8. Le concept (ou objet) en mathématique, comme superposition ou comme accumulation de conceptions provisoires.

J'essaierai ici une convergence entre:

(a) une position exclusivement didactique-cognitive, à caractère fortement naïf, accueillant comme hypothèse de base le constructivisme de la connaissance la plus élémentaire, position celle-ci, se fondant sur les positions a-critiques les plus diffusées;

(b) une position anthropologique dans laquelle tout se réfère au rapport personnel envers l'objet mathématique. Tout cela dans le domaine d'une théorie de l'apprentissage mathématique qui n'est caractérisée par aucun type de préconception théorique ou ontologique.

Ce paragraphe **8.** n'est qu'une tentative initiale de médiation entre les positons les plus naïves, mais enracinées dans le sens commun, et ce qu'on a expliqué jusqu'à présent.

Dans le paragraphe **9.** je ferai quelques considérations critiques.

Soient c_i les conceptions provisoires, dans un processus linéaire et évolutif (au moins dans le temps) d'assimilation et mise à point, relativement à un objet mathématique C. Il est nécessaire de distinguer entre :

- c_i scientifiques de type institutionnel, qu'on appellera académiques (a), c'est à dire celles que la communauté scientifique (académique) accepte comme pertinentes, significatives et correctes; il s'agit de $R(I(C))$ partagés; on les appellera c_i de type a;
- c_i cognitives de type institutionnel, qu'on appellera scolaires (s), dues à l'action de l'école et à la noosphère, c'est à dire celles que quelqu'un construit ou a construit à l'école; il s'agit de $R(X(C))$ qui peuvent être aussi non partagées; on les appellera c_i de type s.

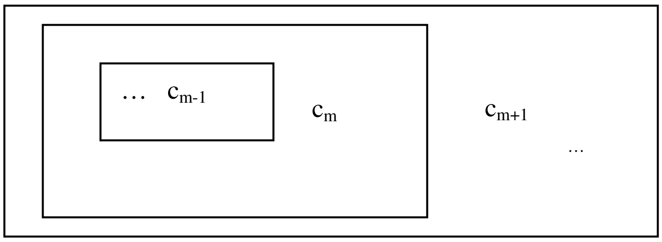
Les c_i de type a se différencient de celles de type s seulement parce que les deuxièmes sont plus en retard par rapport aux premières (c'est à dire: les index déposants ont une valeur numérique inférieure), ou bien parce qu'elles sont critiquement moins riches et plus fondées sur des sensations, sur le bon sens, et qu'elles sont liées à des applications, qui sont moins l'objet de révision et de réflexion critique, et plus liées à de différentes clauses du contrat didactique.

Le sens du processus didactique usité, dans sa forme la plus naïve, mais aussi la plus diffusée, est celui de porter à la fin les individus à la formation d'un concept C qui est le pic du processus évolutif, ***le*** concept, qu'on suppose existent, de type a (ou, au moins, le plus proche possible de celui-ci).

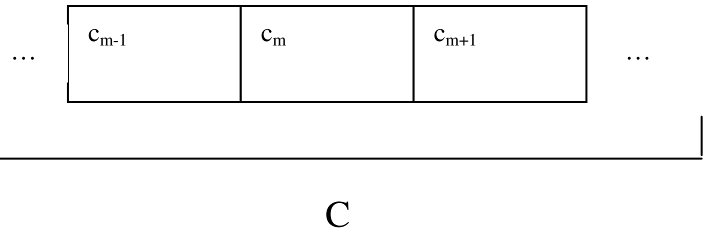
Toutefois, comme toute conception est dans une évolution historico-critique *perpétuelle*, il est impossible d'évaluer le franchissement de cette limite, surtout parce qu'on pourra parler à la rigueur d'«objet acquis par la communauté scientifique jusqu'à présent» sans se mettre dans la situation de prévoir le futur de cet objet. L' "objet" est donc dans cette conception quelque chose d'idéal, d'abstrait, l'apex d'un processus toujours en acte, dont on n'a qu'une idée limitée à l'évolution historique et à l'état actuel.

La formation de C à partir de la succession c_i peut se penser selon deux modalités:

■ <u>superposition</u>: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute et intègre la précédente c_m, c'est à dire la comprend et y ajoute quelque chose, en se superposant à elle :



■ <u>accumulation</u>: toute conception provisoire c_{m+1} ajoute quelque chose (en plus) à la c_m précédente :



En réalité, on a souvent (toujours?) des mélanges des deux modalités.

EXEMPLE 1: le pseudo-objet *droite*.
Je vais tracer, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relativement à un objet supposé *droite*. Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:
c_1: droite primitive: segment (ses caractéristiques sont: le fait d'être droit et subtil, et son indépendance nominale de la longueur); celle-ci est l'idée naïve d'un enfant
c_2: droite euclidienne: idéalisation de c_1 [ses caractéristiques sont: le fait d'avoir une seule dimension (ce qui est l'idéalisation du "subtil") et le fait d'être allongeable (ce qui est l'idéalisation de l'indépendance du nom de la longueur)]; la relation entre points et droite n'est pas très claire; au sens pitagorique, le modèle est celui des perles (monades) enfilées dans le collier (droite); mais chez Euclide cette position naïve a déjà disparu
c_3: droite dense: idéalisation de c_2: entre deux points il y en a *toujours* un autre: le modèle pitagorique est dépassé
c_4: droite continue (déjà aux temps de Newton et Leibniz): sur la droite il existe de sièges convenables aux points correspondants à des valeurs irrationnelles

($\sqrt{2}$) et transcendantes (π) même si leur statut épistémologique n'est pas encore bien clair
c_5: droite d'Hilbert (définie implicitement par les axiomes): il n'y a plus de tentative de définition explicite pour essayer d'égaler l'image de droite à un modèle pre-figé qu'on veut rejoindre, mais on a une idéalisation de cette conception à l'intérieur d'un système théorique
c_6: droite comme nom commun utilisé indifféremment dans le domaine euclidien et non euclidien: on ne parle plus de dimension, du fait d'être droite, ou d'être infinie (mais toujours illimitée)
c_7: dénomination de droite donnée à des entités différentes de modèles différents (droite finie ou infinie, discrète, dense ou continue, limitée ou illimitée…)
c_8: objet n-2 dimensionnel dans une variété n-dimensionnelle
…
Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "droite" est une superposition ou une accumulation des conceptions précédentes ; il semble que de c_1 à c_5 on puisse parler surtout de passages de type "superposition", tandis que de c_6 à c_8 il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

EXEMPLE 2: le pseudo-objet *addition*.
Je tracerai, de manière approximative, une succession de conceptions provisoires relatives à l'objet supposé *addition*. Dans sa longue histoire évolutive, on pourrait penser à une succession comme celle-ci:
c_1: addition pytagorique (ordinal et cardinal confondus) en N-{0}; l'addition comme cardinal de recueils disjoints; il s'agit là de la conception naïve d'un petit enfant (c'est sur ce point que Vergnaud explique quelques-uns de ses *théorèmes en acte*)
c_2: addition en Q_a; je pense aux additions entre fractions, dans l'histoire sumérienne, égyptienne, et puis grecque
c_3: addition en N et en Q_a (0 inclus); au cours du Moyen - Age, dans le monde indien-arabe il devient nécessaire de référer l'addition aux cas où un des termes de la somme est zéro
c_4: addition en Z
c_5: addition en Q
c_6: addition en R
c_7: addition dans le domaine complexe C
c_8: addition dans les quaternions et, plus en général, dans les systèmes complexes n-valables; je pense aux recherches de Hamilton, Grassmann, Frobenius et Hankel; certaines propriétés formelles de l'addition typiques des nombres N, Z, Q, R et C se perdent, et toutefois l'opération qui étend et généralise l'addition est appelée toujours de la même manière
c_9: addition généralisée dans les réseaux et dans les algèbres de Boole

c_{10}: addition généralisée dans les structures $<A,+,\times, 0, 1,...>$
…
Comment peut-on établir si d'autres c_i suivront, et lesquels? Le pseudo-objet C "addition" est superposition ou accumulation des conceptions précédentes; il semble que de c_1 à c_7 on puisse parler de passages surtout de type "superposition", tandis que de c_8 à c_{10} il semble s'agir surtout de passages de type "accumulation".

9. Critiques à la position précédente.

La vision tracée dans le paragraphe **8.,** je le répète, n'est qu'un schéma résumant les positions les plus naïves, mais aussi les plus populaires à cet égard. Voyons maintenant quelques notes fortement critiques.

En tout cas, une réflexion mûre montre que l'activité des particuliers face aux problématiques créant des c_i est essentielle; dans ce sens, un supposé ordre hiérarchique perd de sens, à mon avis; par conséquent, une plus grande… noblesse conceptuelle supposée pour les c_i de type a, par rapport à celles de type s, disparaît.[10] Les "objets" se constituent de l'activité des personnes face à la solution de problèmes, de façon indépendante de tout contexte institutionnel aussi ; même, dans un certain sens, on privilégie les significations personnelles par rapport aux significations institutionnelles.
De ce point de vue, il semble insensé de parler, par exemple, de l' "objet droite" (ou de l' "idée de droite", ou du "concept de droite") comme on le fait normalement: évidemment, on est plutôt forcé à parler de "pluralité d'objets"; il ne s'agit donc pas tellement d'une "montée" vers un apex, mais d'une pluralité d' "objets" *différents* qui, tout banalement, ont leur nom propre en commun, mais ce dernier n'identifie pas une seule entité, comme dans la vision qu'on a appelé "théorie réaliste", et sa signification dépend d'un contexte d'utilisation, comme dans la vision qu'on a appelé "théorie pragmatique".
Tout c_i est donc, dans cette vision, un "objet droite" (probablement, une analyse plus attentive pourrait montrer qu'à son tour, il est lui-même une pluralité…).
Tout c_i est le résultat d'un rapport personnel à l'objet, mais, comme on a vu chez Chevallard et Godino-Batanero, *l'objet est ce rapport personnel lui-même*, et non pas un supposé "objet en soi".

[10] Lorsqu'on accepterait ce point, il pourrait avoir des fortes repercussions dans la pratique didactique; et, à mon avis, il devrait être étudié non seulement du point de vue théorique, comme on a fait jusqu'à présent, dans le domaine de l'Education Mathématique, pour ainsi dire, mais aussi du point de vue de l'action pratique, dans le domaine de ce qu'on appelle Didactique de la Mathématique (Godino, Batanero, 1998).

D'autre part, Wittgenstein lui-même insiste sur le fait qu'on ne doit pas parler d'idées mathématiques au sens où, par contre on le fait normalement, c'est à dire comme le résultat d'un processus d'abstraction, vu que cela est à l'origine de graves confusions philosophiques, psychologiques [et didactiques, comme me le suggère Juan Godino (dans une lettre privée)]. Wittgenstein dans les *Recherches Philosophiques* insiste sur le concept de diversité d'utilisation, ou d'utilisations différentes du "terme" ("droite", "addition", dans mes exemples plus haut).
Chez Godino-Batanero, on propose d'associer l'entité théorique "signification de Ox" (en réalité une classe de significations) à l'objet mathématique Ox: on passe ainsi de l'accentuation du "concept", de ses définitions et de ses règles d'utilisation, à une nouvelle accentuation des domaines de problèmes, des pratiques des techniques qui constituent la base de ces entités intensionnelles.
Les deux cas que j'ai fourni, "droite" et "addition", constituent donc justement un exemple de la relativité des objets Ox qui parfois sont des entités mentales (donc personnelles), et parfois des entités abstraites (institutionnelles). Je n'ai pas trop insisté sur l'éclaircissement et la définition de cette distinction, parce que je la considère occasionnelle et réciproque…

Je crois pouvoir déclarer que l'identification de problèmes spécifiques, d'activités pratiques, d'activités techniques etc. qui, ont porté même d'un point de vue historique à la création de toute "conception", tout "objet", toute "règle", est d'une importance fondamentale dans les études théoriques d'Education Mathématique, dans la recherche dans ce domaine, et dans la pratique didactique. Il est aussi extrêmement important d'établir la dépendance réelle ou présumée de cette recherche des contextes institutionnels (il pourrait y avoir une raison historique, ou éducative, ou instrumentale etc., ou toutes ces raisons ensemble).

Bibliographie.

Anderson R.C., Spiro R.J. & Montague W.E. (1977), *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale N.J., Lea.

Astolfi J.-P. & Develay M. (1989), *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. Irem de Lyon, Lirdis.

Brousseau G. (1981), Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2, 1, 130-135.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Bruner J.S. (1964), The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15.

Chevallard Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique de la Mathématique, 12, 1, 73-112.

Clary M. & Genin C. (1991), *Enseigner l'histoire à l'école* ? Paris, Hachette/Istra.

Cornu L. & Vergnioux A. (1992), *La didactique en questions*. Paris, Hachette.

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

D'Amore B. (*), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution.

Dewey J. (1933), *How we think*. Edit. Italienne : 1961. Florence, La Nuova Italia

Dummett A.A.E. (1991), ¿ Qué es una teoria del significado ? In: Valdés L.M. (ed.), *La búsqueda del significado*. Madrid, Tecnos. [Il faut remarquer que la version originale de ce travail remonte au 1975].

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993), Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? Texte du cours tenu à la VIII Ecole estivale de Didactique de la Mathématique, 1995 ; actes de 1996.

Duval R. (1998), Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Ernest P. (1991), *The philosophy of mathematics education*. London, Falmer Press.

Gagné R. (1965-1985), *The conditions of learning*. New York, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. L'œuvre subit un changement complet de plan quand il fut publié par Cbs College Publishing, 1985.

Gal'perin P.Ja. (1969), Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino, dans: Veggetti M.S. (ed.) (1977), 43-63. [L'article de Gal'perin fut publié dans une revue soviétique en 1969].

Giordan A. & De Vecchi G. (1987), *Les origines du savoir*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Godino J. & Batanero C. (1994), Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355. [Trad. it. Bologna, Pitagora 1999, comment livre dans la série: Bologna-Querétaro].

Godino J. & Batanero C. (1998), The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In: Malara N.A. (Ed.) (1998), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996*. Modena, CNR-MURST-University of Modena.13-22.

Klausmeier H.J. (1979), *Un modello per l'apprendimento dei concetti*, in: Pontecorvo C. & Guidoni P. (ed.) (1979).

Klausmeier H.J. (1980), *Learning and teaching concepts*. New York, Academic Press.

Klausmeier H.J., Gathala E.S. & Frayer d.A. (1974), *Conceptual learning and development*. New York and London, Academic Press.

Kutschera F. von (1979), *Filosofia del lenguaje*. Madrid, Gredos.

Luria A.R. (1982), *Language and Cognition*, (ed. by J. V. Wertsch). Washington, V. H. Winston.

Meirieu P. (1987), *Apprendre... oui, mais comment* ? Paris, ESF.

Nelson K. (1974), Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*, 81, 4.

Nelson K. (1977), Cognitive development and the acquisition of concepts, in: Anderson R.S., Spiro r.J. & Montague W.E. (eds.) (1977).

Piaget J., Inhelder B. & Szeminska A. (1948), *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, PUF.

Pontecorvo C. (Ed.) (1983), *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino, Loescher.

Pontecorvo C. & Guidoni P. (1979), *Scienza e scuola di base*. Rome, Istituto della Enciclopedia Treccani.

Sierpinska A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24-36.

Speranza F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologne, Pitagora.

Tornatore L. (1974), *Educazione e conoscenza*. Turin, Loescher.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.

Vygotskij L.S. (1960), *The development of higher forms of attention in* childhood. In: Werscht J.V. (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk NY, Sharpe 1981, 189-240. La I édition russe remonte au 1960, Moscou, Izd. Akad. Pedag.

Vygotskij L.S. (1962), *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. Il s'agit d'un résumé tiré de l'édition originale en langue russe, un recueil d'articles publiés à Moscou en 1956. Ed. française: 1985, Paris, éd. Sociale. Ed. italienne: 1990, Bari Laterza.

J'exprime mes remerciements les plus sincères à mon ami et collègue Juan Godino, de l'Université de Grenade, qui m'a aidé en me conseillant quelques textes et en acceptant de lire de manière critique quelques versions précédentes de ce travail.