

DE L'ARITHMÉTIQUE A L'ALGÈBRE ET A L'ANALYSE MATHÉMATIQUE ¹

PAR

Henri LEBESGUE †

Aucune connaissance humaine n'est isolée des autres; à mesure que les sciences progressent, les barrières que l'on avait cru pouvoir élever entre elles s'écroulent et leur caractère conventionnel apparaît plus nettement. Il y a longtemps que l'opposition entre sciences physiques et biologiques est disparue; les modifications de caractères, de pensées, de comportement, qu'entraînent par exemple la fatigue, la faim, la maladie, l'ivresse, suffiraient à montrer qu'il y a aussi des connexions entre les sciences biologiques et morales. C'est donc en vain qu'on prétend délimiter, caractériser une science. Pourtant, en plus des hasards du développement historique de nos connaissances et de nos habitudes routinières, il y a des raisons valables qui justifient les groupements existant sous le nom de sciences, et il est intéressant d'essayer de dégager ces raisons: Elles ne sont ni péremptoires, ni définitives; du moins peuvent-elles nous faire mieux comprendre le travail qui a permis leur édification. D'où ces Introductions qu'on trouve si souvent au début de livres de sciences. Peu importe après tout que certaines de leurs phrases ne puissent prendre toute leur valeur qu'après la lecture du livre entier; elles seront cependant une préparation et un guide utile.

Essayons donc de caractériser l'Analyse mathématique. On pense tout d'abord aux sens philosophiques des mots analyse et synthèse, sens qui, d'ailleurs ont évolué assez au cours des

¹ Ce manuscrit, retrouvé dans les papiers de M. Lebesgue, était destiné à servir de préface à un livre de l'analyse qui semble n'avoir pas été rédigé.

âges pour qu'à certaines époques ils se soient presque inversés. Le plus souvent, cependant, synthèse a été synonyme de construction, édification d'un tout à partir d'éléments et analyse synonyme de décomposition, de dissociation d'un ensemble en ses éléments. Dans un raisonnement synthétique on part de données à l'aide desquelles on bâtit la solution; dans un raisonnement analytique, partant de la solution supposée obtenue, on examine comment s'y trouvent juxtaposées les données.

A ces deux modes historiques de raisonnement, Viète en ajoute un troisième: la Zéthèse.¹ Dans la Zéthèse, on examine conjointement données et inconnues sans faire de distinctions entre elles jusqu'à ce qu'on ait trouvé une relation qui caractérise les unes quand les autres sont connues. Ainsi Viète représente-t-il de la même manière par des lettres les nombres donnés et les nombres inconnus (innovation attribuée souvent à tort à Descartes) et il les combine jusqu'à obtenir l'équation du problème.

C'est évidemment de la Zéthétique que nous nous servons maintenant; mais n'est-ce pas de la Zéthétique que l'on s'est toujours servi? Combiner des données et tenter la synthèse ne fournira la solution que si l'on s'est assigné un but et que l'on sait la voie qui y mène. De même, accumuler des pierres au hasard ne construirait ni une pyramide ni une maison: la synthèse ne conduit au but assigné que si, à chaque pas on examine par une sorte d'analyse si l'on a marché vers la solution.

De même, l'analyse d'un monument peut être faite de mille manières suivant qu'elle est entreprise par un architecte, un archéologue, un sociologue, un géologue, etc. qui interprète différemment le tout.

Il faut donc prendre en considération à la fois données et inconnues, tout et parties: la synthèse pure, l'analyse pure ne seraient que l'exploitation de la chance. Il n'y a donc pas à opposer analyse et synthèse: tout raisonnement est constitué par une analyse et une synthèse en marche constante l'une vers

¹ En réalité, Viète distingue trois parties dans le mode de raisonnement qu'il envisage: la Zéthétique, la Poristique, la Rhétorique ou Exégétique, mais la seule vraiment examinée par lui et la seule intéressante est la Zéthétique. Le mot Zéthèse a été utilisé par plusieurs des traducteurs de Viète.

l'autre. On pourra avoir pris conscience davantage des efforts de synthèse, ou bien des efforts d'analyse, mais en réalité il s'agit toujours de la zéthèse de Viète. Celui-ci s'est trompé en prétendant ajouter la zéthèse à la synthèse et à l'analyse. Synthèse et analyse sont parties indispensables de tout raisonnement.

Les conceptions de Viète n'ont guère été remarquées, encore que le « mouvement continu » de pensées dont parle Descartes dans ses *Regulae*, qui permet d'embrasser l'ensemble d'une question soit fort voisin de la zéthèse. On continua donc à parler de synthèse et d'analyse; l'opposition entre « géométrie des anciens » et « géométrie de M. Descartes » devint celle de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique. Non pas que la Géométrie de Descartes soit un exposé analytique: on sera en particulier plutôt frappé de l'arbitraire des constructions que l'on trouve dans cet ouvrage! Une seule idée directrice apparaît nettement: l'idée de Viète suivant laquelle la géométrie peut être efficacement abordée par l'algèbre si l'on perfectionne celle-ci. Mais quand les coordonnées cartésiennes eurent fait leurs preuves (remarquons que Descartes ne les introduisait qu'incidemment et comme exemple, alors que Fermat les utilisa plus systématiquement, donnant par exemple l'équation de la droite), quand on oublia presque qu'il y avait d'autres systèmes de nombres susceptibles de déterminer des points, on eut un moyen à peu de chose près mécanique d'aborder les problèmes. Tandis que, dans l'exposition d'Euclide, l'inspiration, l'initiative apparaissent comme indispensables au chercheur, beaucoup plus même peut-être qu'il n'est vrai, on eut l'illusion qu'avec les coordonnées de Descartes, une « méthode » était créée qui permettait à tous d'obtenir des résultats valables sans aucune initiative: c'est bien là, en somme, ce que promet Descartes. Or une exposition analytique fait souvent paraître les raisonnements si simples qu'ils semblent n'avoir exigé aucune initiative, ce qui rapproche *analytique* et *méthodique*.

Et puis, comment la notion de courbe se transforme-t-elle? Pour les anciens, une courbe était construite comme lieu de points. Dans la géométrie nouvelle, elle est donnée comme un tout par son équation, tout d'où l'on extrait ensuite des points par une analyse. A ces raisons, mauvaises ou médiocres, ajoutons qu'une

tradition fort ancienne avait attaché déjà le mot « analyse » à diverses utilisations du nombre, peut-être parce que le nombre-longueur résulte d'une analyse, d'une décomposition en segments et apparaît comme formé d'unités et de fractions d'unités qui, tant qu'on ignore les irrationnelles, durent être considérées en quelque sorte comme les éléments premiers, les atomes constituant cette longueur.

Quelles que soient les raisons qui firent donner de nouvelles acceptions aux mots « analyse », « analytique » au XVII^e siècle, on divisa les mathématiques pures en géométrie et analyse : l'analyse traitait des nombres ; était analytique ce qui relevait du calcul. Mais comme les parties anciennes des mathématiques étaient déjà dénommées, le mot « analyse » fut surtout employé pour les chapitres nouveaux.

LE CALCUL DES GRANDEURS DE VIÈTE

L'arithmétique traitait des entiers et des combinaisons d'entiers telles que les fractions ; elle ne constituait cependant pas une science fermée : l'extraction des racines donne en effet des nombres irrationnels. Les Grecs, s'étant refusé à les considérer comme nombres, bien que la géométrie obligea à les considérer (existence de la diagonale d'un carré de côté donné par exemple), en firent l'objet d'une sorte de nouvelle arithmétique, l'arithmétique des grandeurs, et cela sans bien s'en rendre compte. Viète resta fidèle à la conception grecque, mais il explicita qu'il s'agissait d'un calcul. Il ne le définit pas mieux que les anciens. Pour lui le produit de deux longueurs est encore, comme pour les Grecs, une aire, et le produit d'une aire par une longueur est un volume. Quant à celui de deux aires par exemple, on en parle, on l'utilise, mais sans le définir. Cela semble bien étrange avec nos habitudes actuelles, mais pour Viète, comme pour les Grecs, il s'agissait moins de construire un édifice logique impeccable que d'étudier, de combiner des notions données ou suggérées par le monde physique et dont on estimait avoir une vue claire. Les notions d'addition, de multiplication, claires pour les entiers, apparaissaient comme ayant des conséquences inévitables (celles par exemple que nous noterons $a.b = b.a$,

$a(b+c) = ab+ac$). Or comme on avait toujours admis le caractère universel des mathématiques, on crut que, par exemple, les conséquences précédentes appartenaient aussi à tout ce qui ressemblait à la multiplication, à tout ce qu'on croirait pouvoir dire être une multiplication. Certes, une telle *loi de continuité*, d'universalité est très dangereuse et elle a conduit à bien des erreurs, mais elle est aussi à l'origine d'à peu près tous les progrès importants; ici elle permit à Viète, partant des propriétés qu'il admettait implicitement, de faire correctement quelques démonstrations, très peu nombreuses d'ailleurs. Et ainsi il opère à peu près comme dans une algèbre moderne où l'on dirait par exemple: multiplier deux éléments, c'est leur associer un troisième élément, l'association ayant telles et telles propriétés; seulement, maintenant, on explicite ces propriétés. C'est ainsi que Viète assoit son calcul des grandeurs, calcul parallèle au calcul sur les nombres (comme on le voit chaque fois qu'aux grandeurs correspondent des *nombres-nombrants*), mais essentiellement différent dans l'esprit de Viète et comme dans l'esprit de ses contemporains immédiats qui examinaient les choses philosophiquement.

Pour tous, ce qui apparaît comme un progrès tangible, pratique et non plus philosophique, c'est la possibilité d'appliquer les mêmes calculs aux nombres et aux grandeurs, c'est-à-dire, puisque les grandeurs considérées étaient géométriques, d'appliquer l'algèbre à la géométrie.

L'ALGÈBRE

La civilisation arabe nous a transmis la numération décimale et l'algèbre. Suivant une judicieuse observation d'Abel Rey, les Arabes purent arriver à l'algèbre parce qu'ils disposaient de chiffres pour la numération, alors que chez les Grecs et les Romains, les lettres, servant de chiffres, n'étaient pas disponibles. A ce point de vue, ce qui caractériserait l'algèbre, ce serait sa notation. Cette caractérisation a souvent paru insuffisante à ceux qui ont essayé de donner des réponses à ces pseudo-questions: Qu'est-ce que l'arithmétique? Qu'est-ce que l'algèbre? Certes, le remplacement du discours par une notation n'entraîne

de changement ni dans la méthode ni dans l'objet de la science et est, du point de vue philosophique, tout à fait accessoire. Pratiquement, au contraire, cela est d'importance essentielle. On ne doit donc pas s'étonner si, pour les contemporains de Viète comme pour nos jeunes élèves, faire de l'algèbre, ce soit essentiellement utiliser une notation. Et cela entraîne en fait une modification extrêmement importante dans le travail intellectuel: s'il n'est pas vrai que l'algèbre-notation dispense de preuves, elle pense cependant souvent à la place de celui qui l'emploie: les maîtres des jeunes élèves peuvent, en algèbre, les dresser à un mécanisme; c'est en arithmétique qu'ils les font raisonner.

Ainsi, la grande nouveauté de l'algèbre, c'est l'emploi des lettres.

Avec Viète, il s'agit, non seulement des nombres nombrants mais aussi des grandeurs, c'est-à-dire, en somme, des nombres réels les plus généraux. Et c'est ce que l'on retint surtout de son œuvre en la perfectionnant, bien que la notion de nombre réel le plus général ne fut élucidée entièrement qu'au XIX^e siècle. Les successeurs immédiats de Viète oublièrent à peu près complètement les précautions qu'avaient prises celui-ci; on ne retint que quelques préceptes relatifs à l'homogénéité. Sans dire ce que c'est qu'un nombre, sans bien préciser comment on attache un nombre aux grandeurs ni ce que signifient les opérations, on ne parle plus que de nombres; seulement ces nombres ne sont plus seulement les nombres rationnels; ce sont les nombres réels généraux. C'est là, si l'on veut délimiter arithmétique et algèbre, ce qui pourrait servir à distinguer ces sciences.

ANALYSE

Mais à quoi réservera-t-on le nom d'analyse? L'arithmétique et l'algèbre ne recouvrent-elles pas toute l'étude du nombre? Nous avons vu que Viète était passé du nombre nombrant aux grandeurs, entraîné par des idées de continuité, d'universalité. C'est de la même façon que, peu de temps après Viète, on appliqua le calcul à de nouveaux éléments. En même temps que se perfectionnaient les notations de Viète des progrès étaient

faits en géométrie par un retour à des modes de raisonnement d'Archimède avec les *indivisibles* de Cavalieri, de Roberval, de Pascal et de Descartes lui-même. Nés du besoin de décomposer une aire ou un volume en éléments ordonnés comme un segment est décomposé en points ordonnés, ils apparaissent comme repérables par des nombres, ainsi que les points eux-mêmes. Il n'est donc pas étonnant qu'on leur ait vite appliqué les notations et les calculs de l'algèbre : ce fut l'analyse des infiniments petits, le calcul différentiel et intégral, l'*analyse infinitésimale*, comme nous disons encore pour l'opposer à l'algèbre ou *analyse algébrique*.

Quelle différence pouvons-nous aujourd'hui apercevoir entre ces analyses ? Ce ne peut plus être les objets sur lesquels elles portent. Les fantômes qu'étaient les infiniments petits ou les différentielles se sont évanouis ; l'une et l'autre s'occupent des nombres réels.

Quand on examine les groupements de questions que l'on appelle algèbre ou analyse, groupements variables d'un pays à un autre, d'un enseignement à un autre, on remarque vite qu'en algèbre l'emploi de l'infini ou de l'indéfini est masqué ! Il faut un peu d'attention pour l'apercevoir, alors qu'il s'étale en analyse où le mot *limite* revient à chaque ligne.

Pour atteindre le nombre en général, on effectue une suite indéfinie d'opérations d'approximation. On sait que cela arrêta les Grecs et qu'aujourd'hui encore certains sont troublés par cette intervention de l'infini. Pourtant nous utilisons tous sans scrupule et sans peur la notion de point ; or les stades successifs d'approximation des nombres sont en exacte correspondance avec les « rapetissements » qui font passer de l'idée de corps à celle de point ; parler de points ou de nombres, c'est parler d'une même chose en deux langues différentes, décrire sous deux aspects une même notion qui exige impérieusement la considération de l'infini. On ne peut donc raisonnablement condamner l'une des façons de parler et admettre l'autre !

Si les Grecs ont eu l'impression d'avoir écarté l'indéfini, c'est qu'ils ont regardé le point comme une notion première, une donnée intellectuelle sans se soucier de son origine physique. Si Viète ne parle pas d'indéfini ou d'infini, c'est qu'il admet

comme claires les notions de longueur, aires, volumes et les calculs sur ces notions. Si les algèbres modernes ne font aucun appel à l'infini, c'est qu'elles s'occupent d'éléments abstraits non précisés et d'opérations sur ces éléments dont on sait seulement qu'elles possèdent telle ou telle propriété. L'éclaircissement de toutes ces bases de l'étude et le rattachement des éléments et des calculs au nom de physique quand on les particularise, quand, par exemple, il s'agit de nombres réels, pourra exiger l'emploi de l'infini, mais l'algèbre n'en a cure: elle ne s'occupe, elle, que des conséquences obtenues par des calculs finis à partir des prémisses, calculs qui, bien entendu, ne sont qu'exceptionnellement des calculs numériques; le plus souvent, les opérations se réduisent à l'association toute intellectuelle d'un élément résultat du calcul aux éléments donnés de ce calcul.

Cette façon de définir une algèbre convient assez bien pour caractériser les ensembles de considérations rassemblées ordinairement comme constituant l'algèbre ordinaire, ou des nombres réels. L'Analyse apparaît alors comme devant grouper tout ce qui est au-delà des calculs finis, tout ce qui exige des appels répétés à la notion d'infini, au passage à la limite, à l'emploi de suites infinies d'opérations etc. Les calculs qu'on y fera auront une signification numérique, mais seulement comme calculs d'approximation.

Bien entendu cette distinction entre algèbre et analyse est vague et sujette à bien des objections. On peut être choqué, par exemple, par le fait que l'un des théorèmes fondamentaux de l'algèbre, le théorème de d'Alembert, soit à classer dans l'analyse. Mais c'est un fait que ce théorème est si différent de la plupart des considérations algébriques qu'on préfère souvent l'admettre sans démonstrations dans les livres d'algèbre. On pourra noter aussi que le classement de certaines recherches sera bien difficile: la démonstration de la transcendance de π sera-t-elle de l'analyse à cause du nombre π , de l'algèbre à cause de la considération de polynômes, de l'arithmétique parce que ces polynômes sont à coefficients entiers? Mais ces remarques et autres analogues n'enlèvent rien à la valeur des distinctions que nous venons d'établir entre arithmétique, algèbre et analyse; elles nous

mettent seulement en garde contre toute exagération : propriétés arithmétiques, algébriques, analytiques sont voisines mais celles que l'on groupe dans une de ces sciences sont encore plus voisines.

POINT DE DÉPART D'UN LIVRE D'ANALYSE

Parce que nous ferons de l'analyse, il serait puéril et dangereux de prétendre ignorer l'arithmétique et l'algèbre et de ne faire aucun appel à ces chapitres de la science mathématique. Bien au contraire. En analyse, nous devons aller au-delà des calculs numériques effectuels, mais c'est de ces calculs qu'il nous faudra partir et à ces calculs qu'il nous faudra aboutir ; en partir, car toute découverte qui s'est révélée utile s'est d'abord faite pour un cas particulier justiciable d'un calcul, ou encore a été observée au cours d'un calcul ou suggérée par lui ; y aboutir, car toute application reposera sur les approximations numériques finalement obtenues.

Ainsi, les points de départ sont des « faits de calcul » qui forment lien entre l'algèbre ou l'arithmétique et l'analyse. J'ai essayé de le faire sentir dans ce livre. Je dis seulement « faire sentir » car les points de départ véritables sont souvent inconnus, et, quand on les connaît, on ne peut les exposer que sous une forme si modifiée qu'on s'écarte toujours beaucoup de la vérité historique ; il faut en effet traduire en langage et notations modernes les écrits des auteurs anciens, abréger des calculs trop longs et d'autre part les compléter pour atteindre la correction logique. Je me suis donc borné à ne présenter comme des points de départ que des faits particuliers qui avaient été effectivement obtenus avant d'être incorporés dans une théorie générale, me refusant par contre à remplacer un raisonnement par une constatation de calcul comme on le fait parfois pour des raisons de brièveté. J'ai tenu à le faire pour bien marquer l'importance qu'a, dans le développement de la science, la découverte des faits particuliers.

LES THÉORIES GÉNÉRALES

En mathématiques, le progrès part du fait particulier ; c'est d'abord quelque chose qui surprend, que l'on dit être une obser-

vation curieuse ou un artifice, un truc; puis d'autres faits sont reconnus qui paraissent analogues, ou bien des liens apparaissent entre le fait nouveau et des faits anciens. Puis les modes de démonstration sont peu à peu rapprochés et l'on finit par obtenir une démonstration valable pour tous les faits déjà connus et même pour d'autres: la théorie générale est acquise.

Au cours des efforts qu'elle a nécessités, on s'est familiarisé avec le fait initial, il a cessé d'être isolé, on a appris à l'utiliser et l'étonnement primitif a disparu. La théorie générale satisfait ainsi notre besoin de comprendre, car comprendre, c'est essentiellement ne pas être surpris, c'est avoir intégré la chose comprise dans un tout familier. C'est aussi savoir l'utiliser et ceci est le rôle proprement mathématique de la théorie générale: si elle ne faisait que grouper des faits connus sous un même énoncé, sous une même démonstration, elle serait une économie, pratiquement précieuse certes mais sans importance capitale. Mais elle fait plus; elle nous apprend à nous servir des faits et des raisonnements pour découvrir et démontrer des faits nouveaux: nous avons ce qu'on appelle une *méthode*.

Pour que des considérations méritent toute l'estime due aux théories générales, il faut qu'il s'agisse à la fois d'un répertoire de faits déjà connus et d'une mine fournissant des résultats nouveaux. La généralité logique ne suffit pas. Cette phrase: « Les mathématiques se réduisent à la proposition: tout A est A » est sans doute ce que l'on peut écrire de plus général! Qui prétendrait pourtant qu'après elle il n'y a plus rien à faire en mathématique ou même seulement que cet aphorisme a été de quelque utilité pour notre science? La généralité n'est donc pas par elle-même une vertu; ainsi ne faut-il pas, pour l'obtenir, aller jusqu'au fumeux, jusqu'au point où l'on ne sait plus nettement ce que l'on dit.

Les théories générales doivent rester assez particulières et simples pour parler encore à notre imagination. Dire « le résultat de X est un cas particulier de ma théorie » peut être exact mais est injuste et ne peut avoir d'autre effet que de décourager X si la vérité exigeait d'ajouter: « mais personne ne s'en était douté » ou même souvent « Il est vraisemblable que personne n'aurait jamais tiré ce fait de ma théorie ». Etre une mine de

résultats nouveaux, ce n'est pas seulement les contenir logiquement, c'est les fournir pratiquement; ce n'est pas d'après sa seule extension logique qu'on doit juger de l'intérêt d'une théorie générale, mais plutôt d'après la façon dont, nous faisant mieux comprendre, elle nous permet de mieux utiliser.

Enfin, il ne faut pas oublier que la théorie générale n'est qu'une étape dans le progrès mathématique; ce n'est encore que la compréhension savante. Il y a une compréhension beaucoup plus complète, atteinte seulement après des années et parfois des siècles d'utilisation, grâce aux efforts conjugués des travailleurs anonymes qu'on appelle les Professeurs et dont les apports sont aussi indispensables au progrès que l'imagination des inventeurs et la pénétration des bâtisseurs de théories. Ainsi de la compréhension savante dont nous étions naïvement fiers en songeant aux difficultés vaincues, nous passons, en comprenant mieux, à l'étape suivante: nous constatons que les difficultés n'existent pas; nous les avons créées nous-même. Ce qui a été fait apparaît alors simple, naturel, pour tout dire, tout tracé et nous avons acquis mieux qu'une théorie; nous possédons une sorte de réflexe nouveau. Il ne s'agit plus d'un progrès scientifique, mais d'un progrès humain.

Il est clair qu'un tel progrès ne relève pas de la seule logique; de toutes les qualités que doit avoir le mathématicien, c'est même peut-être la précision déductive qui joue le moindre rôle.

Je voudrais que ces remarques encouragent les jeunes à développer leur imagination, leur intelligence, leur compréhension scientifique sans se laisser entraîner par telle ou telle mode, et évitent de n'attacher d'importance qu'à certaines de leurs qualités. Qu'ils ne croient pas qu'ils gagneraient à s'efforcer de spécialiser leurs talents: ils deviendraient des virtuoses sans personnalité ayant de la science une vue étriquée — même si c'était à la construction d'une théorie générale qu'ils s'étaient voués. Faits particuliers et théories générales sont également indispensables aux progrès de la science; on doit également louer ceux dont l'imagination, la perspicacité ont permis de trouver les faits et ceux dont l'intelligence compréhensive et organisatrice ont permis de bâtir les théories. Au reste, nul

ne fera rien s'il n'a pas dans une certaine mesure toutes les qualités indiquées. En outre, de la compréhension savante, scientifique, à la compréhension plus complète signalée plus haut, qui fait appel, non plus au savoir, mais au bon sens, il n'y a que des différences de degré; s'arrêter à la première ou persévérer pour atteindre la seconde, cela dépend moins des qualités que des goûts: aimer savoir plus ou aimer comprendre mieux.

ERRATA

Balth. VAN DER POL: *Démonstration élémentaire de la relation*
 $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$ *entre les différentes fonctions de Jacobi.*

Enseignement mathématique (tome I, fasc. 4, 1955)

Page 259, ligne —5: lire $m - n = 2k + 1$

Page 259, ligne —3: lire $m = l + k + 1$

Page 260, ligne 5: lire (3) au lieu de (3

Page 260, formule 4: lire $\theta_3^2(0, \tau) = \theta_3^2(0, 2\tau) + \theta_2^2(0, 2\tau)$

Page 260, ligne —5: lire $+\sum\sum(-1)^{2l+1}q^{2\{(l+\frac{1}{2})^2+(k+\frac{1}{2})^2\}}$
