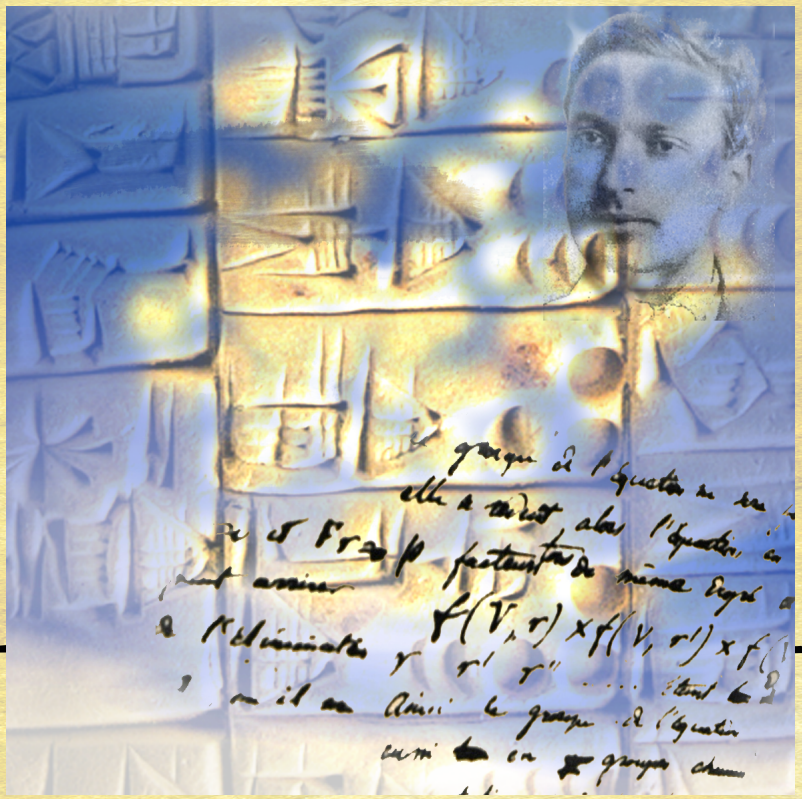
Groupe Premier Cycle

Éléments 0



irem Toulouse

Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse

SOMMAIRE

• **Présentation** ..... page 3

• **Modèles d'apprentissage**

Comment apprend-on ? ..... page 5

L.S. Vygotski : sa vie, son oeuvre ..... page 11

Michel BROSSARD « Concepts quotidiens, concepts scientifiques chez L.S. Vygotski » ..... page 16

• **Quelques expérimentations dans nos classes**

Une activité en classe de cinquième ..... page 29

• **Des erreurs** ..... page 33

• **Contributions**

Francis REYNES « Le concept d'égalité : clef ou verrou ? » ..... page 48

Luis RADFORD « Narratives, expressions algébriques et calcul formel : de la constitution à la transformation du sens » ..... page 65

PRÉSENTATION

Les pratiques de tout enseignant ont toujours une histoire singulière. Mais pour chacun des membres de notre groupe, ces histoires ont un point commun : elles s'enracinent toutes autour de la question : « comment l'élève apprend-il ? »

Tous, à un moment ou un autre, nous nous sommes posé cette question qu'un professeur ne peut que se poser "comment apprend-on ?". Nous avons alors recherché ce qu'en dit la psychologie de l'éducation. Et nous avons expérimenté dans nos classes. Quelques-uns d'entre nous, à un certain moment, ont pu être attirés par le behaviorisme ou par la pédagogie par objectifs. D'autres, par le constructivisme individuel de Piaget. Nous avons lu, en partie, Guy Brousseau et sa théorie des situations didactiques. Nous avons essayé quelques-unes de ses situations fondamentales dans nos classes. Nous avons tenté d'institutionnaliser, pris garde aux effets de contrat, aux obstacles épistémologiques. Quelques membres du groupe ont aussi construit des situations-problèmes qui les ont un instant séduits. Mais, à la fin, et pour faire vite, nous avons tous ressenti, à des degrés divers, un sentiment d'insatisfaction face aux réactions de nos élèves. Par exemple, les hypothèses formulées par les constructivistes piagétiens, ou par les socio-constructivistes, sur le rôle du conflit socio-cognitif dans la construction des connaissances, nous ont semblé partielles et réductrices face à nos observations. Le rôle du langage ou encore celui des représentations de l'apprentissage chez l'enseignant, entre autres, nous sont apparus négligés par ces modèles. Et surtout, les difficultés de nos élèves, même de ceux que l'on qualifie de "bons élèves", demeuraient sans explication générale satisfaisante.

Et puis nous avons été amenés à rencontrer l'œuvre de Vygotski et nous nous y sommes intéressés. Nos lectures, enrichies par nos débats internes, nous ont alors apporté un nouvel éclairage des phénomènes d'apprentissage dans nos classes, mais aussi des perspectives quant à nos pratiques d'enseignement. Notre expérience de formateurs dans des stages de formation continue destinés à nos collègues de mathématiques a encore renforcé la conviction qu'il fallait approfondir nos interprétations et nos démarches explicatives fondées sur les orientations théoriques proposées par Vygotski. Puis, de discussions en discussions, il nous a semblé qu'il pouvait être opportun de présenter notre lecture de Vygotski.

« Éléments 0 » inaugure donc une série de brochures « périodiques » (à périodicité variable) intitulées « Éléments n ». Y seront exposées des lectures possibles de l'oeuvre de Vygotski par l'intermédiaire d'articles écrits soit par notre groupe, soit par des spécialistes : dans ce premier numéro, nous reproduirons quelques pages du livre de Michel Brossard, professeur émérite en psychologie du développement à l'Université de Bordeaux 2, intitulé *« Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation* » concernant les processus de conceptualisation. On y trouvera également des comptes rendus d'expérimentations menées dans nos classes, des réflexions diverses sur l'enseignement des mathématiques qui illustreront l'évolution de nos idées.

Les publications de départ concerneront l'enseignement des nombres et de l'algèbre, puisque c'est dans ce domaine que porte l'essentiel de nos recherches. L'importance de cet enseignement, les difficultés qu'il soulève, ne sont plus à démontrer : il est déterminant pour la formation de l'esprit mathématique de l'élève et la maîtrise des

concepts algébriques est indispensable pour la poursuite des études en mathématiques.

Mais ces publications ont aussi une autre ambition : celle de jeter un pont entre le terrain et la recherche en faisant connaître les travaux de divers auteurs et, en particulier, celle de chercheurs en didactique des mathématiques. C'est ainsi que dans cette première brochure, on pourra lire un article de Luis Radford, professeur de sciences de l'éducation à l'université laurentienne d'Ottawa et un autre de Francis Reynes, animateur à l'IREM de Bordeaux.

Enfin, considérant la discussion comme essentielle aux progressions de la pensée, nous tenterons, par ces publications, de créer un espace de débat ouvert : d'une part, à la diffusion des réactions suscitées par nos propositions ou par les articles publiés, d'autre part, à toute contribution extérieure, que nous incorporerons volontiers dans nos futurs numéros.

Bonne lecture.

COMMENT APPREND-ON ?

Toute pratique enseignante repose sur des présupposés psychologiques. En particulier, elle concrétise, pour une part, les conceptions de l'apprentissage implicites ou explicites de l'enseignant.

Si ce dernier choisit de dire et de montrer le savoir, c'est qu'il présume, consciemment ou inconsciemment, qu'ainsi il favorisera l'apprentissage du plus grand nombre possible de ses élèves dans le temps imparti et qu'il permettra les apprentissages ultérieurs. S'il préfère une fiche d'activités où des questions relativement faciles s'enchaînent jusqu'à la "découverte" du savoir visé, c'est qu'il prétend que dire le savoir ne suffit pas. C'est aussi qu'il pense que sa fiche d'activités, ainsi conçue, facilitera davantage la construction du savoir de ses élèves ou aidera à l'apprentissage d'un plus grand nombre d'élèves, ou encore, fera moins obstacle aux futurs apprentissages. S'il suit une autre voie encore, c'est qu'il suppose que les deux premières ne conviennent pas et qu'il faut donc envisager un autre mode d'enseignement.

Mais, quoi qu'il en soit, ses choix seront autant de réponses partielles et temporaires à la question cruciale de la psychologie de l'éducation : « comment apprend-on ? »; ou à celle, voisine mais non semblable, de tout praticien de l'enseignement : « comment favoriser l'apprentissage du plus grand nombre, sans faire obstacle aux apprentissages à venir, dans le temps imparti ? ».

En s'appuyant sur les recherches en psychologie, on peut repérer trois grands types de réponses à cette question qui semblent inspirer les pratiques enseignantes en mathématiques aujourd'hui.

I. Le modèle transmissif

Cette conception de l'apprentissage, héritée des pédagogies traditionnelles, est en fait rarement exprimée et fonctionne comme une « conception spontanée ».

Pour elle, l'apprentissage se résume à un enregistrement en mémoire du savoir exposé par l'enseignant, comme si ce savoir s'imprimait directement dans le cerveau de l'élève telle une pellicule photographique. L'acte d'enseigner y est donc central. C'est l'enseignant qui dit et montre le savoir, le construit et le structure. Il n'y a rien à apprendre lorsqu'il ne parle pas ou ne montre pas.

L'élève, lui, écoute attentivement et reçoit le savoir dans sa tête supposée vide. Il est modelé de l'extérieur et doit s'adapter aux activités magistrales ou interrogatives proposées par l'enseignant dans une situation de communication collective et verticale.

En conséquence, un enseignement parfaitement réussi serait un exposé où l'enseignant ne commettrait aucune erreur, suivi d'un test où l'élève montrerait par des réponses justes qu'il a parfaitement compris. C'est le modèle "j'apprends/ j'applique".

I.1. Limites du modèle transmissif

Jean PIAGET (1896-1980) souligne comme un résultat important de ses travaux la faillite expérimentale de cette conception transmissive qui confond apprentissage et enseignement. En effet, ce modèle sous-estime le rôle de l'élève et de ses processus

cognitifs dans la construction de son savoir. Il ne laisse aucune autonomie à l'élève en dehors des phases de réinvestissement. Il prétend que le sens du message que l'enseignant pense communiquer est le même que celui que l'élève croit percevoir. De nombreuses études montrent qu'il n'en est rien. Elles montrent aussi que l'esprit n'est pas assimilable à une cire vierge.

« Quel que soit son âge, l'esprit n'est jamais vierge, table rase ou cire sans empreinte » écrit Gaston BACHELARD (1884-1962).

Illustration : Les limites de la transmission…

Un professeur de mathématiques explique à un élève la notion de limite. Il lui montre comment calculer $\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8}$. À la fin de l'exercice, il demande à l'élève attentif s'il a compris. Oh oui monsieur, j'ai tout compris. N'y croyant qu'à moitié, il lui pose l'exercice suivant : calcule $\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5}$.

Et l'élève de résoudre : puisque $\lim_{x\ 8^+} \frac{1}{x\#8}.= +\infty$, alors. $\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = +$ ∽ .

I.2. Statut de l'erreur

Dans l'idéal transmissif, le maître mais aussi l'élève ne doivent pas se tromper. En effet, l'erreur pourrait créer de mauvais réflexes ou s'imprimer dans la tête de ce dernier. Il faut donc dresser un barrage à l'erreur. Si toutefois un élève commettait une erreur, la seule remédiation possible serait d'expliquer à nouveau ou de refaire apprendre en lui demandant d'être plus attentif. Et, en dernier ressort, de faire redoubler l'élève pour de nouvelles explications.

II. Le modèle behavioriste

Le behaviorisme ou comportementalisme est né au début du XXe siècle aux États-Unis. Il est apparu comme une rupture avec la tradition psychologique introspective qui dominait alors. Il a marqué la naissance de la psychologie comme domaine scientifique propre. Ce courant a dominé les recherches en psychologie de la Première Guerre Mondiale à la fin de la seconde.

Rejetant toute référence à la conscience, le behaviorisme s'applique à étudier scientifiquement le comportement (behaviour, en anglais) de l'animal ou de l'homme défini comme « l'ensemble des réactions objectivement observables qu'un organisme généralement pourvu d'un système nerveux oppose aux stimuli, eux aussi observables, dans le milieu dans lequel il vit » (WATSON, 1878-1958). Historiquement, cette étude s'est étendue aux analyses des apprentissages humains et au domaine de l'éducation.

L'apprentissage y est défini comme la capacité à donner la réponse adéquate à des stimuli donnés. Il est envisagé comme un processus mécanique dans lequel les comportements de l'apprenant sont déterminés par les renforcements rencontrés : les "bonnes" réponses sont récompensées et reproduites, les "mauvaises" réponses punies et abandonnées. C'est l'apprentissage par conditionnement.

SKINNER (1904-1990), psychologue behavioriste, a élaboré une théorie du conditionnement opérant qui se distingue du conditionnement classique : selon ce point de vue, l'individu est actif, apprend en observant les conséquences de ses actes et en

recevant des renforcements. Si le comportement procure du plaisir, il sera reproduit. Sinon, il sera abandonné. Cette conception de l'apprentissage a donné à SKINNER les principes de l'enseignement programmé. Celui-ci consiste pour l'enseignant à proposer des situations où la matière à enseigner est découpée en unités aussi élémentaires que possible. Ces situations doivent permettre à l'élève d'agir, de le faire travailler par étapes, et de renforcer au fur et à mesure ses acquisitions dans le sens d'une modification des comportements programmée par l'enseignant. C'est en fait à cette conception qu'implicitement les enseignants se réfèrent, quand, pour introduire une notion, ils proposent aux élèves une fiche dite de "découverte" qui contient un grand nombre de questions relativement faciles.

Décomposition en sous-compétences de l'addition selon Thorndike (1874-1949)

• *Apprendre à se concentrer sur les chiffres colonne par colonne pour les additionner (pour les enfants, le passage de la connexion 8 + 7 = 15 à la connexion 38 + 7 = 45 ou à la connexion 68 + 27 = 95 n'est nullement évident) ;*

• *Apprendre à garder en mémoire le résultat de chaque addition jusqu'à avoir obtenu le résultat de l'addition suivante ;*

• *Apprendre à ajouter le report lors de l'addition suivante ;*

• *Apprendre à négliger les 0 à l'intérieur des colonnes ;*

• *Apprendre à négliger les espaces vides à l'intérieur d'une colonne ;*

• *Apprendre à ne pas écrire l'entièreté du résultat d'une addition, mais seulement le nombre correspondant à l'unité; en particulier, apprendre à écrire le 0 lorsque le résultat de l'addition est 10.*

II.1. Limites du modèle behavioriste

Même si le modèle behavioriste a permis des progrès dans la connaissance des mécanismes élémentaires d'apprentissages simples, il constitue une réduction de la réalité. Il ne permet pas de rendre compte des apprentissages complexes, comme l'acquisition de la lecture. De plus, les méthodes qui s'en inspirent font de l'élève un simple exécutant qui n'a pas conscience des buts visés et ne comprend pas la signification de ses actes. Les savoirs nouveaux viennent se superposer les uns aux autres sans jamais s'enchevêtrer ni se restructurer. Savoir débrayer, savoir accélérer, savoir freiner, savoir tourner le volant ne signifie pas que l'on sache conduire !

Pourtant l'influence indirecte du behaviorisme demeure grande. L'enseignement assisté par ordinateur ou la pédagogie par objectifs en sont fortement imprégnés.

II.2. Statut de l'erreur

Dans toutes les conceptions inspirées du béhaviorisme, l'enseignement est fondé sur le découpage des connaissances. L'élève progresse pas à pas, l'apprentissage étant renforcé par des constats de réussite. L'erreur est donc à éviter. Si, toutefois elle survenait, c'est que l'élève n'aurait pas maîtrisé certains prérequis indispensables. Ou que la connaissance n'aurait pas été décomposée en éléments suffisamment petits pour être confondue avec une réponse adaptée à un stimulus.

III. Les modèles constructivistes

La grande majorité des travaux de didactique s'écartent de la conception transmissive ou behavioriste sous ses différentes formes. Beaucoup d'entre eux empruntent un certain nombre d'hypothèses issues de recherches en psychologie cognitive et en psychologie sociale que l'on peut cataloguer de constructivistes.

III.1. Le constructivisme individuel de Jean PIAGET

L'influence de Jean PIAGET (1896-1980) fondateur de l'épistémologie génétique est considérable en psychologie cognitive. Ses grands concepts théoriques se sont avérés très productifs dans la recherche sur le développement cognitif. Nous retiendrons ici quelques hypothèses importantes.

III.1.1. Construction de la connaissance

Pour PIAGET, la construction de la connaissance est le résultat d'un processus d'interaction entre le sujet et le milieu, processus qui produit un système de connaissances organisées qui ne peut se réduire à une simple accumulation. Schématiquement, on peut dire que toute connaissance nouvelle est confrontée à la structure cognitive existante afin d'y être intégrée. Le processus adaptatif qui va alors s'engager opérera par assimilation ou par accommodation. L'assimilation, c'est l'appropriation par le sujet d'un élément externe dont la structure est compatible avec le système cognitif existant. L'accommodation est l'adaptation du système cognitif existant aux variations externes qu'il ne réussit pas à assimiler. Ces deux pôles de l'adaptation, assimilation et accommodation, sont indissociables : l'assimilation permet la cohérence du système cognitif, l'accommodation, son adéquation au réel.

Mais l'action constante du sujet sur son environnement peut introduire des perturbations dans le système : certaines acquisitions posent des problèmes, entraînent des conflits intra-psychiques par impossibilité de relier la connaissance nouvelle à la structure cognitive existante. Le sujet répond par des compensations actives, une autorégulation que PIAGET nomme équilibration. Si le déséquilibre est important, l'autorégulation entraînera une restructuration qui tiendra compte des acquisitions nouvelles et sera donc plus solide, plus large et plus générale : on parlera, dans ce cas, de rééquilibration majorante.

La connaissance se construit donc par des équilibrations successives : tout système cognitif est remplacé par un système cognitif nouveau qui inclut l'ancien, mais qui comble les lacunes du précédent.

III.1.2. Le développement de l'intelligence

Pour PIAGET, biologiste de formation, le développement cognitif est en continuité avec le développement biologique. Les étapes de ce développement suivent un ordre constant et sont nommées stades (stade sensori-moteur, stade pré-opératoire, stade des opérations concrètes, stade des opérations formelles). Chaque stade est caractérisé par une structure d'ensemble commune à tous les sujets d'un même niveau qui permet de prédire certaines acquisitions. Ces différentes structures évoluent progressivement vers une pensée de plus en plus logique. Chaque étape nouvelle est préparée par la

précédente et les structures élaborées à une étape donnée s'intègrent dans l'étape suivante.

III.1.3. Limites des implications didactiques du modèle piagétien

Chez PIAGET, le développement de l'intelligence semble automatique, pour peu que des pathologies graves ne viennent l'empêcher. On ne peut vraiment l'accélérer et tout le monde atteint le stade des opérations formelles. Pour lui, l'apprentissage reste une relation privée entre un sujet, les objets, la tâche, le problème. Les relations sociales entre pairs ou avec un éducateur ne semblent pas prééminentes dans le développement cognitif. Dans ces conditions, on voit mal la place de l'enseignement dans ce développement.

III.2. Le modèle socioconstructiviste

PIAGET admet que des conflits cognitifs peuvent surgir, donc des déséquilibres, puis des équilibrations. Mais ceci reste du domaine du sujet et ne suppose pas essentiellement la présence et la confrontation avec un autre. Plusieurs continuateurs de PIAGET ont remis en cause ce point de vue en insistant au contraire sur les aspects bénéfiques des interactions sociales dans le développement. Pour eux, les acquisitions, à certains moments clés du développement, trouvent principalement leur origine dans des confrontations d'actions ou d'idées avec des partenaires. Les échanges interindividuels deviennent source de progrès cognitifs par les conflits sociocognitifs qu'ils font naître.

Selon DOISE et MUGNY, les progrès induits par le conflit sociocognitif s'expliquent pour trois raisons :

1. Par ce moyen, l'enfant prend conscience de réponses autres que la sienne (même si aucune réponse correcte n'est donnée).

2. L'autre donne des indications qui peuvent être pertinentes pour l'élaboration d'un nouvel instrument cognitif (même si aucune réponse correcte n'est donnée).

3. Le conflit sociocognitif augmente la probabilité que l'enfant soit actif cognitivement.

Mais l'interaction sociale n'est pas supposée induire automatiquement un progrès cognitif.

« Pour être bénéfique, l'interaction sociale doit en même temps assurer le plein déroulement du conflit sociocognitif et non seulement viser une solution purement relationnelle en termes d'entente ou de mésentente. » (DOISE).

III.2.1. Statut de l'erreur

Dans les conceptions constructivistes de l'apprentissage, l'erreur est le résultat de processus d'origine sensée. Il n'est plus question d'y faire barrage, mais, au contraire, elle apparaît comme normale à l'apprentissage. Elle est l'expression ou la manifestation explicite d'un ensemble de conceptions intégrées dans un réseau cohérent de représentations cognitives, qui se dressent en obstacles à l'acquisition et à la maîtrise de nouveaux concepts. Le franchissement de ces obstacles devient alors le projet de l'acte d'enseignement et l'erreur un épisode dans la restructuration et l'élargissement des

connaissances. « La compréhension s'acquiert contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites » (BACHELARD).

Bibliographie

ALTET M., Les pédagogies de l'apprentissage, Puf, 1997.

BACHELARD G., La formation de l'esprit scientifique, J. Vrin, 1938.

CRAHAY M., Psychologie de l'éducation, Puf, 1999.

DOISE W., MUGNY G., Psychologie sociale et développement cognitif, A. Colin, 1997.

Éduquer et former, éditions Sciences Humaines, 2001.

FOULIN J.-N., MOUCHON S., Psychologie de l'éducation, Nathan Université, 1999.

JOSHUA S., DUPIN J.-J., Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, Puf, 1993.

MOAL A., L'approche de « l'éducabilité cognitive » par les modèles du développement cognitif, Éducation permanente, n°88/89, 1987.

PIAGET J., La psychologie de l'intelligence, A. Colin, 1967.

LEV SÉMIONOVITCH VYGOTSKI

I. Repères biographiques

Lev Semionovitch Vygotski est né à Orcha, en Biélorussie en 1896, la même année que Jean Piaget. Sa famille, de confession juive, s'installe à Gomel, ville plus importante de Biélorussie, l'année suivante. Au sein de sa famille règne une riche vie intellectuelle où l'on parle plusieurs langues (en particulier l'allemand). Cela permettra à Vygotski de se documenter sur tous les travaux de philosophie, de linguistique, de psychologie qui paraîtront en Europe. Il fait de brillantes études au lycée de Gomel. Il y excelle dans toutes les disciplines (Vygotski étudie le latin et le grec, lit l'hébreu, le français et l'anglais). Il lit les philosophes, en particulier Spinoza, Hegel et Marx. À seize ans et demi, il est admis à l'université de Moscou (malgré le numerus clausus). Il s'inscrit en médecine et en droit. Il étudie parallèlement l'histoire, la philosophie, la psychologie et la théorie littéraire. Il suit les cours du linguiste Humboldt. La critique littéraire, le théâtre et la poésie sont au centre de ses préoccupations. En 1915, il écrit un essai sur Hamlet.

Il rentre à Gomel à l'automne 1917, en pleine révolution. La Russie connaît alors une période d'intense création dans presque tous les domaines. Des linguistes et des écrivains inaugurent un mouvement de réflexion théorique sur la littérature que l'on nommera le "formalisme russe". Vygotski est immergé dans ce bouillonnement intellectuel et y participe.

À Gomel, il enseigne, dans différents instituts, la littérature, l'esthétique et l'histoire de l'art, s'occupe de théâtre. À l'Institut pédagogique où il dispense des cours de psychologie et de logique, il fonde un laboratoire de psychologie : il y effectue des recherches sur la compréhension des récits par les enfants. Il rassemblera les résultats de ces travaux dans un livre intitulé *Psychologie pédagogique,* ouvrage teinté de psychologie pavlovienne. En 1919, il contracte la tuberculose.

En 1924, il intervient de façon remarquée au congrès panrusse de psycho-neurologie sur le problème de la conscience. Vygotski y affirme qu'il faut intégrer la conscience comme objet d'investigation en psychologie. En effet, dans toute situation, le sujet ne peut réagir qu'en fonction de sa propre interprétation de la situation : il est donc impossible d'ignorer la conscience. Il s'oppose en cela à la psychologie pavlovienne. Cette conférence produit une vive impression sur le nouveau directeur de l'Institut de psychologie de Moscou, Kornilov. Il engage Vygotski comme chercheur dans son

établissement. Il y travaillera avec Alexei Leontiev (qui travaillera sur l'activité) et avec Alexander Luria (spécialiste mondial en neuropsychologie).

Vygotski restera chercheur à l'Institut de psychologie de 1924 jusqu'à sa mort en 1934. Pendant ces dix ans, il déploiera une activité intense : recherches nombreuses, conférences, direction de thèses, voyages. En 1925, il crée un laboratoire de psychologie pour l'enfance anormale qui deviendra par la suite l'Institut de défectologie dont il sera le premier directeur. En 1926, il engage avec ses collaborateurs un vaste travail expérimental et théorique. Mais Vygotski n'a pas encore élaboré les concepts fondamentaux de la théorie historico-socio-culturelle du psychisme. Ce n'est que vers 1930, après une gestation de quelques années, que Vygotski et ses collaborateurs formuleront cette théorie.

De 1930 jusqu'à sa mort, Vygotski va poursuivre ses recherches et y ajouter un intense travail de publication pour y présenter sa théorie historico-socio-culturelle. En 1934, il propose une synthèse de dix années de travail ininterrompu qui sera son œuvre majeure : *Pensée et langage*.

Mais il est victime d'un nouvel accès de tuberculose. Il dicte sur son lit de mort le dernier chapitre de *Pensée et langage*. Il meurt dans la nuit du 10 au 11 juin 1934.
Dès 1936, l'œuvre de Vygotski est frappée de censure. Ce n'est qu'en 1956 que paraît à nouveau *Pensée et langage* en russe. En 1962, un digest est publié aux Etats-Unis. Les années suivantes paraissent de nombreuses traductions (espagnoles, italiennes, allemandes), à partir de la version anglaise. Curieusement, il faudra attendre 1985 pour pouvoir lire Vygotski en français, avec la première traduction de *Pensée et langage* par Françoise Sève.

II. Une théorie du développement humain

Lev Vygotski, comme Jean Piaget, Henri Wallon ou Jérôme Bruner est un psychologue du développement. La psychologie du développement est une partie de la psychologie qui s'intéresse à la question de savoir comment l'être humain s'édifie en tant qu'être adulte. En effet, chez l'homme, s'élaborent des conduites complexes : raisonner, lire un texte, résoudre différents types de problèmes, éprouver une émotion à la lecture d'un poème, etc. Le problème est de savoir comment ces conduites complexes se construisent. Pour Vygotski, les réponses traditionnelles des psychologues ne sont pas satisfaisantes : les uns décrivent sans expliquer, les autres réduisent leur objet.

Vygotski, avec Luria, distingue trois lignes de développement : une ligne biologique (l'évolution de l'espèce), une ligne socio-historique (l'évolution des sociétés humaines) et une ligne ontogénique (développement de l'organisme individuel de l'enfance à l'âge adulte).

L'apparition des sociétés humaines est une réalisation de possibles engendrés par l'évolution biologique naturelle. Chez les espèces animales les plus évoluées, on observe des traits qui les rapprochent de l'homme : utilisation d'instruments, formes rudimentaires d'organisation sociale… Mais l'utilisation de l'outil reste une fonction secondaire chez l'animal. Par contre les sociétés humaines se caractérisent essentiellement par la transformation des processus naturels à l'aide de moyens artificiels que sont les outils, les techniques… L'activité des hommes, au cours de l'histoire, loin de n'être qu'une adaptation au milieu, transforme celui-ci. Vygotski reprend ici une idée de la philosophie marxiste, dont il est imprégné. Mais son originalité est d'élargir la notion d'outil. En effet, dit-il, l'action de l'homme sur la

nature exige de ce dernier un double contrôle : le contrôle de la nature extérieure par des outils techniques mais aussi le contrôle de sa propre conduite ou de celle d'autrui à l'aide d'outils spécifiques qu'il nomme "instruments psychologiques". Par ce terme, il convient d'entendre, outre les signes linguistiques, l'ensemble des formes ou des moyens communicatifs par lesquels les hommes parviennent à contrôler leurs propres comportements ou ceux d'autrui. Vygotski donne lui-même une liste d'exemples d'instruments psychologiques : « Le langage, les diverses formes de comptage et de calcul, les moyens mnémotechniques, les symboles algébriques, les œuvres d'art, l'écriture, les schémas, les diagrammes, les cartes, les plans, bref tous les signes possibles. » Le fonctionnement psychologique se trouve transformé par l'utilisation de ces instruments, car ils permettent au sujet d'opérer sur ses propres représentations en les recombinant en fonction des buts qu'il s'assigne.

Le développement culturel s'explique par la nécessité dans laquelle se trouvent les hommes, lorsqu'ils sont confrontés à de nouveaux problèmes, d'inventer de nouveaux outils et d'élaborer de nouvelles opérations. Les activités novatrices retenues par les hommes, parce qu'elles constituent des solutions éprouvées à leurs problèmes pratiques et théoriques, s'objectivent dans des objets œuvrés (système d'écriture, outils techniques…), dans une culture. Ces activités sont perfectionnées au fil des générations. Chaque individu trouve donc à sa naissance un ensemble de capacités créées par les hommes au cours de leur histoire. Ces capacités, à la différence de celles des animaux, sont déposées à l'extérieur des individus dans une culture. C'est de l'appropriation de ces formes d'activités déposées dans des outils techniques et psychologiques dont dépend le développement des fonctions psychiques supérieures. C'est pourquoi, dit Vygotski, on ne peut penser le développement de l'enfant indépendamment de l'histoire des sociétés humaines. L'enfant est cet être de nature qui, en s'appropriant les œuvres de la culture, s'humanise, c'est-à-dire reconstruit des capacités spécifiquement humaines. Mais comment ?

III. Une loi du développement : de l'inter-psychique à l'intra-psychique

Dans les années 1929-1930, Vygotski lit Pierre Janet et s'en inspire. Janet s'intéresse à l'histoire de certaines fonctions psychologiques comme la mémoire volontaire, l'acte volontaire. Janet affirme que nous finissons par appliquer à nous-mêmes les conduites sociales que nous mettons en œuvre avec autrui.

Prenons un exemple : Vygotski nous propose le cas d'un jeune enfant cherchant désespérément son jouet. L'adulte intervient et le questionne : L'avais-tu à tel endroit ? L'avais-tu à tel moment ?… L'adulte pose ainsi des questions qui orientent la conduite de l'enfant, non pas vers une recherche erratique, mais vers une recherche systématique. La mémoire volontaire chez l'homme, pour Janet, est produite par l'intériorisation de ce type d'interrogation : l'enfant reprend à son compte cette pratique du questionnement langagier, c'est-à-dire qu'il se pose à lui-même ces questions : L'avais-je à tel endroit ? L'avais-je à tel moment ? Avec autrui et à l'aide du langage se met en place une exploration méthodique et contrôlée de notre expérience passée.

L'origine des conduites humaines complexes est donc inter-psychique. Ces conduites sont "agies" d'abord, à deux, à plusieurs.

De la même façon, l'acte volontaire aurait pour ancêtre le rapport de subordination entre le chef et celui qui exécute un ordre. Prendre une décision volontaire serait

prendre vis-à-vis de soi, la position de celui qui commande à celui qui obéit. On passe de l'inter-psychique à l'intra-psychique. La structure du psychisme est donc en son essence sociale.

« Chaque fonction psychique apparaît deux fois au cours du développement de l'enfant : d'abord comme activité collective, sociale et donc comme fonction interpsychique ; puis elle intervient une deuxième fois comme activité individuelle, comme propriété intérieure de la pensée de l'enfant, comme fonction intrapsychique.» (Vygotski)

Il est important de ne pas dissocier cette loi du développement des analyses concernant le rôle des instruments psychologiques, en particulier du langage. En effet, le langage permet de planifier nos conduites, de les organiser, de les contrôler, de les complexifier. C'est à l'aide du langage que l'enfant pourra reconstruire le questionnement qui lui permettra une exploration méthodique, lors d'une recherche d'un objet perdu. La volonté est la capacité d'origine sociale de placer sa propre conduite sous le contrôle des régulations verbales que désormais l'on s'adresse à soi-même.

IV. Apprentissage et développement

L'apprentissage est l'acquisition d'un nouveau comportement grâce à l'action du monde extérieur ou d'un partenaire, d'un adulte. C'est un processus de transformation externe visant à modifier le comportement de l'individu. Par opposition, le développement est un processus interne de transformation, de structuration, qui n'est pas sous la dépendance directe des effets de l'apprentissage. Il n'y a pas superposition de ces deux processus, à l'école par exemple. Vygotski défendra toute sa vie l'existence de processus de développement internes qui échappent aux décisions extérieures de transformer l'individu.

Alors quels sont les rapports entre apprentissage et développement ?

Il existe quatre grandes réponses à cette question.

Pour Piaget, les apprentissages sont sous la dépendance du développement : on ne peut entreprendre un nouveau type d'enseignement que si l'enfant a atteint un certain niveau de développement. Un exemple connu de cette position concerne l'apprentissage numérique : l'enfant est supposé ne pas pouvoir le maîtriser avant d'avoir construit les opérations de classification et de sériation. Piaget insiste sur la nécessité pour l'enseignant de s'interroger sur le niveau de développement de l'élève avant d'entreprendre un nouvel apprentissage. De plus, pour Piaget, les outils culturels n'ont pas un rôle structurant dans le développement cognitif de l'élève.

Les psychologues behavioristes, eux, refusent la distinction entre apprentissage et développement. Pour ces auteurs, il n'y a pas d'activité interne qui ressemblerait de près ou de loin à du développement. Tout ce que l'organisme fait est le fruit des apprentissages, c'est-à-dire le résultat de transformations de l'organisme par des stimuli externes ou internes.

Pour les psychologues de la forme, au contraire, le fait de travailler une discipline, par exemple la géométrie, va avoir des répercussions plus profondes sur le psychisme. Au travers de cette discipline, ce sont les facultés d'attention, d'analyse, de réflexion, que l'on cherche à développer. L'enseignement ne vaut donc que comme moyen au service du développement intellectuel de l'enfant.

Vygotski, quant à lui, va défendre la thèse que les apprentissages précèdent et

provoquent le développement. En effet, c'est lors de la construction des capacités que les fonctions psychiques sont amenées à se transformer et à se réorganiser, donc à se développer. Les apprentissages, lieu de construction des capacités, ouvrent des voies, orientent et donnent forme au développement des fonctions psychiques. Nous avons étudié à l'école les concepts de droites parallèles et de droites perpendiculaires. Ces concepts, une fois appris, continuent à se développer souterrainement et viennent travailler et modifier notre perception. Notre perception du monde est donc différente d'un individu qui serait dans un autre contexte culturel où ces concepts seraient absents. On peut dire que notre perception est géométrisée, en partie du moins, par nos apprentissages scolaires. L'apprentissage de ces concepts a donc eu un retentissement sur notre développement psychique.

CONCEPTS QUOTIDIENS, CONCEPTS SCIENTIFIQUES CHEZ VYGOTSKI[1]

Michel BROSSARD,
Professeur émérite en psychologie du développement à l'Université de Bordeaux 2

I. Deux processus de conceptualisation

Dans la théorie proposée par Vygotski, concepts quotidiens (ou spontanés) et concepts scientifiques se différencient :

- par leurs lieux de naissance et leurs modes de formation,
- par leurs caractéristiques, leurs trajectoires, leurs destinées.

Les concepts quotidiens ou spontanés se construisent bien évidemment au cours des expériences quotidiennes que l'enfant peut faire du monde physique et social auquel il est confronté. Agir sur le monde extérieur au sein de son univers familial mais aussi donner les raisons de ses actions, communiquer à autrui ses manières de sentir et de penser, impliquent nécessairement une généralisation de certains aspects de cette expérience.[2]

Agir avec autrui dans le monde nécessite que l'enfant construise spontanément des « catégories » et qu'il effectue certaines mises en relations entre ces catégories. Un enfant de 3/4 ans sait ce qu'est un ami, une promenade, un arbre ou une fleur. Mais ces activités de structuration de l'expérience sont avant tout « agies », « pratiquées» , non conscientes. L'enfant qui s'adonne à ce travail d'organisation de l'expérience n'a pas conscience des opérations qu'il effectue ainsi que le révèlent les difficultés qui surgissent dès qu'on lui demande de produire une définition. De plus ces « représentations » construites au cours des échanges avec autrui sur la base d'une expérience commune, sont encore loin d'avoir les caractéristiques des concepts proprement dits. Par exemple, au cours de la période dite syncrétique, l'enfant réunit des objets très différents sur la base de ressemblances momentanément perçues et donc variables dans le temps. II s'agit certes d'une généralisation, mais d'une généralisation d'un certain type, effectuée au sein d'une certaine « structure de généralisation ». Au cours des nombreux dialogues enfants-adultes, les premières significations des mots utilisés par l'enfant sont périodiquement ré-élaborées et ré-orientées vers les significations de la langue adulte à la suite des recadrages successifs que l'adulte propose en réponse aux énoncés enfantins.

Ainsi les concepts quotidiens naissent et se développent au sein des différents univers pratiqués par l'enfant et leurs modes de formation et de fonctionnement demeurent non-conscients.

---

[1] Ce texte est extrait du livre de Michel Brossard, *Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, éditions Presses Universitaires de Septentrion. Il est publié ici avec l'aimable autorisation de son auteur et des Presses de Septentrion.

[2] Vygotski revient à plusieurs reprises sur l'idée selon laquelle les connaissances les plus humbles, tant celles de nos lointains ancêtres que celles de l'enfant, doivent pour être fonctionnelles avoir un contenu « objectif ». Les psychologues, Piaget en particulier, ont sous-estimé les capacités de l'enfant à avoir une connaissance autre que subjective du monde extérieur. Selon Vygotski, il faut pour se persuader du contraire interroger 1'entant sur son univers proche et non sur son univers lointain.

Ce n'est pas dans le cours de l'expérience quotidienne mais dans les situations scolaires d'enseignement-apprentissage que les concepts scientifiques « germent » dans la tête de l'enfant. Il suffit pour s'en convaincre de comparer la formation du concept de « frère » et l'acquisition du théorème de Thalès. Il est essentiel de bien voir que dans le cadre théorique que Vygotski est en train d'élaborer, les situations scolaires d'enseignement-apprentissage loin d'être des situations de simple transmission verbale des connaissances, sont le lieu d'une activité authentique de conceptualisation. Les concepts scientifiques naissent au cours d'un travail effectué en collaboration par l'élève et le maître. Dans le cas d'un enseignement de science par exemple, le maître se livrera à tout un travail de déplacement des questions initiales que se posent les élèves pour leur permettre d'accéder à un nouveau type de questionnement qui soit pertinent dans le domaine scientifique étudié.

La manière dont se forment ces concepts, comparée au mode de formation des concepts quotidiens, est profondément originale (P & L., p. 208). Contrairement à ce qui se passe pour les concepts spontanés où nous avons des opérations de pensée inconscientes d'elles-mêmes, c'est en faisant porter toute son attention sur les processus de pensée envisagés pour eux-mêmes - et ceci en étroite collaboration avec le maître - que se forment les concepts scientifiques.

Vygotski écrit :

« Les problèmes que rencontre la pensée enfantine ne sont pas les mêmes selon qu'elle a à assimiler des concepts à l'école ou qu'elle est livrée à elle-même. » (P. & L., p.223)

Ainsi en situation scolaire les enfants rencontrent des problèmes mais des problèmes d'une nature toute nouvelle : il s'agit d'assimiler les connaissances les plus élaborées dans un domaine scientifique précis en portant son attention, avec l'aide de l'adulte, sur les opérations de pensée elles-mêmes constitutives de ce domaine de connaissances.

« En travaillant avec l'élève sur un thème, le maître a expliqué, transmis des connaissances, questionné, corrigé, il a obligé l'élève à expliquer lui-même. *Tout ce travail sur les concepts, tout le processus de leur formation a été effectué en détail par l'enfant en collaboration avec l'adulte dans le processus d'apprentissage.* » (P. & L., p. 281, souligné par nous) [L.Vygotski, **Pensée et Langage**, édition 1997, *éditions La Dispute*]

Tout ce travail est centré sur les opérations intellectuelles qu'il faut réaliser pour comprendre un phénomène (comment les espèces vivantes ont pu se diversifier par exemple) et ne vise en aucun cas à produire des transformations effectives dans le monde. En un mot les situations scolaires sont le lieu d'un travail original qui n'a rien de commun avec ce qui se passe dans les situations quotidiennes tout-venant[3].

Mais il existe une autre particularité de la formation chez l'enfant d'un concept scientifique en situation scolaire : en même temps qu'il apprend en collaboration avec l'adulte à effectuer telle opération de pensée caractéristique de tel concept, dans la mesure où ces concepts n'existent qu'au sein d'un système, l'enfant apprend en même temps les relations entre les concepts. Aussi le caractère systématique des concepts scientifiques est-il présent et joue un rôle lors de leur formation dans le processus scolaire.

Comparés aux concepts quotidiens,

[3] On voit à partir de là que non seulement il ne s'agit pas de rapprocher les situations scolaires de la « vie réelle » pour les rendre plus compréhensibles mais encore qu'agir ainsi risque d'engendrer des malentendus en ce qui concerne les objectifs didactiques véritablement poursuivis par le maître.

« les concepts scientifiques présentent dès le début chez le même enfant des traits différents, témoignant de leur nature différente. Comme ils viennent par le haut, du sein des autres concepts, ils prennent naissance grâce aux rapports de généralité qui s'établissent entre les concepts dans le processus de l'apprentissage scolaire. *Par nature ils incluent quelque chose de ces rapports, quelque chose du système.* » (P. & L., p. 310, souligné par nous)

Les concepts scientifiques ne sont pas acquis au coup par coup. Leur introduction par le maître est guidée par la fonction qu'ils occupent dans le système conceptuel sur lequel on travaille. Les relations nécessaires entre les concepts - propres au caractère systématique des connaissances enseignées - joueront donc un rôle essentiel dans le mode de formation d'un concept scientifique chez l'élève. Ce qui n'est bien évidemment pas le cas pour les concepts quotidiens.

L'observateur assistant à la formation d'un concept en situation scolaire ne voit qu'un concept à l'état naissant. Ce serait une erreur de s'arrêter à ce « moment » des apprentissages où l'élève semble avoir « compris » l'objectif didactique poursuivi par le maître au cours de la séquence. Celui qui observe le moment de la « compréhension » au cours d'un apprentissage a certes la chance de pouvoir assister « en direct » à la formation d'un concept, mais il n'assiste qu'au moment de sa naissance. Les concepts scientifiques sont appelés à un long développement interne que Vygotski qualifie de « souterrain »[4]. Et c'est en essayant de comprendre ce qui se produit au cours de ce développement interne que nous parviendrons à comprendre les rapports existant entre apprentissage et développement.

Notons au passage que si les concepts quotidiens sont d'abord pratiqués et si leur définition, lorsqu'elle se produit, est tardive, nous assistons à un phénomène inverse en ce qui concerne les concepts scientifiques. Le maître et l'élève travaillent sur ces concepts en en proposant plusieurs définitions et reformulations (Jaubert 2000) mais ce dont ces concepts ont besoin c'est de prendre chair en venant se connecter avec les concepts quotidiens. Leur trajectoire sera donc descendante. Concernant les caractéristiques de ces deux types de concepts, on connaît la célèbre analyse de Vygotski : ce qui est faiblesse chez les uns est force chez les autres. Mais s'il est essentiel de distinguer ces deux types de concepts (l'erreur de la psychologie étant d'avoir pensé le développement des concepts sur un seul modèle, celui du développement des concepts spontanés) il est non moins essentiel d'y voir *« un système unique de concepts qui se constitue au cours du développement intellectuel de l'enfant »* (P. & L., p. 217). Comme un milieu marin peut être traversé par des courants opposés, notre système conceptuel pris dans sa totalité est traversé par des processus de sens contraire.

Et c'est lorsque nous saisirons ce moment où se connectent ces deux mouvements conceptuels d'orientation inverse que nous serons en mesure de répondre - du moins nous l'espérons – aux questions que nous nous sommes posées. Nous pensons en effet que c'est *à ce moment* et très précisément à cet endroit que se résout la contradiction qui est « au travail » chez l'écolier et dont Vygotski s'efforce de ressaisir le mouvement.

II. Structures de généralisation et opérations de pensée

Rappelons que nous avons posé deux problèmes :

[4] On sait que les concepts spontanés se développent eux aussi, mais en sens inverse.

Comment Vygotski pense-t-il concrètement les rapports entre apprentissages et développement lorsqu'il affirme simultanément que si les apprentissages suscitent le développement, le développement quant à lui est « auto-mouvement » ? Selon sa propre formule on « implante » rien en lui. D'autre part nous avons dans les chapitres précédents insisté sur l'importance de penser le développement comme un processus de transformation: transformation des fonctions psychiques élémentaires en fonctions psychiques supérieures. Le passage d'activités psychiques non conscientes d'elles-mêmes à des activités conscientes et volontaires est le critère aux yeux de Vygotski de l'émergence de fonctions psychiques supérieures. Dans l'exemple précis qui nous occupe, la question revient donc à se demander comment passe-t-on d'opérations de pensée « agies » à des opérations de pensée effectuées consciemment et volontairement.

D'autre part si Vygotski s'intéresse aux apprentissages, il s'intéresse tout particulièrement aux apprentissages scolaires. Les exemples analysés précédemment ont commencé à nous éclairer sur le sens de sa réponse. Mais il nous faut poursuivre l'analyse si nous voulons comprendre la nature des transformations internes auxquelles nous avons affaire.

S'il est vrai que toute signification est une forme de généralisation, il faut s'empresser d'ajouter qu'il existe plusieurs degrés et formes de généralisations. Ainsi de tout jeunes enfants savent coordonner des concepts comme chaise, table, fauteuil etc. mais sont incapables d'une opération de classification qui leur permettrait de subsumer ces différents concepts sous le concept plus général de meuble. Prédomine alors une pensée intuitive qui réunit les significations selon des rapports concrets en relation directe avec la façon dont les objets se présentent à eux. À ce niveau, la pensée verbale ne jouit d'aucune autonomie par rapport aux collections perçues. Une étape importante est franchie lorsque l'enfant ne se montre plus seulement capable de coordonner des significations entre elles mais est en mesure de construire des concepts sur-ordonnés permettant de subsumer sous une catégorie plus large les significations déjà construites. L'émergence d'une pensée verbale est dès lors rendue possible. En effet pour pouvoir conduire un raisonnement, c'est-à-dire effectuer des inférences réglées, il faut pouvoir subsumer un concept sous un autre. C'est pourquoi, sur le plan développemental, Vygotski considère l'apparition de rapports de généralité entre concepts comme une étape aussi importante dans le développement de l'enfant que celle de l'apparition des premiers mots.

Vygotski parle en termes de stades pour caractériser ces niveaux et ces formes de généralisation : formation syncrétique, complexe, préconcept, concept. Il nomme structures de généralisation, ces ensembles caractéristiques d'un domaine et d'un niveau de développement des concepts. Sa thèse centrale consiste à affirmer que les opérations de pensée - et donc les différents niveaux de la pensée verbale laquelle consiste à effectuer des mises en relations entre les concepts à l'intérieur d'une certaine structure de généralisation - dépendent du degré et des rapports de généralisation atteints par les concepts.

« La signification du mot est une généralisation. Une structure différente de ces généralisations signifie un mode différent de reflet de la réalité dans la pensée. Cela ne peut manquer à son tour de signifier dés lors des rapports différents de généralité entre les concepts. Enfin, des rapports différents de généralité déterminent eux-mêmes des types différents d'opérations possibles à un niveau donné de la pensée. » (P. & L., p. 313)

Pour préciser sa pensée, Vygotski use d'une métaphore. Il parle de longitude et de

latitude des concepts. Les concepts sont assimilés à des points sur la surface terrestre. La longitude d'un concept définit sa place sur un méridien allant de sa signification la plus concrète jusqu'à un degré maximum de généralité. Toujours selon cette métaphore, si l'on considère que la surface du globe représente la réalité dans toute sa diversité, la latitude d'un concept définira alors « *la place qu'il occupe parmi les autres concepts ayant la même longitude mais se rapportant à d'autres points de la réalité.* » (ouv. cit., p. 297).

Ainsi si la longitude du concept caractérise la saisie de l'objet dans le concept sous l'angle de l'unité du concret et de l'abstrait qui y est incluse, la latitude caractérise le point d'application du concept à un certain domaine de la réalité. À l'aide de cette métaphore, chaque concept peut être comparé à un point situé à l'intersection de ces deux lignes. Ce point d'intersection permet d'établir les rapports qu'entretient un concept avec les autres concepts du système auquel il appartient. Il indique la « mesure de généralité du concept ».

Effectuer une opération de pensée (définir, comparer, différencier etc.) suppose que soient réalisées des mises en relation entre les différents concepts à l'intérieur d'un système composant un domaine de connaissance. Le très jeune enfant à qui l'on demande de fournir une définition, se trouve en difficulté car le terme qu'il possède n'entretient pas de rapports de généralité avec d'autres concepts. À l'inverse celui qui maîtrise le système décimal dispose d'une quantité infinie de moyens pour exprimer le concept d'un nombre : 2 pourra être exprimé par 1+1, 10-8, 12 : 6 etc. L'arithmétique nous offre un exemple parfait d'équivalences. Un concept peut donc être considéré comme un point à partir duquel plusieurs parcours sont possibles à l'intérieur d'un système. Le sujet peut produire une explication en prenant comme point d'entrée un élément chaque fois différent du système conceptuel et ainsi changer son angle de vision sur les différentes opérations qu'il effectue. C'est la raison pour laquelle Vygotski affirme qu'il existe un lien étroit entre pensée systématique et pensée consciente.

Mais comme, aux différentes étapes du développement, les structures de généralisation (formation syncrétique, complexe, préconcept...) n'ont pas le même degré de généralité, 1a possibilités de prendre du recul et d'insérer une opération d'un ensemble plus vaste variera considérablement d'une structure de généralisation à une autre. En effet à chaque structure de généralisation, on voit s'établir certains rapports spécifiques : rapports à 1'objet, appréhension de l'objet dans le concept, rapports entre les opérations de pensée et les formes linguistiques.

Vygotsy souscrit aux descriptions proposées par Piaget des caractéristiques de la pensée enfantine. Tant que l'enfant ne possède pas de concepts (préconcepts ou concepts proprement dits) ayant entre eux un rapport de généralité, sa pensée demeure prisonnière de ce qu'il perçoit. Dans les expériences de Piaget, l'enfant va percevoir une petite boule qui se dissout et ensuite une grosse boule qui se dissout aussi dans l'eau. Ne disposant pas d'un concept général, il ne verra pas de contradiction dans ses explications successives lorsqu'il explique dans un premier temps que la première boule se dissout « parce qu'elle est petite » et affirme ensuite que la seconde boule se dissout « parce qu'elle est grosse ». N'ayant pas construit de rapports de généralité autres que ceux de la pensée syncrétique ou de la pensée par complexes, la pensée de 1'enfant reste dépendante de ce qu'il perçoit et demeure insensible à la contradiction.

Mais s'il y a accord sur les phénomènes observés, Vygotski est en désaccord sur l'explication proposée par Piaget lorsque celui-ci fait appel à l'égocentrisme. Si la

pensée de l'enfant est inconsciente d'elle-même, demeure insensible à la contradiction et reste dépendante des liaisons empiriques, ceci s'explique par la spécificité des structures de généralisation au sein desquelles l'enfant opère.

Il en va différemment dans la pensée par concepts. Parlant en particulier des concepts scientifiques, Vygotski écrit :

« …les concepts scientifiques de l'enfant ne présentent pas ces phénomènes et loin d'être soumis à ces lois (celles de la pensée enfantine décrites par Piaget - ajouté par nous m. b.) ils les transforment. » (P. & L., p. 310)

Lorsque le tout-jeune enfant n'a pas encore construit de classes emboîtées, il ne peut prendre de recul ni sur la réalité perçue ni sur les significations de mots qu'il a jusqu'alors construites. Si, en présence d'une image, on lui propose une phrase décrivant cette image et si on lui demande d'exprimer la même idée différemment, il ne pourra s'affranchir de la phrase proposée. Il s'en tiendra au sens littéral et ne pourra que répéter la phrase de départ, se montrant ainsi incapable de reformulations.

Par contre dans une structure de généralisation qui est celle des concepts proprement dits, lorsqu'un domaine du savoir est maîtrisé, celui qui a pour tâche de fournir une explication peut entreprendre son explication à partir de plusieurs points de départ conceptuels : un concept est un point à l'intérieur d'un système qui autorise plusieurs parcours possibles. La loi d'équivalence des concepts autorise plusieurs formulations d'une même idée parce que plusieurs parcours sont possibles à l'intérieur de cette structure de généralisation. On voit que dès lors les significations (le pôle sémantique de la pensée verbale) s'affranchissent d'une forme particulière de mise en mots car celui qui produit l'explication n'est plus prisonnier d'un texte particulier. Nous sommes parvenus à la forme (l'une des formes ?)[5] la plus élaborée de la pensée verbale, point culminant vers lequel nous conduisaient tous les chemins pris par Vygotski dans Pensée et Langage.

Cette relative autonomie des opérations de pensée par rapport à des formes langagières particulières nous permet de comprendre la raison pour laquelle l'enseignant ou le psychologue voulant s'assurer que l'élève maîtrise correctement un domaine de connaissances lui demandera de reformuler de différentes façons un même ensemble de relations entre concepts. De même « savoir expliquer » c'est être capable d'effectuer un *parcours parmi d'autres* dans un système de relations entre des concepts en choisissant son point de départ en fonction des questions que se pose l'interlocuteur.

III. L'exemple de l'arithmétique et de l'algèbre

C'est sur cet exemple que nous voudrions, à la suite de Vygotski, mettre en lumière ce « moment de la connexion » entre deux structures de généralisation de niveaux différents. Nous serons alors tout prés du but : comprendre sur cet exemple la manière dont s'interconnectent les apprentissages et le développement.

Au cours du premier âge scolaire (période qui correspond en gros à notre scolarité primaire) l'élève apprend à utiliser le système décimal et entre autres à effectuer les différentes opérations arithmétiques. Sur cet exemple Vygotski montre que nous avons

[5] On ne peut s'empêcher de penser à la poésie, autre figure que prend la signification dans ce qu'elle a de plus « grandiose ». Il est fort probable que ce problème fut au coeur de la conversation que Vygotski eut un soir avec Ossip Mandelstam. Au dire de son épouse, Mandelstam trouva que Vygotski était « terriblement rationaliste » (Nadeja Mandelstam 1973).

affaire à deux temporalités différentes : la temporalité de l'enseignement-apprentissage et la temporalité du développement propre à chaque élève. Le maître propose des tâches particulières (les tâches ne peuvent être que particulières) : il s'agit de résoudre tel problème particulier, d'effectuer telle opération. Ceci ne signifie pas que le maître travaille au coup par coup et qu'il n'a pas un projet didactique global. Mais son projet passe nécessairement par la construction de situations de tâches et d'exercices particuliers. La maîtrise par l'élève du système numérique ne peut résulter que d'une mise en fonctionnement de la part de l'élève de ses propres activités de compréhension : compréhension du calcul en base 10, écriture positionnelle, technique de la retenue etc.. Cette maîtrise du système, des différentes opérations qu'il rend possibles, ne peuvent être « implantées » dans l'élève. Nous avons par conséquent deux progressions : la progression des séquences d'apprentissage telle que le maître l'a prévue d'une part et la manière dont s'effectue le processus d'appropriation en chaque élève d'autre part : à certains moments les leçons du maître anticipent sur des opérations que l'élève ne maîtrise pas encore. Au cours d'une leçon particulière l'élève va brutalement découvrir certains aspects du fonctionnement du système décimal. Le maître quant à lui continue sa progression en fonction de ce qu'il pense être la compréhension moyenne des élèves de la classe. Les capacités arithmétiques de l'élève peuvent se trouver à certains moments très largement en avance par rapport au déroulement pas à pas des apprentissages. Les deux courbes, conclut Vygotski, celle des apprentissages et celle du développement, ne sont pas parallèles : elles se chevauchent, se coupent et se recoupent.

Pourquoi lorsqu'il s'agit de l'arithmétique que pratique l'écolier, Vygotski parle-t-il de préconcepts alors que dans le cas de l'algèbre, il parle de concepts ?

Parlant de la prise de conscience, voici ce qu'il écrit :

« On saisit pourquoi les concepts de l'écolier restent non conscients et involontaires. Pour prendre conscience de quelque chose et le maîtriser, il faut d'abord en disposer... Mais les concepts - *ou plus exactement les préconcepts comme nous aimerions désigner d'un terme plus précis ces concepts non conscients de l'écolier, qui n'ont pas encore atteint le stade supérieur de leur développement* - apparaissent justement pour la première fois à l'âge scolaire, ne parviennent à leur maturité qu'au cours de cette période. Jusque-là l'enfant pense par représentations générales ou complexes comme nous avons appelé ailleurs cette structure initiale des généralisations qui domine à l'âge préscolaire. Et si les préconcepts n'apparaissent qu'à l'âge scolaire, il serait miraculeux que l'enfant puisse en prendre conscience et les maîtriser, car cela signifierait que la conscience est capable non seulement de prendre conscience et de maîtriser ces fonctions mais aussi de les créer à partir de rien, de les forger de toutes pièces, bien avant qu'elles ne se soient développées. »

(P. & L. p. 241 ; *passage souligné par nous m.b.*)

Les concepts arithmétiques sont certes des concepts car il y a sélection et généralisation des propriétés numériques des objets. Mais Vygotski parle de préconcept parce que ces opérations effectuées par l'élève ne peuvent encore faire à leur tour l'objet d'un travail de généralisation. En ce sens ces concepts ne sont pas encore pleinement développés. Il voit dans l'arithmétique « l'exemple typique » du concept. Voici ce qu'il dit de l'arithmétique :

« Le préconcept est l'abstraction du nombre détachée de 1'objet et, fondée sur cette abstraction, la généralisation des propriétés numériques de l'objet. Le concept est l'abstraction détachée du nombre et, fondée sur elle, la généralisation de n'importe quel rapport entre les nombres. *L'abstraction et la généralisation de l'idée diffèrent*

fondamentalement de l'abstraction et de la généralisation des choses. » (P. & L., p. 302, souligné par nous m.b.)

Ainsi, selon la terminologie vygotskienne, les concepts proprement dits sont le résultat d'un travail d'abstraction et de généralisation des idées sur les choses alors que les pré-concepts sont le fruit d'un travail d'abstraction et de généralisation effectué sur les choses. Le concept est le résultat d'un travail de généralisation (et de rectification) des idées sur les choses.

Qu'advient-il donc lorsque l'écolier qui résout les problèmes arithmétiques qu'on lui propose, accède aux premières connaissances algébriques, qu'il passe d'une généralisation des choses à une généralisation de l'idée ? Plusieurs phénomènes doivent être mis en évidence :

1. Reprenons l'analogie - qui n'est certes que partielle – entre l'apprentissage d'une langue étrangère et l'apprentissage de l'algèbre. Nous avons vu que c'est sur la base des connaissances sémantiques construites au cours de l'acquisition de la langue maternelle que l'enfant va s'approprier les nouvelles structures linguistiques ; ces nouvelles connaissances généralisant les précédentes du même coup les transforment. De manière analogue, les connaissances algébriques vont transformer les connaissances arithmétiques. Ces dernières ne sont pas seulement ce qui va permettre à l'élève de trouver du sens au nouvel enseignement qu'il reçoit, en tant que connaissances qui vont faire l'objet d'une généralisation, elles sont une condition de l'acquisition des connaissances algébriques.

2. Mais le fait d'accéder aux connaissances algébriques (donc à une nouvelle structure de généralisation : à une généralisation de généralisation) ne se situe pas dans le simple prolongement des connaissances antérieures.

« Opérer la généralisation de ses propres idées et opérations arithmétiques représente quelque chose de supérieur et de nouveau par rapport à la généralisation des propriétés numériques des objets dans le concept arithmétique. » (P. & L., p. 302)

II ne s'agit pas seulement d'un processus de généralisation qui irait du « bas » vers le « haut ». *Une nouvelle généralisation n'apparaît certes que sur la base des concepts précédents, mais l'accès à ce nouveau plan de pensée est « ouvert » à l'élève par l'entremise d'un enseignement-apprentissage. L'enfant bénéficie du travail théorique produit par les générations qui l'ont précédé et cet enseignement des concepts scientifiques ouvre un espace de développement (« fraye la voie » dit Vygotski) aux concepts antérieurs (ici les concepts arithmétiques), les ré-oriente et leur permet de se hausser à un nouveau plan de développement. Il s'agit donc d'un processus de transformation qui se fait « par le haut ».*

En résumé nous devons penser simultanément deux séries de processus :

- Nous avons d'une part les concepts algébriques qui font l'obiet d'une appropriation « par le haut » au cours d'un enseignement apprentissage. Ils ouvrent des voies de développement aux concepts arithmétiques. C'est le coté « enseignement-apprentissage ».

- Nous avons d'autre part les concepts arithmétiques qui, loin d'être un simple support du nouvel enseignement, constituent le matériau qui va faire l'objet d'un travail de généralisation. Ils sont en quelque sorte « appelés » à se généraliser selon les voies ouvertes par les enseignements-apprentissages. C'est le côté auto-développement.

3. Nous avons affaire à des réorganisations structurales : l'élève n'a pas à effectuer ce travail de généralisation pour chaque concept. Mais à l'occasion d'une leçon ou d'un exercice, sur un exemple particulier, il va saisir la nature des rapports entre les

connaissances algébriques et les connaissances arithmétiques.

« … l'enfant forme une nouvelle structure de généralisation d'abord avec quelques concepts, le plus souvent fraîchement acquis par exemple dans le processus d'apprentissage ; il suffit qu'il ait maîtrisé cette nouvelle structure pour qu'il réorganise, transforme aussi la structure de tous les concepts précédents. » (P. & L., p. 304)

Ainsi une généralisation qui s'est produite dans un domaine particulier va-t-elle, comme dans un processus de déflagration en chaînes, gagner en l'espace d'un instant tout un domaine de connaissances.

4. Enfin l'analyse conduite par Vygotski du développement intérieur, souterrain, des concepts éclaire le phénomène de réorganisation structurale que l'on observe à partir de certains apprentissages : l'enfant apprenant pour deux pences mais se développant pour dix schillings. Ce phénomène, fort bien vu par Koffka et qui avait retenu toute l'attention de Vygotski, demeurait inexpliqué dans le cadre de la Gestalt Psychology.

Supposons que notre élève du premier âge scolaire résolve un problème qui nécessite la réalisation d'une opération arithmétique. Cet élève travaille à l'intérieur d'une structure de généralisation qui ne dépasse pas le système des opérations arithmétiques. Il effectue correctement l'opération, il peut en vérifier l'exactitude etc., mais il ne peut prendre que peu de recul par rapport à cette opération. Son point de vue est limité à l'opération qu'il vient d'effectuer. Supposons maintenant que ce même élève ayant progressé dans sa scolarité accède à la maîtrise de connaissances algébriques. À un certain moment, une connexion va s'établir entre telle opération arithmétique et les connaissances algébriques qu'il est en train d'acquérir de telle sorte que l'opération arithmétique va lui apparaître comme un cas particulier d'un ensemble d'opérations possibles. Cette nouvelle structure de généralisation (l'algèbre comme généralisation des généralisations arithmétiques) n'abolit pas les généralisations antérieures c'est-à-dire les connaissances arithmétiques. Elle les fait voir autrement. Ce qui revient à dire que l'élève, dans l'exemple que nous avons pris, va avoir un rapport transformé à l'opération qu'il vient d'effectuer.

Là réside le point de jonction que nous recherchions : l'enfant comprend désormais cette opération comme un cas particulier à l'intérieur d'un système d'opérations possibles de même nature. Accédant à un nouveau système de concepts incluant les conceptualisations antérieures, il peut désormais les percevoir comme opérations particulières et en effectuer *une prise de conscience* [6]. Les processus qu'il mettait en oeuvre lors de la réalisation de l'opération, processus sur lesquels il n'avait qu'un faible recul, sont désormais conscients et peuvent faire l'objet d'une utilisation volontaire.

IV. Tentative de réponse

Au travers de l'analyse très approfondie que nous propose Vygotski des rapports entre concepts quotidiens et concepts scientifiques, nous pensons être enfin parvenus au lieu et au mode de connexion entre apprentissage et développement que nous recherchions. C'est la compréhension de ce qui se produit à ce moment précis qui nous permet d'apporter une réponse aux deux questions que nous nous sommes posées depuis le début de ce chapitre.

[6] On retrouve ici l'influence de Spinoza : ce sont les connaissances conceptuelles qui rendent possibles la conscience et la maîtrise d'un ensemble de processus : nous sommes à l'intérieur d'une philosophie du concept et non d'une philosophie de la conscience.

Rappelons pour mémoire ces deux questions :

1. Comment, si l'on ne peut rien « implanter » dans le développement - lequel est fondamentalement auto-mouvement - les apprentissages peuvent-ils anticiper, orienter, provoquer le développement ? Comment si l'on ne veut pas en rester a une formule générale « résumant » la pensée de Vygotski, concevoir concrètement les rapports entre apprentissage et développement ?

2. Pour quelles raisons de fond Vygotski fait-il jouer un rôle décisif aux apprentissages scolaires dans le développement de l'enfant ?

Nous avons vu que dans les situations scolaires, l'enfant est invité à venir travailler dans des structures de généralisation hautement développées : mathématiques, biologie, sciences sociales etc.. Ce travail de conceptualisation spécifique que l'élève accomplit avec l'aide du maître, prend appui sur les concepts antérieurs déjà construits par l'élève. Par exemple, dans son expérience quotidienne (discussion entre amis, informations télévisées etc.) l'élève a construit le concept de révolution qu'il se représente comme un changement brutal de régime politique. Les concepts de classes sociales, de rapports sociaux et de moyens de production du rôle de l'État dans une société divisée en classes sociales antagoniques etc. lui permettent de construire un concept scientifique de « révolution ». L'appropriation par l'élève des concepts scientifiques au cours des enseignements-apprentissages scolaires prend bien appui sur les conceptualisations antérieures déjà construites par l'élève. Il n'en reste pas moins, que les concepts scientifiques sont d'une autre nature. En tant que concepts plus développés ils ouvrent une voie de développement aux concepts spontanés : ils ouvrent à l'intérieur même de la pensée conceptuelle de l'élève une zone de développement prochain, il s'agit en quelque sorte de la face interne et donc non directement visible de cette zone[7].

«… leur niveau de développement (des concepts scientifiques, ajouté par nous m.b.) représente une zone de possibilités immédiates pour les concepts quotidiens, leur frayant la voie, comme une sorte de propédeutique de leur développement. » (P.&L., p. 210)

Ce concept de zone de développement prochain apporte la réponse à la première question que nous avons posée. Le développement est bien auto-développement. Il n'y a pas de rupture dans le développement dans le sens où, par exemple, le contenu des apprentissages viendrait se substituer aux concepts jusque-là construits par l'élève.

« II y a un processus d'apprentissage scolaire ; celui-ci a sa structure interne, son enchaînement, sa logique de développement ; et intérieurement dans l'esprit de chaque écolier pris isolement, *il y a en quelque sorte un réseau interne de processus qui bien qu'ils soient suscités et mis en mouvement au cours de l'apprentissage scolaire, ont leur logique propre de développement.* »

(P. & L., p. 268, *souligné par nous m.b.*)

Ainsi les apprentissages scolaires ne « produisent » pas du développement, mais mettent en mouvement des processus internes, un travail intérieur de conceptualisation.

---

[7] Nous reprenons ici une idée précédemment développée (Brossard 2002) à savoir celle de l'existence de deux faces de la zone de développement prochain : une face externe, visible (celle à laquelle on se réfère le plus communément) se définissant de façon typique par le rapport adulte expert/enfant novice et une face interne à la pensée de l'individu se caractérisant par des niveaux de fonctionnements différents tels que par exemple, pour un même domaine, des modes de fonctionnements scientifiques et des modes de fonctionnements spontanés. C'est en ce sens que Vygotski peut écrire que les concepts scientifiques ouvrent aux concepts spontanés une zone de développement prochain. C'est cette face interne, cachée (comme on dit la face cachée de la lune) que nous tentons ici, au travers des textes de Vygotski d'explorer.

Dire qu'il n'y a pas de ruptures dans le développement ne signifie pas qu'il faille le concevoir sous la forme d'un développement continu car il y a, selon les termes mêmes utilisés par Vygotski, des « métamorphoses » au cours du développement.

Ce sont les concepts quotidiens eux-mêmes qui vont se développer, mais réorientés selon les voies tracées par les concepts scientifiques, « happés » pourrait-on dire par ceux-ci, « par le haut » dit Vygotski. En même temps se produit une généralisation de telle ou telle découverte locale. C'est tout un domaine de la pensée de l'enfant qui se trouve transformé : conception du vivant, conception des phénomènes sociaux. Et dans le même mouvement « bidirectionnel », les concepts scientifiques prennent « chair » par capillarité en quelque sorte en venant « ramifier » dans le terreau des concepts quotidiens.

Nous avons du même coup quasiment répondu à la seconde et dernière question. Dans le cadre de l'école, l'enfant a accès aux contenus les plus élaborés produits par nos sociétés au cours de leur histoire. S'il est vrai, ainsi que l'écrit Vygotski dans *Histoire du développement des fonctions psychiques supérieures* que pour comprendre le développement des fonctions psychiques, il faut ré-insérer le développement de l'enfant dans l'histoire des sociétés humaines - étant donné que c'est en s'appropriant les oeuvres les plus élaborées de sa culture que l'individu parviendra à un développement maximal - alors on comprend aisément que l'enseignement-apprentissage des disciplines formelles joue un rôle-clé dans le développement culturel de l'enfant. Cet enseignement apprentissage des savoirs les plus élaborés ne pouvant se faire en dehors des situations formelles d'apprentissage : il est nécessaire en effet que des situations spécifiques soient aménagées pour qu'un enfant puisse accéder (suivant un ordre didactique à déterminer) au réseau conceptuel d'un contenu scientifique précis.

V. Conclusion : un premier pas extrêmement modeste...

Il ne faut pas voir dans le travail que nous présente Vygotski tout au cours de ce chapitre, un ensemble d'assertions doctrinales, mais, ainsi que le montrent les dernières pages – pages au cours desquelles il s'adresse à lui-même un certain nombre de critiques - un corps d'hypothèses délimitant un domaine de recherche jusqu'alors inexploré.

On ne saurait mieux clore ce chapitre qu'en évoquant les critiques que Vygotski s'adresse à lui-même. Ses préoccupations convergent étonnamment avec les préoccupations contemporaines des chercheurs en didactiques.

On sait que ce chapitre fut rédigé comme introduction à la recherche expérimentale de Schif. Cette recherche - qui était son travail de thèse - avait pour objet l'étude comparative du développement des concepts quotidiens et des concepts scientifiques à l'âge scolaire dans le domaine des Sciences Sociales [8]. Comparant la manière dont les enfants d'une école élémentaire (correspondant en gros au C.E.l et au C.M.l de notre système scolaire) utilisent les connecteurs « parce que » et « bien que » dans le domaine quotidien et dans le domaine scientifique, Schif montrait à l'aide d'une épreuve de complètement de phrases, une « avance » dans l'utilisation des concepts scientifiques comparée à l'utilisation des concepts spontanés [9]. Vygotski explique ce résultat par une

[8] La traductrice Françoise Sève indique que la thèse de Schif était intitulée « Le développement de concepts quotidiens et scientifiques ».

[9] Il s'agissait de compléter des phrases comprenant l'un de ces deux connecteurs, certaines phrases appartenant au domaine quotidien (phrases du type « le train est sorti des rails parce que... ») d'autres appartenant au domaine scientifique (phrases du type « on l'appelle guerre civile parce que... »).

différence dans le mode de formation de ces deux types de concepts : les concepts scientifiques se forment au cours d'un travail collaboratif entre le maître et l'élève à un plan conscient à la suite de plusieurs tentatives de définitions, de formulations et de reformulations face à un problème à résoudre. C'est donc au plan d'une activité consciente et volontaire que se forment les concepts scientifiques. Par conséquent l'expérimentation qui consiste à demander aux élèves une utilisation consciente de la relation de causalité se situe sur le même plan que celui du travail effectué avec le maître. Il n'en va pas de même pour les concepts quotidiens. L'enfant pratique « la causalité», il saura très bien dire « en situation » pourquoi X est tombé de vélo, mais n'ayant pas « réfléchi » la causalité pratiquée, il sera mis en difficulté lorsqu'on l'arrache à ces « contextes » d'action en lui demandant dans l'épreuve de complètement de phrases de manier sur un plan conscient et volontaire la relation de causalité.

Vygotski voit dans son propre travail trois défauts majeurs qui sont pour nous autant d'indications précieuses sur les prolongements qu'il aurait souhaité donner à cette recherche.

La première critique que Vygotski s'adresse est de n'être pas parti d'un domaine scientifique précis (arithmétique, sciences de la nature, sciences sociales...) de manière à ce que soit pris en compte un système de concepts « constituant la logique de l'objet ». L'exemple pris, celui des Sciences Sociales, a simplement permis de distinguer entre concepts spontanés et concepts scientifiques. C'était un travail préliminaire qu'il fallait faire. Mais les modes de conceptualisation propres à un domaine scientifique précis n'ont pas été pris en compte.

Ce défaut a eu une double conséquence : d'une part l'auteur n'a étudié que des concepts pris isolément et d'autre part il n'a pas été procédé à une mise en relation entre un système conceptuel propre à un domaine scientifique précis et les conceptualisations spontanées construites par les enfants dans ce même domaine.

Le fait de ne pas avoir étudié une structure de généralisation précise construite par les élèves à différents moments de leur développement (c'est-là le deuxième défaut souligné par Vygotski) a eu pour conséquence de ne pas avoir pu étudier finement les différentes formes de raisonnements que les élèves mettent en oeuvre à l'intérieur d'une structure de généralisation. Piaget sur ce point distinguant plusieurs formes de causalité (empirique, psychologique, logique) apporte des données autrement plus fines car elles permettent de distinguer plusieurs niveaux de conceptualisation à l'intérieur de l'âge scolaire. On voit que contrairement à ce que certains auteurs contemporains lui reprochent, Vygotski ne se satisfait pas de l'opposition polaire « concept quotidien » / « concept scientifique».

Enfin Vygotski reproche à son étude de n'avoir étudié expérimentalement ni la nature des concepts quotidiens ni le développement de la prise de conscience et de l'utilisation volontaire des concepts à partir du système naissant des concepts au cours de la période scolaire. Du coup, pense-t-il, la critique qu'il adresse à Piaget « manque de mordant ».

Et Vygotski de conclure que la mise en lumière de ces défauts permet :

« … d'esquisser les perspectives fondamentales qui s'ouvrent à la dernière page de notre étude et en même temps d'apprécier celle-ci de la seule manière correcte, c'est-à-dire comme un premier pas extrêmement modeste dans un domaine nouveau et infiniment fécond, du point de vue théorique et pratique, de la psychologie de la pensée enfantine. » (P. & L., p. 318)

Nous voyons dans ces dernières lignes l'annonce d'un programme de recherches que

malheureusement Vygotski ne put qu'entrevoir [10]. Les hypothèses qu'il formule conservent à nos yeux toute leur actualité et leur tranchant. Nous évoquerons dans les derniers chapitres quelques travaux récents proches de la problématique vygotskienne et tenterons partant de là d'esquisser quelques perspectives de recherches.

[10] « L'étude des différences existant entre les formes singulières des concepts scientifiques (concepts mathématiques, sciences de la nature, sciences sociales…) ne pouvaient faire l'objet de l'étude avant que ne soit tracée la ligne de démarcation entre concepts scientifiques et concepts quotidiens » écrit Vygotski au terme de son étude. B. Schneuwly note à ce propos que Vygotski repère ici un travail à venir, travail actuellement entrepris par les didactiques des disciplines (Schneuwly 1995).

UNE ACTIVITÉ EN CLASSE DE CINQUIÈME

I. Présentation

Voici une activité que nous avons expérimentée en classe et qui s'inspire de notre lecture de l'œuvre de Vygotski. Elle a été donnée dans deux classes de cinquième du collège V. Hugo de Carmaux, au cours de l'année scolaire 2003-2004.

Énoncé

Voici un certain nombre d'expressions numériques. Sans les calculer, regroupe-les en énonçant clairement et par écrit les raisons de tes choix.

A = 21 – 17 + 7 ; B = 2 + 5 × 3 ;C = (21 – 7) + 17 ;
D = (2 + 5) × 3 ; E = 21 + 17 – 7 ;F = (17 + 7) – 21 ;
G = 2 × 5 + 3 ; H = 21 – (17 – 7) ;I = 3 + 2 × 5 ;
J = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ; K = 21 × 17 + 7 ;L = 3 + 2 × 2 + 3 ;
M = (2 × 5) + 3 ; N = 3 + 2 × (2 + 3) ;O = (21 – 17) + 7.

La recherche s'est d'abord effectuée individuellement. Chaque élève a écrit sur une feuille ses choix de regroupements en les justifiant. Puis, la recherche s'est poursuivie à deux, puis à quatre avec chaque fois, une production écrite. Chaque groupe a présenté ses choix. Un débat a suivi.

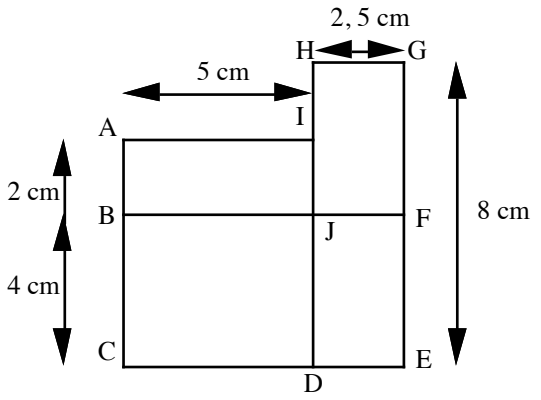
Cette activité a été proposée lors d'une séquence sur la "lecture numérique" où nous avions rappelé les significations des mots, opérations, termes, facteurs, somme, différence, produit. Plusieurs exercices avaient déjà été cherchés en classe, durant les séances précédentes où nous avions insisté sur la signification donnée aux signes dans l'écriture des nombres. Nous avions longuement tenté d'expliquer pourquoi le nombre 2 + 3 x 5 devait être lu comme une somme et que (2 + 3) x 5 était un produit. De plus, les quatre exercices suivants avaient, entre autres, été traités.

6 : Les quadrilatères AIJB, BJDC, DEFJ et HGFJ sont des rectangles.

a) Pour chacun des calculs suivants, identifier la figure dont on a calculé les mesures de l'aire ou du périmètre puis effectuer les calculs indiqués.

A = 5 × (4 + 2) ; B = 2, 5 × 8 + 5 × 4 ;
C = 8 × (5 + 2, 5) – 5 × (8 – 2 – 4) ;
D = 5 × 2 + 2 × 2 ; E = (4 + 5 + 2, 5) × 2.

b) Calculer la mesure de l'aire et celle du périmètre des figures ABFGHI, AIHGEDJB, ACDJFGHI.



7 : Samedi matin, au supermarché, Julien a acheté 4 pâtisseries à 1, 10 € l'une, 3 cahiers identiques de même prix. On lui a rendu 7 € lorsqu'il a donné un billet de 5 € et un billet de 10 €. Sans effectuer de calcul, quelle ou quelles expressions numériques sont égales au prix en euros d'un cahier ? Quel est ce prix ? A = 10 + 5 – 7 – 4 × 1, 10 ÷ 3 ;
B = 10 + 5 – (7 – 4 × 1, 10) ÷ 3 ;C = (10 + 5 – 7 – 4 × 1, 10) ÷ 3 ;
D = (10 + 5 – 7) – (4 × 1, 10) ÷ 3 ;E = [(10 + 5 – 7) – (4 × 1, 10)]÷ 3.

8 : Compléter l'expression « 3 ... 3 ... 3 ... 3 » avec une ou plusieurs des quatre opérations, et des parenthèses, si nécessaire, de façon à obtenir tous les nombres entiers de 0 à 10.

9 : **a)** Traduire par une expression numérique chacune des phrases suivantes :
Le nombre A est la somme de 3 et du produit de 2 par 7.
Le nombre B est le produit de 5 par la différence de 12 et de 7, 5.
Le produit de 6 par la somme de 7, 2 et de 2 est égal au nombre C.
Calculer A, B et C.
b) Traduire par une phrase chacune des expressions numériques suivantes :
M = 7 + 7 × 8 ;N = 3 × (9 – 2, 5) ;P = (7 + 9) × 8;
Q = (8 – 3) × (4, 5 + 2).
Calculer M, N, P et Q.

II. Analyse des réponses

Si on analyse les réponses de nos élèves lors de la recherche individuelle, on constate qu'une réponse apparaît majoritairement. Elle est formulée à peu près ainsi : « J'associe A et E car il y a les mêmes nombres et les mêmes signes (ou des signes différents) ». Dans une classe (25 élèves), elle est la seule réponse donnée par 60 % des élèves ; dans l'autre (23 élèves), par 61 % des élèves.

Comment interpréter ces réponses ?

II.1. Pensée par complexes, pensées par concepts chez Vygotski

Ici les concepts développés par Vygotski de "pensée par complexes" et "pensée par concepts", nous permettent peut-être de mieux analyser ces réponses.

Selon L.S. Vygotski, le développement des concepts se déroule selon un processus liant indissociablement leurs évolutions structurelles et fonctionnelles et suivant une histoire particulière à chaque individu. L.S. Vygotski, distingue trois phases dans le processus de développement des concepts : la pensée syncrétique, la pensée par complexes, la pensée par concepts. Chaque phase du processus correspond à un acte de généralisation qui se génère dans les précédentes, les prolonge, sans s'y substituer. Les moyens de catégorisation fournis par le langage y jouent un rôle indispensable. Les relations entre pensée et langage correspondent d'abord à des liens directs entre les mots et ce qu'ils désignent : des objets sont réunis sur la base de liaisons plus ou moins objectives entre certaines de leurs propriétés. Cette particularisation s'actualise par l'organisation et la systématisation de l'expérience. Ainsi le sens des mots se

complexifie et leur emploi remplit des fonctions différentes tout au long du processus de développement.

Exemple : les concepts de nombre, d'opération, ou de grandeur n'existent pas l'un sans l'autre, se comprennent et se construisent en lien les uns avec les autres. Ils ne sont pas perçus, pensés, utilisés de la même façon par un même individu selon l'âge ou le contexte. Et deux élèves de même âge et suivant le même enseignement ne connaîtront pas des « expériences-déclic » ou sauts de conceptualisation au même moment.

La pensée par complexes correspond au comportement de l'enfant et reste efficiente au quotidien chez l'adulte. Les objets réunis en complexes ne le sont plus uniquement sur la base de liaisons subjectives liées à l'impression comme dans la pensée syncrétique, mais sur des liaisons objectives réelles, concrètes, de fait, découvertes par l'enfant. La pensée par complexes est cependant différente de la pensée par concepts. Le complexe, en lien direct avec ce qu'il représente, est peu systématisé et non unifié. Il repose en effet sur des liaisons variées, concrètes, intuitives et empiriques, entre ses divers éléments, aucune d'entre elles n'ayant plus d'importance que les autres.

Exemple : un enfant peut regrouper des objets dans un même complexe, parce qu'ils ont la même couleur, la même forme ou les mêmes dimensions, ou par tout autre lien objectif perçu par lui. Une seule et même chose peut alors entrer dans des complexes différents.

Les mots indiquent les mêmes objets ou phénomènes concrets que pour les adultes mais n'ont pas la même signification car ils ne sont pas pensés de la même façon : leur fonction est de désigner les objets réunis en complexes (comme des noms de famille), de communiquer et non de réaliser l'idée.

Exemple : le mot «droite», dans une pensée par complexes, évoque un trait. Dans une pensée par concepts, il évoque un objet géométrique idéel.

Les éléments réunis en complexes ne sont pas assez abstraits et restent trop dépendants de l'expérience initiale. Ils ne peuvent se structurer en système, ce qui compromet de fait les enchaînements d'idées.

La pensée par complexes fonctionne par mobiles extrinsèques.

Exemple : en classe, un élève peut très bien, dans une situation donnée, résoudre un problème correctement, ce qui peut faire penser que le concept est maîtrisé. Mais, il peut ne pas être capable de résoudre le même problème dans un contexte différent, souvent sans que l'adulte ne comprenne pourquoi. La réaction face à une situation, un problème, est ici davantage liée à un souvenir concret (c'est comme quand j'étais assis à côté d'Ewan ; le prof avait un pull rouge ce jour-là ; ...) qu'à la reconnaissance d'un concept utilisé de façon consciente et volontaire. On serait plutôt en présence d'un pseudo-concept (complexe particulier).

II.3. Un éclairage possible des réponses par le modèle historico-socio-culturel de Vygotski

Dans l'activité présentée précédemment, il nous semble que les élèves qui donnent comme seule réponse « J'associe A et E car il y a les mêmes nombres et les mêmes signes (ou des signes différents) » manifestent une pensée par complexes. Ces regroupements sont effectués uniquement sur le mode perceptif. La signification des expressions n'est pas lue. B, G… ne sont pas comprises comme des sommes, mais comme des expressions où figurent les mêmes signes (perception). Dans ces conditions,

la question de l'égalité entre ces nombres, par exemple, ne peut pas se poser.

Lors du débat, nous nous sommes interrogés sur la signification du verbe lire. Nous avons alors proposé l'activité suivante :

Voici un certain nombre de mots. Regroupe-les en énonçant clairement et par écrit les raisons de tes choix.

Hôpital Hospitalier Chat Hospitalité Souris.

Oralement les élèves ont immédiatement proposé les regroupements suivants : Hôpital, Hospitalier, Hospitalité et Chat, Souris.

Nous leur avons demandé de tenter d'imaginer ce qu'auraient pu répondre les élèves qui avaient répondu « J'associe A et E car il y a les mêmes nombres et les mêmes signes (ou des signes différents) », dans ce nouveau contexte. Après quelques minutes de recherche, quelques visages d'élèves se sont éclairés : "Ils auraient sans doute répondu qu'ils associaient hôpital et chat parce qu'ils utilisaient le "a" dans leurs écritures." Et un autre de continuer « Mais alors, ceux qui ont répondu "J'associe A et E…" n'ont pas vraiment lu les expressions numériques.» Nous avons donc été conduits à nous interroger sur le sens du verbe "lire".

Nous avons alors proposé une définition du verbe lire : "lire c'est donner une signification à des signes." Nous avons fait remarquer que dans l'activité concernant le regroupement de mots, les élèves avaient réellement lu les mots. Leurs regroupements étaient justifiés par des relations de sens qui se tissaient entre ces mots, selon leur racine commune ou des relations alimentaires. Par contre, avec les nombres, pour la majorité d'entre eux, leur "lecture" (qui n'en est pas vraiment une, au sens défini précédemment) avait été purement perceptive. Le sens des expressions ne semblait pas faire lien. Il n'y avait aucune prise de recul par rapport à ce que leurs yeux percevaient.

Après ces discussions, nous avons repris l'activité de regroupements avec les nombres. Les regroupements proposés, après une dizaine minutes de recherche, ont été alors différents, pour une part, de ceux donnés avant le débat. Les sommes ont pu être regroupées par certains groupes, les nombres égaux aussi, le seul produit de la liste a été remarqué. Un débat s'est aussi engagé sur l'usage des parenthèses. Le nombre A a pu être lu comme la somme de la différence de 21 et de 17 et de 7…

III. Une première conclusion partielle et rapide

Cette activité nous semble mettre en évidence une question importante. L'élève qui ne sait pas "lire", au sens donné précédemment, une expression numérique comme 2 + 3 x 5 pourra-t-il lire une expression comme 2 + 3x ? Cela nous semble difficile. La lecture de 2 + 3x "généralise" la lecture de 2 + 3 x 5. Et la lecture de 2 + 3 x 5 ne peut s'effectuer que si les concepts de somme et produit, en particulier, sont maîtrisés.

À ce sujet, l'enseignement des "priorités opératoires" tel qu'il est présenté dans les programmes nous semble problématique. La question de savoir quelle "opération " est à effectuer en premier focalise l'attention sur les signes et non sur le sens de l'expression. Elle paraît renforcer la pensée par complexes. Et, sans doute, créer des difficultés pour la lecture des expressions littérales.

LECTURES D'ERREURS COMMUNES

Ceci est le compte rendu d'un atelier d'un de nos stages de formation continue intitulé "Analyse de situations didactiques en mathématiques au collège" qui a eu lieu durant l'année scolaire 2004-2005.

I. Idée “à la base” de cet atelier

On peut multiplier les observations qui permettent de vérifier que des erreurs en mathématiques sont renouvelées sur des “copies” d’élèves, indépendamment du lieu, du milieu socio-professionnel familial, de l’année, de l’établissement, par des élèves dont les bulletins scolaires peuvent être bien différents.

Il n’est donc pas illégitime d’émettre les hypothèses suivantes :

• Ces types d’erreurs caractérisent peut-être des similitudes de contextes didactiques systémiques, bien davantage que des capacités individuelles d’élèves.
• Les élèves qui écrivent ces erreurs suivent des “logiques” procédurales, identifiables, implicites, et “sues” parce qu’elles ont pu paraître efficaces.
• Ces erreurs donnent des indices d’une pensée par “complexes”, certains de ces pré-concepts, parmi les plus communément rencontrés, sont d’une formation assez bien discernable.

II. Le matériau de travail

Il est constitué par quelque quatre-vingts exemplaires du “questionnaire” dont une version est jointe ci-après, renseignés “spontanément” par des élèves de troisième (quatre classes, années différentes, trois établissements non voisins), en temps limité (20/25 min), sans calculatrice, avec brouillon éventuel au verso de la feuille.

III. L’activité dans l’atelier

Individuellement, étude de trois ou quatre productions, en essayant **non pas de décrire les erreurs**, mais de :
• Trouver des “logiques” susceptibles d’être en “résonnance consciencieuse” avec du quotidien scolaire,
• Repérer des “cohérences/incohérences” sur une même copie.

Par groupes, sur affiches, pour l’analyse en commun, présentation du travail ci-dessus pour quelques cas.

La retranscription des “affiches” ci-après sert de base à une lecture *historico-socio-culturelle*, des productions d’élèves qui y ont été consignées et étudiées ; il s’agit d’un essai proposé pour traduire les échanges selon les principaux axes des débats : la *lecture numérique* et les traces de *l’histoire des significations* en jeu pour l’élève.

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes.
C1	$D = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{1}$	Je barre "en haut" et "en bas" les mêmes chiffres… et autres exemples de la même logique plus ou moins explicitée.
31	$D = \dfrac{1+\cancel{\frac{1}{2}}}{-1+\cancel{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{-1} = 0$ $G = \dfrac{\cancel{2,009}}{\cancel{10,009}}$ $G = \dfrac{2}{10}$ $I = \dfrac{6\cancel{33}}{12\cancel{33}} = \dfrac{6}{12}$	
22	$H = \dfrac{0,0014}{1000}$ $H = \dfrac{14}{1}$	
26	$H = \dfrac{0,0014}{1000}$ $H = \dfrac{14}{1}$ $E = 702 \times 19,5 \times 120$ $E = 702 \times 19,5 \times 120 \times 3900$ $E = 3900 \times 3900$ $E = 3900^2$ $D = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{-1+\dfrac{1}{2}}$ $= \dfrac{1,5}{-0,5}$ $= 1,5 \times 0,5 = 0,75$	• "quotient de E par 3990" ⇩ "E × 3900" de même • "quotient de 2500 par 99" ⇩ 2500 × 99 de même • "quotient de F par 3^{200} ⇩ „ $F = 3^{161} \times 3^{49} \times 3^{40} \times 3^{200}$ et $F = 3^{440}$ avec la donnée $F = 3^{161} \times 3^{49} \times 3^{40}$ • -0, 5 inverse de 0, 5

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes
39	$100x = x + 12$ $100x + 12 = x$ $100 + 12 = 2x$ $112 = 2x$ $\frac{\sqrt{112}}{2} = x$ $210 - 21x = 0$ $x = 210 + 21$ $x = 231$ $C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64$ on simplifie par $\frac{7}{9}$ $C = 17 + 64$ $C = 81$	Peut-être influence de la propriété de Pythagore. 100 donne l'idée de carré, renforcée par la forme ? Volonté de mettre les "x" et "les "nombres" chacun de leur côté (comme précédemment).
A9	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - 7 - 14 = x$ $210 - 21x = 0$; $x = 10$ car $21 \times 10 = 210$ et $210 - 210 = 0$	
8	$H = \frac{0,0014}{1000}$ $H = 0, 000014$ $A = 1\ 999\ 999 \times 236$ $A \approx 236\ 000\ 000$ $B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$ $B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100}$	Problème avec les simplifications, S'arrête à $x = \frac{12}{99}$; $x = \frac{96}{16}$; $x = \frac{210}{21}$. Ou encore à $D = -\frac{6}{2}$.

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes
10	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - \frac{21}{3} = 14x$ $-\frac{14}{3} = 14x$ $x = \frac{-14}{\frac{3}{14}}$ $x = -\frac{3}{14} \times 14$ $x = -3$ Nombres à coup sûr différents de "a" dont on sait qu'il est décimal : aucune fraction n'est mentionnée.	• Diviser un nombre en écriture fractionnaire par un nombre en écriture fractionnaire pose un problème. • Sait faire le contraire, mais ne réalise pas que $14 = \frac{14}{1}$ Pour cet(te) élève, une écriture fractionnaire est-elle forcément un décimal ?
10 bis	$100x - x = 12$ $\frac{\cancel{100}x}{\cancel{100}} - x = \frac{12}{100}$ $x - x = 0,12$ $0 = 0,12$ Cette équation n'a pas de solution. Nombres à coup sûr différents de "a" dont on sait qu'il est décimal : $I = \frac{633}{1233}$ $I = \frac{33}{233}$	Il faut que le facteur devant "x" soit 1. Donc 100x, je divise par 100. Par contre "– x", il n'y a pas à diviser. Un entier ne peut être décimal. "Simplification" par 6.

À partir de ces relevés, des exemples de "variantes" sont susceptibles d'être apportés dans l'analyse des productions des élèves, lorsque les lectures tendent à se positionner suivant une "modélisation" historico-socio-culturelle (*inspirée des recherches de Vygotski*) du développement intellectuel.

Deux remarques préalables.

• La démarche porte l'attention principale sur le développement intellectuel de l'auteur des "erreurs" étudiées, sur les possibles/probables mouvements de sa pensée ; non pas sur la description des erreurs en tant que telles, mais plutôt sur le "fil conducteur" de l'enchaînement d'idées dont elles sont le fruit.

Il est alors parfois possible de mettre à jour un travail intellectuel très laborieux, mais les raisonnements n'y ont pu être contrôlés faute de registres de langage appropriés, et il a abouti à des non-sens (quelquefois relevés par leurs auteurs).

• Contrairement à ceux qui appartiennent aux lignées rousseauistes ou piagétiennes, un point de vue historico-socio-culturel de l'apprentissage ne fait pas considérer que ce sont les erreurs qui sont formatrices[11].

Les erreurs proposées à l'étude dans cet atelier, sont structurelles: elles témoignent d'un mode de pensée.

• En situation de "recherche", les erreurs sont conjoncturelles[12] et sont formatrices seulement dans la mesure où leur dépassement signe une extension de connaissance, autrement, contrôlables par le sens, elles ne sont ni positives ni négatives : elles sont ! "Naturelles" en somme !

IV. Relevé concernant les élèves référencé(e)s " C1", " 31" , " 22 "

(Première affiche dans le compte-rendu).

IV.1. Des formes données aux nombres D, G, H, I

"Logique" possible/probable :

fraction - la même chose en haut et en bas - à barrer.

L'attention porte sur la perception et l'action concrète, pas sur l'activité mathématique qui serait "commandée" par la connaissance de la propriété fondamentale des quotients.

Pour l'élève et l'enseignant la signification de "fraction" semble en coïncidence au niveau du mot, mais cela n'est pas le cas au niveau des actes de pensée: pour l'élève le mot est "chosifié" en deux nombres l'un au-dessus de l'autre, séparés par un trait horizontal.

---

[11] Voir à ce propos, Pensée & langage, page 305, édition La dispute, 1997.

[12] Cette catégorisation des erreurs – structurelles et conjoncturelles – est empruntée à Stella Baruk.

Il ne semble pas illicite d'affirmer que les mots "*fraction*", "*simplifier*", "*mêmes nombres-chiffres-chose*", "*pareil-en-haut-en-bas-trait*", "*barrer-enlever*", "*numérateur et dénominateur*", ... forment pour ces élèves (avec dans chaque cas des nuances, plus ou moins systématiques comme plus ou moins aléatoires) un complexe-collection tel que le définit Vygotski :

"… ***une généralisation des choses sur la base de leur participation à une opération pratique unique, sur la base de leur collaboration fonctionnelle.***"[13]

V. Relevé concernant l'élève référencé "26"

(Deuxième affiche dans le compte rendu).

V.1. La filiation "multiplication ↦ division"

La plupart du temps, bien au-delà du collège, les concepts de nombre, d'opération, de forme numérique ne sont pas advenus en tant que concepts de plein exercice[14], et sont rigoureusement caractérisables par les propriétés de deux phases du mode de pensée par complexes; celle du complexe en chaîne
" qui se construit selon le principe de la réunion dynamique et temporaire de maillons isolés en une chaîne unique et du transfert de signification d'un maillon de la chaîne à un autre ",[15]
et celle du complexe diffus qui réunit
" à l'aide de liaisons diffuses des groupes intuitifs-concrets d'images ou d'objets "[16].

Dans ces zigzags de pensée incertaine, les mots "plus", "multiplié" ou "divisé", … n'appellent pas une liaison par acte de pensée mathématique entre les nombres engagés dans l'opération évoquée, mais une liaison associative, par une gestuelle concrète entre "choses-nombres" perçues, gestuelle automatisée avec plus ou moins de fidélité.

PRENONS, PAR EXEMPLE, LE CONCEPT DE MULTIPLICATION.
En tendance[17], il s'enracine graduellement dans l'entraînement à suivre pas à pas une procédure de calcul ritualisée, davantage que par une distanciation relative à des expériences mentales d'additions particulières, initiant des activités d'abstraction et de généralisation.

Les échanges d'expérience enseignante, à partir du quotidien scolaire, tendraient à montrer que l'appréhension des notions de "multiplicande/multiplicateur" est souvent court-circuitée au profit d'une "algébrisation" prématurée des calculs, avec l'objectif d'obtenir rapidement des calculs "justes", en quelque sorte sans obligation de sens :

---

[13] Vygotski, *Pensée & langage*, page 220, éditions La Dispute, 1997.

[14] Ils ne peuvent pas se dire en adaptation volontaire au contexte, selon le recours maîtrisé à leurs relations avec d'autres concepts ; à la phase où ils sont, ils ne peuvent se dire que par eux-mêmes.

[15] Vygotski, *Pensée & langage*, page 221, éditions La Dispute, 1997)

[16] Vygotski, *Pensée & langage*, page 223-224, éditions La Dispute, 1997)

[17] Le réalisé d'humanitude est lié à l'histoire particulière de chaque individu, non duplicable et infiniment varié ; ses descriptions ne peuvent être vraies qu'en tendance, données suivant des lignes générales, en cohérence avec des choix qui les orientent.

c'est ainsi que l'on arrive à exhiber "une règle de priorité" qui apparaît littéralement "*conventionnelle*" au lieu de THÉORIQUEMENT FONDÉE, et à des écritures "remparts d'erreurs" qui exonèrent de la maîtrise dans l'activité de LECTURE/ÉCRITURE NUMÉRIQUE.

Si la notion de "produit" comme nombre au singulier, (son écriture le rappelant comme formé à partir d'autres nombres grâce à la multiplication, cette formation possédant des propriétés caractéristiques fonctionnelles en calcul) n'a été ni "décollée" des situations concrètes "illustratives" (celles-ci pouvant même se retrouver insuffisamment nombreuses et variées), ni abstraite des cheminements de calcul, et qu'arrive la définition rigoureuse qui dit :
" *a et b étant des nombres quelconques (sauf que b n'est pas zéro), le quotient de a par b est le nombre dont le produit par b égale a"*,

MÊME SI L'ON N'OMET NI L'ÉTUDE GRAMMATICALE, NI LES VARIATIONS DANS LA RÉDACTION, on conçoit facilement que cette définition a peu de chance de véritablement constituer une "*zone de proche développement*" au concept de quotient de deux nombres.

Lorsque les préconcepts de "produit" et de "quotient" sont regroupés, *à l'aide de liaisons diffuses*, sous le vocable "résultat", il s'établit un *transfert de signification* entre "opération" et "calcul", une *chaîne* de sens, ou plutôt *du sens enchaîné*, qui fait obstacle à une extension de généralisation et d'abstraction pourtant nécessaire, par exemple pour que se spécifie le calcul littéral ; la définition évoquée provoque alors des réflexions d'élèves présentant les marques d'une pensée par complexes, où un seul mot de la phrase convoque un amalgame à géométrie variable, dans lequel sombre l'idée exprimée :

- **si on ne connaît pas a et b , on ne peut pas les diviser ;**
- **un quotient c'est (avec) une division, pas une multiplication.**

ou, en langage pour soi,

"logique" possible/probable pour "26" (élève de troisième[18], donc qui a "appris" que *diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse*) :

- E divisé par 3900, ça fait "fois 3900"[19]

  $E = 702 \times 19,5 \times 120 \times 3900.$
- 19,5 … la moitié de 39
- … 702 x ... on fait 2 …" fois 19,5",
- … deux zéros, …… "12 … 7 … 19", … "02 [20] ... 19,5" ; …
- … je sais … $E = 3900 \times 3900$

  $E = 3900^2$

comme dans :

---

[18] Dont les résultats scolaires ont permis une admission en seconde générale, comme pour tous les autres élèves de la classe (leurs productions sont répertoriées par les numéros simples qui vont de 1 à 26).

[19] Il est notable que des élèves de plus en plus nombreux formulent des réponses sur ce registre : "j'ai fait fois trois"; l'abstraction de multiplicateur/multiplicande et, a fortiori, celle de facteurs ne sont alors certainement pas advenues.

[20] Littéralement "entendu" comme 0, 2 (zéro deux) et lui-même "compris" comme $\frac{1}{2}$.

$$H = \frac{0,0014}{1000}$$

• … trois zéros au-dessus, trois zéros en dessous, faut barrer

• $H = \frac{14}{1}$

ou dans :

$$D = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-1 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1,5}{-0,5}$$

• … - 0,5 dessous … ça fait “fois” sans le moins …

= 1, 5 × 0, 5 = 0, 75

VI. Relevé concernant les élèves référencé(e)s “ 39 ” et “ 8”,

(troisième et quatrième affiches dans le compte-rendu)

VI.1. Des résolutions d’équations

On retrouve encore manifestement les sillages d’une *pensée par complexes* où s’enchevêtrent *complexes diffus* et *complexes en chaîne*.

100 x = x + 12

• on met les “nombres” du même côté ... 100x + 12 = x

• on met les x du même côté ... 100 + 12 = 2x ....

Et là, l’examen de la “copie” de “39” tend bien à faire reconnaître que cet(te) élève a lu “la somme de deux carrés” dans une présentation familière, comme l’ont suggéré les collègues auteurs des notes portées par l’affiche.

Là où il est demandé de calculer B avec

$$B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$$

l'élève “39” a enchaîné par $B = \frac{490}{109} \times \frac{260}{700} \times 52$

ce qui montre 13^2 lu comme $10^2 + 3^2$ ce qui pour cet(te) élève évoque fortement le “100 + 12 ” comme “devant être revêtu” d’un “ $\sqrt{\ }$ = … ce que l’on cherche ”, c’est-à-dire x ; … 2x ? … alors “il faut” diviser par deux.

L’ensemble de sa copie fait apparaître que cet(te) élève a bien retenu un imbroglio d’éléments de “leçons apprises” sans lien les uns avec les autres, associés à des graphies spécifiques perçues, pas à des signes mathématiques parlants; ainsi :

• à la suite de $\begin{matrix} x^2 = -8 \\ x = \sqrt{-8} \end{matrix}$ l’élève a écrit “cette équation est fausse car les racines carrées ne sont pas négatives” ;

• comme indiqué sur l’affiche, à

$C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64$ l'élève a écrit " on simplifie par $\frac{7}{9}$ "

• "Logique" possible/probable : " fractions, pareil, ça s'en va, simplifier "

• à "donner l'encadrement par deux entiers consécutifs du quotient de 2500 par 99 ",

ce sont encore des bribes de procédure "apprise" (un algorithme de calcul du PGDC de deux entiers) qui semblent appelées par des mots dont les évocations qu'ils provoquent viennent "bout à bout" ... *quotients*, *division*, ... *entiers*, ... *plus grand*, *plus petit*, ... *restes*, ... *différences* ,

puisque cet(te) élève a répondu
2500 - 99 = 2401
2401 - 99 = 2302
.....
.....
124 - 99 = 25
où ce 25 est "encadré" dans un rectangle ... en tant que "réponse".

Au vu de la copie de "39" il ne semble pas impossible d'affirmer qu'il y a eu MISE EN COHÉRENCE DES RÉPONSES entre les deux résolutions d'équations abordées puisqu'on y trouve :
$210 - 21x = 0$
$210 = +21x$
valant pour "je fais passer 21x de l'autre côté en changeant le moins", puis, comme pour la précédente équation examinée ci-dessus, remplacé par :
$x = 210 + 21$
l'élève " a fait passer les nombres du même côté, en changeant le moins "
… il y a bien une différence à propos du changement de signe, mais si on essaie de se placer dans une "logique" de *pensée par complexes* on peut y reconnaître comme une confirmation de primauté de la lecture de 100 en tant que carré parfait, suggérée précédemment selon

"***le principe de la réunion dynamique et temporaire***
de maillons isolés en une chaîne unique
et du transfert de signification d'un maillon de la chaîne à un autre ".

• La lecture numérique en pensée par complexes donne des erreurs similaires caractérisant sans doute davantage des similitudes de CONTEXTES DIDACTIQUES SYSTÉMIQUES que des capacités individuelles d'élèves,

Les élèves référencés " 39 " et " 8 " n'appartenaient ni au même établissement, ni à la même promotion, ni au même département.

Ils(elles) n'ont donc pas bénéficié des mêmes professeurs, mais ont manifestement "entendu", "retenu" des cours analogues; leurs erreurs ne sont pas "*n'importe quoi*" : on peut y reconnaître, jusque dans le détail non remarquable au premier coup d'œil, les mêmes "scories" langagières de leçons "ordinaires".

COMPARONS :

$$H = \frac{0,0014}{1000}$$

les réponses sont différentes mais les mouvements de pensée analogues :

• dans le premier cas … trois zéros au-dessus, trois zéros en dessous, faut barrer

$$H = \frac{14}{1}$$

• dans le deuxième cas ... rajouter trois zéros après la virgule ... mais attention ... celui devant la virgule ne compte pas ...
H = 0,000014 ;

dans les deux cas on compte, barre ou place des "zéros" qui ne sont que des signes graphiques.

Aucune intervention des concepts médiateurs d'une *lecture/écriture décimale* [21] des nombres en jeu.

$$B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$$

" 8 " a produit

$B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100}$ avec "brouillon" de calcul au verso :

700	490	127400	
× 13	× 260	× 52	6624800
2100	29400	254800	+ 127400
7000	98000	6370000	6752200
9100	127400	6624800	

"Logiques" possibles/probables :

• des fractions à multiplier, … ? (transformer 52 en fraction en ajoutant un 1)
• multiplier tout ce qui est en haut avec ce qui est en haut, (je me rappelle, "ça peut pas être plus simple" dit par le prof.) et ce qui est en bas avec tout ce qui est en bas ;
• 700 … fois 13 … résultat 9100 ; … avec un carré … et deux zéros, faut rajouter deux zéros ; … 910000 en bas ;
• 490 … fois 260 … résultat 127400 … fois 52 … résultat 6624800 ….
variante 1)
mes deux résultats ça fait 6752200 en haut ;

[21] Cf analyse de "10" et "10 bis".

ou bien variante 2)
oui mais faut le rajouter une fois à cause du 1 pour transformer 52 en fraction … 6752200 en haut ;

• deux zéros à la fin … en haut et en bas … barrer.

Il ne s'agit évidemment pas de "deviner" ce qu'a pensé EXACTEMENT l'élève.

Mais, si l'on veut bien faire l'hypothèse que les similitudes qui peuvent être repérées À RÉPÉTITION ne doivent rien au hasard, que les ÉLÈVES ŒUVRENT INTELLECTUELLEMENT ET QU'ILS NE SAVENT PAS RIEN pour répondre aux exercices qui leur sont proposés, il apparaît clairement une certaine adéquation entre leurs *registres langagiers* et des *actes de pensée par complexes*.

Une réalité qui ne devrait pas être, encore et toujours, considérée à priori comme indépendante des situations langagières vécues avant tout dans le quotidien scolaire.

VII. Relevé concernant l'élève "10" et "10 bis"

(cinquième et sixième affiches dans le compte-rendu)

• La signification de "nombre décimal" se présente le plus souvent comme un complexe-collection .

"Logiques" possibles/probables :

• si "a" est un décimal ce n'est pas un nombre rond, …

alors "a" est à coup sûr différent de $\frac{32}{8}$, $\frac{49}{7}$, $\frac{333}{111}$ (élève réf. 10 bis)

• si "a" est un décimal c'est un nombre "qui tombe juste" ou alors "qu'il faut une virgule", …

donc "a" est à coup sûr différent de π et de $\sqrt{3}$ (élève réf. 10)

• j'entoure d'abord les "a" possibles à coup sûr :

$\frac{13}{4}$; $\frac{32}{8}$; 3,14 ; $\frac{49}{7}$; $\frac{22}{7}$; c'est comme 3,14 … *remplac*e π, $\frac{333}{111}$;

… les à coup sûr différents de "a" : $\sqrt{3}$; π ; … une puissance

pour $\frac{7}{3}$ je ne sais pas, après la virgule, ça fait 333333 à l'infini, … ? (élève réf. 22) [22]

• si "a" est un décimal c'est un nombre "à virgule" …

donc "a" est à coup sûr différent de $\frac{13}{4}$, $(-53)^3$, $\frac{7}{3}$, π, $\sqrt{3}$, $\frac{22}{7}$. (élève réf. 8).

Il n'y a pas de prise de conscience qu'un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire exactement dans le système décimal de numération. C'est sur la graphie du

[22] Les exemples ne sont pris que dans des "questionnaires" distingués sur les affiches ; AUCUN DE CES NEUFS "TESTS" NE PORTE UNE RÉPONSE EXACTE ET COMPLÈTE.

“nombre-objet-perçu” que porte l’attention.

Deux remarques.

1°) L’efficacité des décalages de la virgule ou du comptage des zéros est aléatoire sur chacune des “copies” de ces élèves.

Ainsi “ 10 bis ” a produit :

d’une part $\begin{cases} H = \dfrac{0,0014}{1000} \\ H = 0,0014 \times 10^{-3} \end{cases}$

et d’autre part $\begin{cases} A = 1999999 \times 2396 \\ \quad = 2000000 \times 200 + 35 \\ \quad = 400000000 + 35 \\ \quad = 400000035 \end{cases}$

mais encore, déjà relevé sur l’affiche :

$$\begin{cases} 100x - x = 12 \\ \dfrac{100x}{100} - x = \dfrac{12}{100} \\ x - x = 0,12 \\ 0 = 0,12 \\ \text{Cette équation n'a pas de solution.} \end{cases}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 32 = \dfrac{16}{3}x & \dfrac{2}{\frac{1}{3}} = x \\ \dfrac{32}{\frac{16}{3}} = \dfrac{\cancel{16}\,x}{\cancel{3}\;\cancel{16}} & \dfrac{2}{3} = x \quad \text{La solution de l'équation est } \dfrac{2}{3} \end{array} \right\}$$

On a une illustration du fait que des réponses “justes”, voire “savantes”, ne signifient pas maîtrise conceptuelle : elles sont loin d’engager des vérifications de cohérence qui la signifieraient (chiffre des unités pour un produit d’entiers calculé, remplacement de la variable par la valeur trouvée, …). [23]

Si le contexte langagier est appauvri, les liens entre catégorisations perceptives restent associatifs; si les médiations langagières ne sont pas à la hauteur au plan de

[23] Il conviendrait donc de s'interroger sur les "bonnes notes" qu'elles encourent, et aussi relativiser les "mauvaises" ; de ne plus les considérer, ni les unes ni les autres, comme critères indispensables et incontournables d'orientation scolaire.

l'abstraction, les processus d'évolution des propriétés relationnelles générales des concepts languissent.

2°) Une remarque se rapportant à l'histoire scolaire de l'expression "nombre décimal".

> "*Et ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle que des mathématiciens comme Cantor, repensant les fondements des mathématiques, élaborèrent une théorisation des décimaux, après que ces derniers eurent été longtemps réduits à un rôle pratique.*"[24]

Le rôle pratique des décimaux, c'était de remplacer dans le quotidien l'écriture fractionnaire des non-entiers ; la tâche, ardue, fut dévolue à l'École, aux instituteurs ; elle a duré plus d'un siècle.

Dans l'École, L'ÉCRITURE DÉCIMALE S'OPPOSE DONC À L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE DES MESURES NON-ENTIÈRES.

Or, progressivement n'a plus subsisté que la désignation de l'un des termes de l'opposition et, au fur et à mesure, les fractions devenaient de moins en moins des nombres ordinaires tandis que les décimaux les remplaçaient dans le fractionnement des unités.

Si aujourd'hui, au quotidien aussi bien que pour nos élèves, décimal s'oppose à entier, cela manifeste UN GLISSEMENT DE SENS DANS UN COMBAT SCOLAIRE mené avec un "zèle éclairé" ; LES ABUS DE LANGAGE SONT FONCTIONNELS, MAIS s'ils ne peuvent pas être conscients, ils sont susceptibles d'altérer les significations, de bloquer les mises en cohérence, et, par exemple, … D'EMPÊCHER DE RECONNAÎTRE "10 " COMME UN DÉCIMAL.

VIII. Quels axes éventuels pour nos pratiques d'enseignement?

• Nécessité d'une prise de conscience de nos représentations de l'apprentissage, pour une meilleure maîtrise de la cohérence de l'enchaînement des cours, de leurs liens, tant avec les acquis qu'avec les perspectives d'étude à venir.

---

[24] BASSIS O., MATHÉMATIQUES, les enfants prennent le pouvoir, p 75, éd Nathan, 1984.
Odette Bassis souligne que « c'est un choix politique (...) qui a accéléré définitivement la pratique de l'écriture décimale ».
(Ce choix est celui du système métrique (facilitation du commerce; devenu légal en 1840 seulement), système voulu décimal et dont il a été aussi voulu qu'il rattache les diverses sortes de grandeurs à l'unité de longueur, elle-même voulue, suivant l'esprit révolutionnaire d'après 1789, « *naturelle, invariable, dont la détermination ne renferme rien d'arbitraire, ni de particulier à la situation d'aucun peuple du globe* ».)
Odette Bassis cite un discours de Laplace aux formateurs des instituteurs, en floréal de l'an VII (1 799) : « *Il est permis d'espérer qu'un jour ce nouveau système sera généralement adopté, (...), il présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance. Vous en éprouverez à le faire entendre aux instituteurs, (...); car l'homme est naturellement porté à rejeter sur la complication des choses, la peine que ses préjugés et ses habitudes lui donnent à les concevoir: mais votre zèle éclairé surmontera ces obstacles… »*

• Les mouvements de pensée par complexes et par concepts n'obéissent pas aux mêmes dynamiques ;

∗ dans la pensée par complexes les significations sont, en quelque sorte, discrétisées et "rebondissent" par association les unes par rapport aux autres; les complexes restent en lien direct avec la réalité qu'ils évoquent, ils ne peuvent être désignés que par eux mêmes ;

∗ dans la pensée conceptuelle, le sens peut circuler parce qu'un concept isolé n'existe pas; tout concept est intégré dans un système de voisinages conceptuels subordonnés suivant la hiérarchie de leurs niveaux d'abstraction: tout concept peut s'exprimer d'une infinité de façons par la médiation d'autres concepts, entre lui et la réalité qu'il convoque.

• Les élèves en "difficulté" seront d'autant mieux "aidés" que seront multipliées les situations dans lesquelles on aura pu rendre incontournables les prises de recul, le détachement des liens directs et spécifiques d'avec les idées qu'elles font naître ; autrement dit, d'autant mieux, que la tendance "re-médiatrice" cultivera l'aptitude à l'abstraction *(plutôt que l'obtention de "résultats" concrets observables et a minima théoriques*) ; chaque élève est irrémédiablement unique et se trouve dans une dynamique d'évolution dont des indices sont perceptibles, mais qui reste essentiellement inatteignable ; une aide individuelle ne peut donc se concevoir que dans la variété pour tous, la richesse et la rigueur langagières pour tous ; (*les réactions individuelles profitant à tous, à condition qu'elles puissent être distinguées par chacun et par l'enseignant(e), ce qui impose des contraintes d'effectifs et de temps*).

LE CONCEPT D'ÉGALITE : CLEF OU VERROU ?

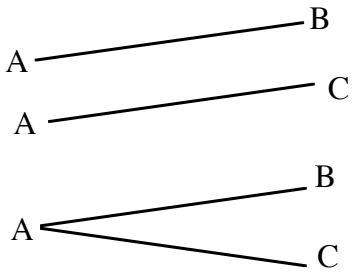
(Article original publié dans le n° 35 de la revue "*petit x*"
2è version, revue et augmentée)

Francis REYNES
Commission inter-IREM 1er cycle

Certains concepts nous sont tellement familiers que nous avons beaucoup de mal à imaginer qu'ils puissent poser des problèmes à nos élèves. Tel est le cas, au premier chef, du concept d'égalité, "élémentaire" s'il en est. Élémentaire et primordial, assurément, mais pour autant pas aussi évident qu'il en a l'air ! Nous tenterons ici de montrer l'importance fondamentale de ce concept, sa spécificité, l'éventail de ses utilisations et la nécessité de clarifier son emploi par l'explicitation de son sens.

Faites, dans n'importe quelle classe, l'expérience suivante (lors du premier cours de l'année c'est encore mieux) : écrivez au tableau un bel " = ", retournez-vous en souriant, et demandez à vos élèves : " qu'est-ce que ça veut dire ?" Avec un bel ensemble enthousiaste, ils vous clameront : "égale ! ". Alors, jouant les naïfs, vous reprendrez : "je ne vous demande pas comment ça se **dit**, je sais bien que vous savez lire, mais je vous demande **comment ça se pense**, autrement dit ce que cela **signifie**". Devant l'éventail des mimiques et des réponses, vous comprendrez vite que vous tenez là l'exemple canonique des difficultés spécifiques que soulève l'emploi d'un langage scientifique et, qui plus est, formalisé. Pourtant, à leur entrée en 6è, les élèves l'utilisent depuis plusieurs années déjà, et même avec une certaine aisance apparente. De là à en extrapoler qu'ils savent vraiment de quoi il s'agit, il y a un grand pas qu'il faut absolument se garder de faire. En effet, l'emploi qu'ils en faisaient était limité au domaine numérique, **arithmétique**, alors qu'ils vont désormais avoir à l'utiliser dans un contexte **algébrique**, voire même géométrique. Or ce "***passage de l'arithmétique à l'algèbre***" est loin d'être évident, comme l'a très bien montré Y. Chevallard (*petit x* n°s 5,19, 23).

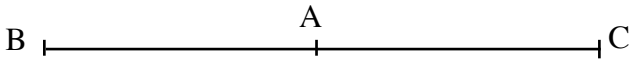
L'algèbre demande une prise de distance vis-à-vis de l'écriture du nombre, la géométrie, tout autant mais sur un autre mode, un recul par rapport au dessin. Lorsqu'on demande en 6è —et même bien plus tard ! — d'expliquer ce que signifie "4x3 = 5 + 7", on entend : "ils ont la même valeur" ou "c'est le même résultat". Il y a une idée juste, assurément, qui s'exprime par l'emploi de "même" ; mais on n'entend jamais : "c'est le même nombre", car la distinction essentielle n'est pas faite entre un nombre et son écriture (**ses** écriture**s**), ce qui est normal à ce niveau. Et lorsque j'ai demandé, en 6è :
"Dessinez deux segments [A B] et [A C]",
tous mes élèves ont produit un dessin du genre suivant :
(avec, dans la majorité des cas, AB = AC,
car... on n'est jamais trop prudent !)



En 4e encore quelques élèves donnent cette réponse,
mais la plupart font un dessin du genre ci-contre ;
parfois les segments sont perpendiculaires, mais on a

toujours AB = AC.

J'ai aussi trouvé, mais plus rarement :



Mais le plus remarquable est que j'ai retrouvé cette variété de réponses en 4e lorsque j'ai demandé : " faites un dessin qui traduise l'information : [A B] = [A C]".

L'emploi du mot "même" est très ambigu, car tiré de l'emploi usuel où l'on dit par exemple, "il *a le même livre que moi*" alors qu'il s'agit de **deux** livres, ou "*elle a la même robe que moi*" alors qu'il y a évidemment **deux** robes. Il y a beaucoup de sous-entendu dans ce "même", plus précisément une relation d'équivalence quasiment jamais explicitée : c'est le même modèle, la même édition, etc. Le langage mathématique exige que ces implicites soient levés.
Au Collège, progressivement, les élèves apprennent à se détacher de l'emprise du concret, à se libérer de ses contraintes et de ses limites. Le concept d'égalité doit alors bénéficier d'un nouveau statut, d'une nouvelle extension et d'une nouvelle compréhension. Or il se trouve que l'on a ici la chance de pouvoir accéder à une définition parfaitement correcte et rigoureuse :

1) Tout élève de 6è sait bien que la photo d'un chat n'est pas le "vrai" chat.

2) Il comprend sans mal que, pour pouvoir parler d'un "objet" ou d'un "être" quelconque, il faut pouvoir le nommer, ce qui présuppose que cet objet ait un **nom**.

3) Il convient tout aussi aisément qu'il vaut mieux éviter de donner le même nom à deux objets, sans quoi on en arriverait vite à ne plus savoir de quoi on parle.

4) Il sait d'expérience que l'**on peut donner plusieurs noms à la même "chose"**.

Ces quatre préalables, tous "évidents", sont pourtant loin d'être un luxe inutile ; **fonder leur évidence** constitue au contraire une assise indispensable à l'élaboration future. Pour s'en convaincre il suffit de poser la question suivante (dans n'importe quelle classe...) : *Lorsque j'écris :* (AB) = (AE), *je parle de combien de droites ?* Réponse quasi unanime : deux !...

Les "objets mathématiques" ne sont pas des objets physiques, matériels, appréhensibles par les sens, et il importe de pointer cette différence de nature, ce changement d'univers, cette rupture lourde de conséquences : ce sont des "concepts", des idées, des fruits de l'imagination humaine. Personne n'a jamais vu et ne verra jamais le nombre "douze" ! (Les élèves sont un peu choqués lorsqu'on leur dit que, de la même façon, personne n'a jamais vu un cercle, tant est installée la prégnance de la perception et mal défini le "statut de la figure", mais l'essence du problème n'en reste pas moins la même : le dessin d'un cercle n'est pas plus un cercle que l'image d'une pomme n'est une "vraie" pomme, cf. "La trahison des images" de Magritte).

Il est pourtant possible d'appréhender et de manipuler ces "objets idéels", à condition de disposer de quoi les **représenter**, les **nommer**. Ce point est crucial et il est indispensable d'amener peu à peu les élèves à réaliser que les Mathématiques

fonctionnent uniquement par l'intermédiaire des représentations, des désignations, des dénominations, des **noms**, car "*le but des mots est de pouvoir s'occuper d'autres objets que les mots*" (A. SCHAFF). En mathématiques, on a même la liberté de donner un nom à un objet inconnu, voire inexistant !

En tant que relation entre objets mathématiques, l'égalité traduit l'identité, la pérennité de l'objet : "4x3 = 5 + 7" ne dit alors pas autre chose que "douze est douze".

Mais c'est en tant que relation entre les <u>dénominations</u> d'objets que le concept d'égalité se révèle riche, fondamental et indispensable.

Pour bien saisir l'essence du concept d'égalité, sa portée, et le contexte dans lequel il doit être appréhendé, celui du **langage**, je citerai un court extrait de l'article "Notation mathématique" de l'Encyclopaedia Universalis : "*Un même objet peut avoir des noms divers, ainsi "Paris" et "la capitale de la France" désignent le même objet ; le nombre* 9 *peut être désigné par une infinité d'expressions, telles que* 2 + 7, 10 – 1, 32, 9x1*, etc.* ***Dans cette interprétation, le signe d'égalité n'est pas un signe mathématique, mais un signe sémantique, exprimant que deux termes signifient la même chose.*"** J'ai mis en gras ce qui me paraît essentiel : la référence à la signification du langage, car c'est elle qui conditionne la mise en évidence et la prise de conscience du sens.
Tout élève de 6è est capable de comprendre que les **deux noms** "Paris" et "la capitale de la France" désignent **<u>la même</u> ville**. Alors il sera tout aussi capable de comprendre que les **deux écritures** "4 x 3" et "5 + 7" désignent **<u>le même</u> nombre**, douze, autrement dit que ce sont **deux dénominations d'UN SEUL "objet".** Cette information **se traduit** en langage mathématique en disant que **ces deux dénominations sont *égales*** et en écrivant : **4** x **3 = 5 + 7**.

D'une manière analogue et générale, la phrase *"truc = machin"* signifie que les deux écritures *truc* et *machin* sont deux dénominations d'UN SEUL et même objet, deux noms pour la même chose.

"=" doit donc être traduit, pensé : "désigne le même objet mathématique **que".**

C'est tout. Et... "*C'est beaucoup ; ce n'est pas trop.*" (Boby LAPOINTE). Car l'expérience prouve qu'il n'est pas facile de **penser autre chose que ce qu'on** (se) **dit** quand on lit "égale".

Dans son article "Sens et dénotation" [á] (publié en 1892), G. FREGE analyse extraordinairement bien ce qui est associé à un signe. En voici quelques extraits :

Si l'on voulait voir dans l'égalité une relation entre ce que dénotent respectivement les noms «a» et «b» , a = b ne pourrait pas, semble-t-il, différer de a = a, à supposer que la proposition a = b soit vraie. On aurait là l'expression d'une relation entre une chose et elle-même, relation que toute chose entretient avec elle-même, mais qui n'est jamais vérifiée entre deux choses différentes. D'autre part, il semble que par a = b, on veuille dire que les signes «a» et «b» dénotent la même chose et, dans ce cas, la proposition porterait sur les signes ; on affirmerait l'existence d'une relation entre ces signes. (...)

En conséquence, la proposition a = b ne concernerait plus la chose elle-même, mais la manière dont nous la désignons ; nous n'y exprimerions aucune connaissance proprement dite. Telle est bien cependant le plus souvent notre intention. Si l'on admet que le signe «a» se distingue du signe «b» en tant qu'objet seulement (ici, par la seule forme) et non en tant que signe, en tant qu'il désigne quelque chose, alors la valeur de connaissance de a = a serait essentiellement identique à celle de a = b, à supposer que la proposition a = b soit vraie. On ne saurait les distinguer que si la différence des signes correspond à une différence dans la manière dont l'objet désigné est donné.
Or, il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères), outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler le sens du signe, où est contenu le mode de donation de l'objet.
(...)
Le lien régulier entre le signe, son sens, et sa dénotation, est tel qu'au signe correspond un sens déterminé et au sens une dénotation déterminée tandis qu'une seule dénotation (un seul objet) est susceptible de plus d'un signe. (...) A vrai dire, ce rapport régulier admet des exceptions. (...) L'expression "la suite qui converge le moins rapidement" a un sens mais on démontre qu'elle n'a pas de dénotation. (...) On peut donc concevoir un sens sans avoir pour autant avec certitude une dénotation.
(...)
Si nous estimons que, dans le cas général, «a = a» et «a = b» ont une valeur différente pour la connaissance, la raison en est que, eu égard au gain de connaissance, le sens de ces propositions, c'est-à-dire la pensée qu'elles expriment, entre en compte autant que la dénotation, laquelle est la valeur de vérité de ces propositions. Si a = b la dénotation de b est bien la même que celle de a, et la valeur de vérité de a = b est aussi la même que celle de a = a. Toutefois, le sens de b peut être différent du sens de a et par là la pensée exprimée dans a = b peut être différente de celle exprimée dans a = a. Dans ce cas, les deux propositions n'ont pas non plus la même valeur pour la connaissance.
Ainsi, et pour reprendre la terminologie de Frege, les signes «4x3» et «5 + 7» ont, en tant que signes et non en tant qu'objets, la même dénotation (le nombre douze) et deux sens différents puisque leur "mode de donation" du nombre douze n'est pas le même. L'égalité "4x3 = 5 + 7" contient donc une connaissance effective, apporte un gain de connaissance par rapport à 4x3 = 4x3.

Puisque l'égalité est appréhendée ainsi comme une traduction mathématique d'une propriété linguistique "élémentaire" (**un signifié** peut admettre **plusieurs signifiants**), il semble logique et raisonnable de commencer par s'exercer à ces traductions. Cela aura de plus l'avantage d'habituer peu à peu à considérer des écritures telles que 4 x 3 ou 5 + 7 comme des dénominations d'**un seul** nombre. Par exemple, traduire "douze est le double de six" oblige à analyser la phrase et à la structurer en trois composants (sujet, verbe, attribut) dont les traductions vont faire émerger le sens : puisque "douze" s'écrira 12 et "le double de six" 2 x 6, "est" se traduira forcément et naturellement par "=". Cette traduction du verbe être, fréquente et fondamentale, est à distinguer de celle qui intervient dans des phrases telles que "douze est un nombre pair" : cette distinction ne peut s'effectuer que par l'analyse du sens et de la fonction : "un", article indéfini, interdit d'attribuer à l'expression "un nombre pair" le statut de dénomination d'objet, donc le "est" ne signifie pas ici "est la même chose que" et ne peut donc pas être traduit par "=".

L'expérience prouve que **l'unicité de l'objet désigné**, fondement même du concept d'égalité, est le plus souvent "oubliée"! Du coup persiste aussi la **confusion entre un objet (idéel) et l'une de ses représentations (matérielle)**, avec tous les "dérapages" que cela implique, particulièrement pernicieux en géométrie ("on voit sur la figure"). Aussi ne faut-il pas manquer la moindre occasion de rappeler cette unicité **et de s'en servir**, nous allons voir comment.

Dans un dictionnaire de mathématique paru en 1973 on trouve la définition suivante : "**Egalité :** deux objets mathématiques a et b sont égaux si a et b sont deux représentations du *même* objet. L'égalité mathématique est, en fait, l'identité." Nous sommes ici en pleine confusion mentale...

Du temps des "maths modernes", la brochure "MOTS" de l'A.P.M.E.P., parue en 1974, insistait bien sur la distinction à faire entre objet et dénomination de cet objet : « La notion d'égalité suppose que, *pour l'activité considérée*, la distinction entre objets d'une part et symboles (ou noms) d'autre part est exempte de toute ambiguïté. L'information apportée peut alors s'interpréter soit au niveau de l'objet comme une identité, soit au niveau des symboles comme une synonymie. A cet égard, on doit être conscient que l'énonciation "a et b sont égaux", quoique courante, ne résiste pas à une analyse serrée : en effet, s'il s'agit des noms a et b, elle est fausse puisqu'ils sont *différents,* et s'il s'agit de l'objet unique nommé a ou b, le pluriel "*égaux*" est injustifiable.»

Après l'énoncé (incontournable à l'époque) des trois propriétés d'une relation d'équivalence, il était ajouté :

«4. L'intérêt essentiel de la notion d'égalité est le suivant :
Si a = b, on peut, dans toute phrase mathématique, remplacer indifféremment "a" par "b" et "b" par "a" sans modifier le sens de la phrase.»

Mais pas le moindre exemple de cet "intérêt essentiel" n'était donné...

Dans les manuels actuels, on trouve parfois une définition de l'égalité, plus souvent des "**règles de calcul**" du genre *"Si $x = y$, alors $x + z = y + z$",* ou une liste de "propriétés".

J'avoue ne pas comprendre pourquoi on passe quasiment toujours sous silence **LA "propriété"** fondamentale et essentielle de l'égalité, ni pourquoi, lorsqu'il arrive qu'on la mentionne, on n'explique ni ne montre jamais comment elle fonctionne et à quoi elle sert !

L'égalité n'a, en effet, qu'une seule "propriété", qui dérive directement de l'essence même de sa définition, et dont les applications et les conséquences sont aussi variées qu'importantes.

Cette "propriété" c'est son **mode d'emploi**. Son principe n'est pas vraiment difficile à comprendre, mais sa maîtrise demande un apprentissage authentique et l'on aurait tort de sous-estimer l'effort qu'il requiert : sa mise en œuvre nécessite en effet un **travail**

sur les écritures auquel les élèves ne sont absolument pas habitués. Pour autant, il me paraît illusoire et dangereux de penser que l'on peut en faire l'économie.

L'utilité de l'égalité tient en un mot : SUBSTITUTION.

A quoi sert l'égalité ? À opérer des substitutions.

Pourquoi ? Comment ? Quel gain de connaissance en tire-t-on ?

Deux dénominations étant égales lorsqu'elles désignent le même objet, lorsque **truc = machin,** je peux donc **employer indifféremment** le nom "**truc**" ou le nom "**machin**" pour désigner l'objet unique que ces deux noms dénotent. En particulier je peux donc *changer de nom* si cela m'est utile puisque, de toute façon, je parlerai toujours de la même chose. Autrement dit, **je peux toujours remplacer un nom par un autre qui lui est égal.** Voilà tout le "mystère" du mode d'emploi de l'égalité ! Il se résume en une formule lapidaire :

On a toujours le droit de REMPLACER une dénomination par une dénomination égale.

Cela semble si évident qu'on se demande quels obstacles peuvent bien entraver la mise en pratique de cette facilité ! Et pourtant ... il y en a. Il semble que l'obstacle soit double et se situe

- d'une part dans la **structuration de la perception des écritures** : par exemple, en présence de l'égalité $x + 3 = 5$, il faut perce**voir** que c'est $x + 3$ qui joue le rôle de **truc** et que c'est 5 qui joue le rôle de **machin**. Au début, beaucoup d'élèves disent que c'est x qui joue le rôle de **truc**, certains disent que c'est 3, ce que l'on peut comprendre dans la mesure où, x et 3 étant en eux-mêmes des dénominations, il faut donc **voir et concevoir** $x + 3$ comme un "nom composé", il faut avoir compris que "la somme de x et de 3" désigne **un** nombre. Pour aider à franchir cet obstacle il faut revenir à l'**analyse de l'égalité en tant que phrase : quel est le groupe verbal, quel est le sujet, quel est l'attribut ?**

- d'autre part dans une contrainte pratique, graphique : **on n'efface pas une désignation pour en écrire une autre à la place : la substitution se manifeste par une réécriture de son résultat.**

Si $x + 8 = 13$, alors je peux remplacer $x + 8$ par 13, donc, par exemple, $x + 8 + 9 = 13 + 9$.

Pour faire comprendre cette procédure, on peut mimer au tableau le "couper-coller" d'un traitement de texte : on écrit $x + 8 + 9 = x + 8 + 9$ puis dans le membre de droite on efface $x + 8$ et on le remplace par 13.

Il faut ensuite faire réaliser que, comme il est malaisé d'effacer sur une feuille de papier, on écrit seulement le résultat de la substitution : $x + 8 + 9 = 13 + 9$.

Si *truc* = *machin,* alors je peux réécrire n'importe quelle écriture dans laquelle se trouve *truc* en mettant *machin* à la place où était *truc*.

Bien entendu, dans la pratique, cette réécriture ne sera pas gratuite mais opérée en fonction d'un certain but (résolution d'équation, détermination d'une image par une fonction, changement de variable, etc.), apportant ainsi un "gain de connaissance". Mais pour ce qui est de l'utilisation, du mode d'emploi, point n'est besoin de s'occuper d'une classification typologique des différents types d'égalité. Il est clair que $4 \times 3 = 12$ n'a pas le même statut, le même contenu conceptuel que $4 \times x = 12$: pour cette dernière égalité, il convient de savoir d'une part à quel ensemble de référence est attaché x, d'autre part quelle est la quantification (universelle ou existentielle) qui doit précéder l'égalité : la valeur de vérité de la proposition ainsi formée en dépend. Du point de vue de la substitution, le fonctionnement n'en demeure pas moins strictement le même.

Si je sais que, **quels que soient les nombres désignés par r, s, t, $r \times (s + t) = r \times s + r \times t$,** alors d'une part je peux remplacer r, s, t par n'importe quelle autre dénomination de nombre, d'autre part je peux remplacer le "premier membre" de l'égalité par le "deuxième membre".

Si je sais que la fonction numérique notée "f" est définie par : **pour tout nombre réel t, $f(t) = t \times (3 - t)$**, alors je peux remplacer t par n'importe quelle dénomination de nombre réel, ce qui me permet non seulement de calculer l'image d'un nombre spécifié en substituant ce nombre à chaque occurrence de t, mais aussi de produire des résultats plus élaborés du genre : si $t = m + 7$, alors $f(m + 7) = (m + 7) \times [3 - (m + 7)]$. Nous reverrons cela un peu plus loin.

Si je cherche un nombre réel, **désigné hypothétiquement et provisoirement par *x***, tel que $3 \times x + 7 = 2$, alors je peux "faire comme si" $3 \times x + 7$ était une dénomination de 2 et en déduire que $3 \times x + 7 - 7 = 2 - 7$. Cela me conduira à établir que le nombre que je cherche existe car je pourrai l'exhiber : c'est $-5/3$.

Si je cherche un nombre réel, désigné par r, tel que $r^2 + 8 = 3$, alors je fais comme si 3 pouvait se nommer $r^2 + 8$. J'en déduirai que $r^2 + 8 - 3 = 3 - 3$, d'où $r^2 + 5 = 0$, ce qui prouve qu'un tel nombre n'existe pas, voilà tout !

Que la proposition «il existe un réel r tel que $r^2 = -1$» soit fausse n'empêche pas que la proposition «pour tout réel r, **si** $r^2 = -1$, **alors** $r^2 + 1 = 0$» soit vraie !

Il n'est évidemment pas question d'utiliser les quantificateurs au Collège. S'il est cependant indispensable de bien marquer les champs d'application des lois algébriques (essentiellement le fait que zéro n'ait pas d'inverse et les conséquences que cela entraîne), il est clair que cela ne constitue pas un handicap pour ce qui concerne l'utilisation de la substitution par égalité, même plus tard : si f désigne la fonction réelle de variable réelle définie par : $f(x) = 1/(x - 3)$, alors $f(3) = 1/(3 - 3)$ donc f(3) n'est pas défini puisque zéro n'a pas d'inverse, c'est-à-dire que, *dans le contexte ici présent, le signe* «f(3)» *n'a aucune dénotation.*

A l'entrée en 6è les élèves ont une pratique du calcul numérique qui constitue un support à ces activités de substitution : $4 \times 3 = 12$, donc $4 \times 3 + 7 = ... + 7$. $8 + 13 = 21$ donc $6 \times (8 + 13) = ...$, etc. De tels exercices présentent de multiples avantages : ils visualisent des processus mentaux et la manière dont fonctionnent certaines lois, ils

explicitent et justifient certaines “astuces” de calcul mental (99 = 100 – 1, donc 37 + 99 = 37 + 100 – 1) ; ils donnent peu à peu l’habitude de travailler sur les représentations, de les concevoir et de les utiliser en tant que telles et de les mettre au service de l’objectif que l’on vise : par exemple écrire 18 = 2x9 exprime que 18 est un nombre pair, écrire 18 = 3x6 met en évidence que c’est un multiple de 3 (et de 6 !). Cette (bonne) habitude pourra se transférer sur la géométrie : être capable de “voir sur la figure”, ou plus exactement de **concevoir au travers de** la figure, est du même ordre qu’être capable de **reconnaître des configurations d’écritures** (facteur commun dans une somme, différence de deux carrés, etc.).
Il est évidemment hors de question d’*apprendre* cette propriété : elle doit s’imposer par son évidence ; il ne s’agit pas de la “savoir” mais d’en être convaincu ! Pour cela il me semble nécessaire de commencer, une fois encore, par le commencement : la langue dite naturelle, et de **pratiquer d’abord des activités de substitution en français, seul moyen d’en enraciner le sens** (sans parler de l’effet désastreux qu’a, sur le style, la répétition inconsidérée d’un même mot...). Après quoi on pourra aborder sans crainte l’utilisation de cette propriété dans le cas particulier du langage mathématique.

La dextérité dans le maniement de la substitution ne s’acquiert évidemment pas du jour au lendemain : il est absolument indispensable de la mettre en œuvre de façon régulière. Fort heureusement, ce ne sont pas les occasions qui manquent. Nous allons en citer quelques-unes, certaines tout à fait “élémentaires” — et qu’il convient donc d’étudier très tôt —, d’autres un peu plus élaborées mais dont les racines plongent toujours dans l’essence même de la définition du concept d’égalité. Car la richesse et la puissance de ce concept ne peuvent se révéler que progressivement, au travers de l’étude de situations de plus en plus complexes.

Symétrie

Évidente de par la signification de “=”, son emploi est néanmoins fortement gêné par la dissymétrie qu’impose le sens de lecture et d’écriture. Et le langage mathématique n’est pas dépourvu de règles de style plus ou moins tacites : par exemple on dira “2 est solution de l’équation”, mais on écrira “x = 2” de préférence à “2 = x”. S’entraîner un peu à lire et réécrire “à l’envers” des égalités n’est donc pas du temps perdu : cela permet de corriger et de dépasser la fausse impression de “direction d’action” induite par la chronologie des gestes, car une égalité n’est qu’une sorte de constat d’état dont le temps est exclu ; il n’est pas rare de dire “si x prend la valeur 2” pour exprimer “si x = 2”, mais une variable n’est pas une action cotée en Bourse !

Transitivité

Si truc = machin **et** machin = chose, alors le remplacement de machin par chose dans la première égalité fournit immédiatement le résultat. Il n’est pas interdit de juxtaposer à cette explication “mécaniste” celle qu’engendre la compréhension de la situation : si *truc* désigne le même objet que *machin* et *machin* le même que *chose*, alors forcément *truc* désigne le même que *chose*.

Cette propriété est évidemment indispensable à la conduite de tout calcul. Modulo une convention d’écriture à expliciter, elle permet d’enchaîner les calculs sans répétition fastidieuse.

Egalité et opérations

Quels que soient les éléments t, m, u d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée "#", si t = m , alors t # u = m # u.

Il faut le répéter : il ne s'agit pas là d'une "règle de calcul" mais d'une **évidence sémantique**, évidence qui ne peut s'imposer qu'à deux conditions :

1) savoir que le signe"t # u" désigne **un** objet et pas deux ou trois,

2) savoir que "=" signifie "*désigne le même objet que*".

Une difficulté qui persiste (et elle est réelle) est celle, déjà signalée, de la structuration de l'appréhension des écritures, qui risque de faire écran au sens.
D'autre part les lois de calcul et les règles d'écriture propres à chaque opération interfèrent avec la substitution. Par exemple, puisque 11 = 10 + 1, alors 27 x 11 = 27 x **(**10 + 1**)**. Le fait d'être obligé de rajouter une paire de parenthèses provient de la convention qui a donné la priorité à la multiplication dans les écritures sans parenthèses : le produit de 27 et de 10 + 1 **s'écrit** 27x**(**10 + 1**)** ; si l'addition avait la priorité, il s'écrirait 27 x 10 + 1 ! Il faut bien comprendre que le statut de l'égalité n'est pas, ici, en cause.

Ce qui a été dit pour une loi de composition interne peut tout aussi bien être répété pour une loi externe. Exemple "fétiche" : la multiplication d'un vecteur par un réel. Si u = v, alors, quel que soit le réel α, α.u = α.v, etc.
On aura beau "motiver" les mises en équation par des problèmes concrets, il n'en demeurera pas moins que l'algèbre se manifeste comme un jeu de transformations d'écritures dont les lois ne sont ni arbitraires ni incompréhensibles, même si elles se présentent sous une apparence formelle : le meilleur moyen de gagner à ce jeu reste de comprendre ce qu'on fait et d'avoir un minimum d'entraînement ; alors pourront s'installer des automatismes qui ne seront pas vidés de leur sens car ils auront été construits sur ce sens dans le but d'en alléger la gestion.

Etant le premier traité, le cas de l'addition doit être étudié avec patience et minutie.
Si truc = machin , alors truc + chose = ...

L'exemple "de base" est, sans doute, la résolution d'une équation du type x + a = b. L'élève qui a vraiment compris que si $x + 7 = -5$, alors $x + 7 + k = -5 + k$ quel que soit le nombre désigné par k, et qui sait ce qu'est l'opposé d'un nombre, cet élève ne sera pas long à deviner que le "bon choix" pour k est –7. Au bout de quelques tentatives du même genre il sera à même de généraliser et de "court-circuiter" la rédaction de la résolution puisque "ça se passe toujours de la même façon". Il n'aura aucune "règle" à apprendre : il aura compris. Et s'il lui arrive de se tromper, il sera capable de trouver et de comprendre son erreur.

Extension : si A = B et T = M , alors A + T = B + M. Application au paragraphe suivant.

Bien évidemment, ce qui est vrai avec l'addition l'est tout autant avec les trois autres opérations. Exemple avec la multiplication :

La résolution d'une équation du genre $2x/3 - 1/4 = x/2 + 5/6$ peut s'effectuer de deux façons basées sur l'utilisation du PPCM des dénominateurs :

$8x/12 - 3/12 = 6x/12 + 10/12$ $\qquad$ $12 \times (2x/3 - 1/4) = 12 \times (x/2 + 5/6)$

$(8x - 3)/12 = (6x + 10)/12$ $\qquad$ $12 \times 2x/3 - 12 \times 1/4 = 12 \times x/2 + 12 \times 5/6$

$8x - 3 = 6x + 10$ $\qquad$ $8x - 3 = 6x + 10$

Généralement, les élèves préfèrent la première façon et court-circuitent même la deuxième ligne en "chassant les dénominateurs". Outre que ce procédé fait plutôt penser à une recette magique, il occulte l'utilisation de la propriété **si truc = machin , alors k x truc = k x machin** que met en évidence la deuxième façon, et dont la maîtrise est nécessaire pour ce qui suit.

Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Sauf cas particulièrement simple, la méthode "par substitution" est lourde.
Un tel système se présente sous la forme :truc = c **et** machin = f**avec** truc = ax + by **et** machin = dx + ey.

La résolution par "combinaisons linéaires" ne requiert que ce qui a été examiné au paragraphe précédent : si truc = c **et** machin = f , alors k x truc = k x c **et** p x machin = p x f, donc k x truc + p x machin = k x c + p x f. Il faut "évidemment" choisir k et p de façon à "éliminer" une inconnue, et, pour ce faire, il faut savoir développer un produit par distributivité, ce qui est connu bien avant la classe de 3è. La complication provient ici uniquement du grand nombre de paramètres à gérer : six qui sont donnés, deux à trouver deux fois de suite.

Carré et opposés

On démontre que $(-T) \times M = -(T \times M)$.

Si $M = -K$, on obtient donc $(-T) \times (-K) = -[-(T \times K)] = T \times K$.
Et si $K = T$, alors $(-T) \times (-T) = T \times T$ autrement dit $(-T)^2 = T^2$.

Extension de la distributivité et "identités remarquables"

A y regarder de près, il n'y a en fait qu'une seule égalité vraiment "remarquable" : celle qui exprime la distributivité de x sur + **:**

Quels que soient les nombres désignés par k, a, b, k x (a + b) = k x a + k x b.

Ses conséquences sont en effet décisives pour le calcul algébrique. Etant la seule loi qui relie le domaine additif au domaine multiplicatif, c'est donc elle qui régit toutes les relations entre ces deux domaines d'opérations.

1) Si b = c + e, alors en remplaçant b par c + e, on obtient :

$k \times (a + c + e) = k \times a + k \times (c + e) = ...$

2) Si $k = m + p$, alors, en remplaçant k par $m + p$, on obtient :
$(m + p) \times (a + b) = (m + p) \times a + (m + p) \times b = ...$

Ces deux extensions permettent d'effectuer n'importe quel développement et certaines de leurs particularisations permettent des factorisations "remarquables" :

1) Si $k = a - b$, alors on obtient : $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
2) Si $k = a + b$, alors on obtient : $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$.
En particulier si $b = -c$, on obtient $(a + (-c))^2 = a^2 + 2 \times a \times (-c) + (-c)^2$, ce qui permet, en utilisant quelques propriétés algébriques, d'obtenir finalement : $(a - c)^2 = a^2 - 2 \times a \times c + c^2$.

Il est bien évident que, pour atteindre un certain niveau d'efficacité, il sera un jour indispensable de "savoir par cœur" les **deux** formules précédentes :
$a^2 - b^2 = ...$ et $a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = ...$ Je dis bien "deux", non seulement parce qu'apprendre la troisième est inutile, mais <u>surtout parce que c'est dangereux</u> : cela renforce en effet la tendance "naturelle" des élèves à considérer qu'une lettre représente un nombre positif (puisqu'on ne "voit pas" le signe moins).

Par exemple, pour reconnaître en $4x^2 - 12x + 9$ le développement de $(2x - 3)^2$, il faut :

1) connaître la structure littérale de l'égalité $a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a + b)^2$,
2) imaginer, par comparaison, les égalités $4x^2 = a^2$ et $9 = b^2$,
3) en déduire $a = 2x$ et $b = -3$ (ou $a = -2x$ et $b = 3$, un choix à faire !),
4) vérifier par substitution que $2ab = -12x$.

Factorisation de $mx + m$

<u>L'écriture</u> $m \times x + m$ n'est pas factorisable puisque sa structure n'est pas du type « k x a + k x b », somme de deux produits <u>et</u> facteur commun. Mais puisque $m \times 1$ est un produit égal à m, alors $m \times x + m = m \times x + m \times 1 = ...$

Il est facile et significatif de constater que la pratique systématique de la "reconnaissance de forme" par l'explicitation du sens des écritures littérales, autrement dit du "mode de donation" des nombres qu'elles désignent, fait régresser de façon drastique la confusion bien connue à ce niveau entre un et zéro.

Egalité et fonctions

L'écriture "f(a)" désignant l'image de a par la fonction f, il est trivial que si $t = m$, alors $f(t) = f(m)$. Cette lapalissade est le fondement d'une méthode extrêmement puissante : le **changement de variable**, et d'un concept très important à partir de la classe de seconde : la **composition des applications.**

Prenons un exemple : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 2x + 1$.

L'habitude de la substitution est déjà indispensable pour pouvoir comprendre que le choix de la lettre "x" n'a pas de signification **en soi** car son statut est celui de "variable muette" ce qui veut dire qu'il est donc tout aussi loisible d'écrire f(truc) = 2truc + 1. Alors, si truc = 3 – m, on obtiendra f(3 – m) = 2(3 – m) + 1. **C'est dans cette substitution et cette réécriture que gît toute la difficulté, et nulle part ailleurs.** C'est pourquoi j'estime plus logique, en ce qui concerne la composition, de procéder de la façon suivante : fog(m) = f[g(m)] = 2g(m) + 1, car si truc = g(m), alors f[truc] = f[g(m)] : on fait "fonctionner" f avec la variable g(m), **après quoi** on pourra remplacer g(m) par son écriture en fonction de m.

Une occurrence particulière de ce genre de difficulté est l'étude de la "**valeur absolue**" : la disjonction des cas $x \geq 0$ et $x < 0$ de l'étude de $|x|$ se transfère sans changement pour l'étude de $|2x + 1|$: c'est une erreur bien connue des professeurs de Lycée, erreur due bien sûr à un défaut de substitution et à la mauvaise habitude de la prééminence de la lettre "x" dans les écritures littérales. Il faut **penser** : si truc ≥ 0, alors | truc | = truc et si truc < 0 , alors | truc | = –truc pour pouvoir **ensuite** opérer la substitution truc = 2x + 1.

On retrouve également, et pour la même raison, un problème analogue avec la fonction **racine carrée :** √(2x + 1) doit être pensé, interprété comme "√truc avec truc = 2x + 1", par exemple pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction x √(2x + 1).

Un test révélateur consiste à demander de composer une fonction avec elle même : bien des élèves qui réussissent à définir fog échouent pour fof ! La compréhension de "*l'arbitraire du signe"* (Saussure) pour désigner la variable et la maîtrise de la substitution sont ici incontournables :

Si f(truc) = 2truc + 1 et truc = 2x + 1 , alors f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1.

Implications vraies et réciproques fausses

Maîtriser la substitution est indispensable pour pouvoir distinguer certaines implications, dont la véracité est triviale, de leurs réciproques, qui sont inexactes.
Exemples :
Si m = t , alors $m^2 = t^2$.Si a = b , alors | a | = | b |.

Si A = B , alors (AE) = (BE).Si K = L , alors AK = AL.

Traduction de l'unicité d'un objet

Lorsqu'un énoncé exprime l'existence et l'unicité d'un objet satisfaisant à certaines conditions, la traduction de l'unicité peut donc se faire en utilisant l'égalité. Exemples :

f désignant une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble H, **f** est fonctionnelle signifie : quels que soient (t,m) et (t,w) appartenant à E**x**H, **si** t **f** m et t **f** w , **alors** m = w.

Deux droites sécantes n'ont qu'un point commun, donc :
Si $D \neq \Delta$ et $P \in D$ et $P \in \Delta$ et $M \in D$ et $M \in \Delta$, alors P = M.

Axiome d'Euclide : Si $A \in D$ et $A \in D'$ et $D // \Delta$ et $D' // \Delta$, alors D = D', puisqu'il n'y a qu'une droite passant par A et parallèle à Δ.

Idem en remplaçant "parallèle" par "perpendiculaire".

Un exemple remarquablement important est celui de la **traduction de l'alignement de trois points** : il est accessible dès la 6è et se prolonge loin. En 6è, on peut commencer par demander de traduire par un dessin la situation décrite par l'information : "(AB) = (BC)". Bien sûr, le premier réflexe des élèves est de dessiner deux droites, et il faut donc faire traduire en français l'égalité donnée par : la droite qui passe par A et B **est la même que** la droite passant par B et C.
Alors on comprend qu'il n'y a qu'une seule droite passant à la fois par les trois points. Sachant qu'il suffit de deux points pour définir une droite, on dispose alors d'un troisième nom pour cette droite : (AC), ce qui permet d'écrire deux autres égalités équivalentes. Cela est nécessaire car un bon nombre d'élèves ont envie de désigner la droite passant par les trois points A, B, C par la notation "(ABC)". C'est loin d'être stupide, mais cela contrevient au "principe d'économie". D'autre part, le fait de disposer de plusieurs noms n'est pas un inconvénient mais au contraire un avantage. Le "prolongement" évoqué précédemment se réalise en Géométrie Analytique à propos des équations de droites par l'enchaînement d'équivalences bien connu :
$A \in (BC) \Leftrightarrow (AB) = (BC) \Leftrightarrow (AB) // (BC) \Leftrightarrow$ la pente de (AB) = la pente de (BC).
Ce type de traduction génère aussi une **méthode de démonstration, utilisée surtout en algèbre mais aussi en géométrie, et qui consiste à REnommer un objet puis à traduire en utilisant ce nouveau nom.**

Par exemple, pour démontrer que "K est le milieu de [AB]", on dit : "soit I le milieu de [AB]" et on démontre que K = I.

Dans le même ordre d'idée, **l'énonciation opératoire de certaines définitions d'objets impose une REdénomination de cet objet.** Exemple :

"La racine carrée d'un nombre positif m est le nombre positif qui a pour carré m" ne peut pas se satisfaire de la traduction : si $m \geq 0$, alors $\sqrt{m} \geq 0$ et $(\sqrt{m})2 = m$.

La définition ne devient utilisable que si on l'exprime par l'équivalence logique :

$$\mathbf{k = \sqrt{m} \quad \Leftrightarrow \quad k \geq 0 \text{ et } k^2 = m.}$$

Exemple d'utilisation : quelle est la racine carrée de a^2 ?

$k = \sqrt{(a^2)} \Leftrightarrow k \geq 0$ et $k^2 = a^2$
$\Leftrightarrow k \geq 0$ et [k = a ou k = –a]
$\Leftrightarrow$ k désigne celui des deux nombres "a" et "–a" qui est positif
$\Leftrightarrow k = | a |$

REMARQUE : on perçoit nettement ici que le concept d'égalité et celui d'équivalence sont étroitement liés.

* * *

Egalité et calculatrices

On ne saurait mieux dire que Marc FERRANT : "***le plus souvent, un nombre affiché doit être lu comme une information et non comme un résultat***" (revue "3-33" n° 10, Mai 93).

Une calculatrice est un instrument merveilleux, mais qui fonctionne d'une façon strictement déterminée : c'est ce fonctionnement qui explique ses "erreurs" et détermine ses limites d'utilisation. Il importe donc de le connaître si l'on veut pouvoir l'utiliser correctement et sans risque : lorsqu'une automobile quitte la route dans un virage abordé trop vite, la responsabilité n'incombe pas à la machine mais bien à son conducteur !

A leur entrée en 6è, les élèves "connaissent" les nombres entiers et "à virgule", à la condition, toutefois, qu'ils ne soient pas trop "grands" ou trop "longs" : il semble que le nombre de chiffres de l'écriture décimale soit une variable didactique pertinente : une calculatrice qui affiche dix chiffres les gêne, la preuve en est qu'ils ont tendance à n'en recopier que deux ou trois après la virgule... Mais comme elle est réputée "ne jamais se tromper", ils sont évidemment prêts à croire que 2/3 = 0,666666667 si elle le leur dit. **Il faut donc leur faire comprendre que ce n'est pas cela qu'elle dit ! Car, malgré la présence (regrettable ?) sur son clavier d'une touche "=", elle ne "sait" pas, contrairement à nous, ce que signifie ce signe ! — Elle ne "sait" d'ailleurs rien puisqu'elle ne pense pas...**

La première chose à faire est sans doute de mettre en évidence des "résultats" manifestement faux et dont la vérification "à la main" est très facile. Ce ne sont pas les possibilités qui manquent, je ne m'étendrai donc pas là-dessus.

Il faut ensuite comprendre pourquoi la calculatrice a donné cet affichage : nombre de chiffres limité, registre de calcul comportant deux ou trois chiffres de plus que l'écran et astuces pour les faire apparaître, troncatures et arrondis, etc.

Utilisant la réciprocité entre multiplication et division, on peut se convaincre du fait que $2/3 \neq 0{,}666666667$ puisque $3 \times 0{,}666666667 = 2{,}000000001$ et que $2 = 2{,}000000000$ et que $1 \neq 0$. **Il me paraît essentiel de pointer ici qu'il n'y a aucune différence de "gravité dans l'erreur" entre le fait d'écrire "2/3 = 0,666666667" et celui d'écrire "1 = 0" puisque ces deux égalités sont logiquement équivalentes. C'est le statut même du concept d'égalité qui est en cause, et ce concept n'a rien à voir avec le "presque" ou le "quasiment" de la vie courante : il est en rupture avec cette notion d'à peu près !** Qui donc a besoin, dans son quotidien, d'une précision du milliardième ? Absolument personne, évidemment ! **Mais l'égalité mathématique n'est pas un problème de précision, c'est une question de dénomination : savoir si, oui ou non, on parle de la même chose, "that is the question " !**

Tout cela est assurément nécessaire, développe la rigueur et l'esprit critique, mais ne supprime pas l'effet pervers désormais bien connu : **l'usage des calculatrices renforce la tendance à croire qu'il n'existe pas d'autres nombres que les décimaux.** Car la

question va revenir comme un boomerang : mais alors, 2/3 ça fait combien ?! (et plus tard elle reviendra avec encore plus de véhémence : √2, ça fait combien ?).
Pour dépasser cette résistance, il est tout d'abord indispensable (une fois de plus...) d'avoir réalisé qu'une écriture telle que 5 + 7 ou 46 – 19 ou 8x35 ou 748/32 désigne **un** nombre et un seul, et non une "opération" qui serait "posée" sans être "effectuée". La résistance va évidemment se focaliser sur les quotients puisque, seule, la division provoque des "résultats qui ne tombent pas juste". Le fait que certains quotients soient des décimaux permet, grâce à l'égalité, de commencer à admettre qu'un quotient puisse désigner un nombre : 195/52 = 3,75 et 3,75 désigne un nombre, donc... Mais cela risque aussi de renforcer le sentiment de la nécessité de "tomber juste" ! L'utilisation d'un changement de cadre est utile : si un rectangle mesure 12 sur 18, alors on a 12 = 18x2/3 ; on peut calculer la largeur si l'on sait qu'elle "vaut" les deux tiers de la longueur connue. Même si, dans ce cas, le concept de nombre reste attaché à celui de mesure et/ou d'opérateur, le fait de les "mélanger" sans distinction pour faire des opérations dont le résultat a un sens apparent, permet une homogénéisation des statuts. Le maniement de la réciprocité entre multiplication et division est tout aussi indispensable au passage du sens : lorsqu'on écrit "3 x truc = 2", il semble assez naturel de considérer que "truc" désigne un nombre, même s'il demeure encore inconnu ; puisque cette égalité équivaut à "truc = 2/3", cela aide à accepter 2/3 parmi les nombres.

Pour vaincre la nécessité de "tomber juste" je pense qu'il est incontournable de faire "à la main" des divisions "qui ne s'arrêtent pas" et de comprendre comment la réapparition d'un reste déjà obtenu entraîne la répétition de la même séquence de chiffres dans l'écriture du quotient. Il ne faut surtout pas commencer par diviser par 3 ou par 11 : c'est trop rapide et simple pour être marquant. Un minimum de trois chiffres pour la période me semble convenable (division par 37), après quoi on peut augmenter un peu (101 en donne quatre, 41 cinq, 7 et 13 six) puis revenir à la division par 11 et enfin par 3. Cette recherche de la partie périodique est, d'ailleurs, une motivation pour les élèves : manifestement, cela les amuse : profitons-en ! Et revenons sur cette "obsession" de "tomber juste", non pas en essayant de l'expliciter directement, mais en tentant de la dépasser par une autre question : que signifie "connaître un nombre" ? Réponse la plus courante, provenant de la notion de "nombre comme résultat de mesure" : c'est connaître sa *valeur*. Soit. Alors quelle est la *valeur* de 12 ? Difficile de répondre autre chose que "12"... En mathématique, connaître un nombre c'est être capable de s'en servir, par exemple pour faire des calculs, et pour cela certaines écritures de ce nombre seront plus commodes que d'autres : 64x53/32 est plus facile à manipuler que 64x1,65625.

Mieux : la division de 258 par 37, faite à la main, nous en apprend beaucoup plus que le 6,972972973 affiché par une calculatrice, puisqu'elle nous permet de **prévoir** que la séquence "972" se répète indéfiniment : c'est cela, connaître ! Soit dit en passant, plus j'y pense et plus le "statut de la calculatrice" me paraît homomorphe à celui de la figure en géométrie : on "lit sur la calculatrice" comme on "voit sur la figure", et l'on retrouve les deux aspects contradictoires : tantôt aide à la conjecture, à la recherche, tantôt écran inhibiteur du raisonnement logique du fait de la prégnance de l'"évidence" de sa perception.

Mais revenons à notre quotient illimité : on tient là une ébauche de la notion d'infini, à rapprocher de celle de la droite géométrique qu'il faut imaginer se prolongeant sans fin identiquement à elle-même. Et l'on tient aussi une raison à la **nécessité de conserver l'écriture "258/37" puisqu'il est matériellement impossible d'écrire un nom de ce nombre sous la forme d'un "nombre à virgule"** : y passer sa vie n'y suffirait pas ! On retrouve ici ce sur quoi j'attirais l'attention au début de ces pages : **faire des mathématiques c'est, entre autres, utiliser des dénominations, des noms qui doivent pouvoir s'écrire**, et s'écrire d'une façon utilisable, opératoire, (on pourrait désigner ce nombre par une écriture telle que "6,972972...", assez spontanément inventée par certains élèves, le code étant que la séquence écrite deux fois se répète indéfiniment ; l'ennui est qu'une telle écriture est impraticable pour le calcul).

Il est assez remarquable de constater que la banalisation de l'usage des calculatrices a été suivie par l'apparition de l'expression "*valeur exacte*" dans un certain nombre d'énoncés.

Par exemple on pose : $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ et l'on demande, en 3è ou seconde, de comparer ϕ^2 et $\phi + 1$: le risque est grand de voir les élèves se précipiter sur leurs calculatrices et annoncer le "résultat" sans autre forme de procès, si l'on n'a pas pris la précaution de préciser qu'il s'agit de comparer les "valeurs exactes". Passe encore d'employer cette expression lorsqu'il s'agit d'une mesure (au sens mathématique, bien entendu, car une mesure exacte n'existe dans aucune science expérimentale), mais qu'est-ce donc que la valeur exacte d'un nombre ?! Un nombre admet une infinité de dénominations, de désignations tout aussi "exactes" les unes que les autres...

Mais, au fait, **que signifie "comparer ϕ^2 et $\phi + 1$" ?**
Que signifie "comparer deux *noms* de nombres" ? Rien... Il y a comme un paradoxe au niveau du langage car lorsqu'on dit par exemple : "deux est inférieur à trois", on parle évidemment des nombres eux-mêmes et pas des noms (mots) "deux" et "trois" : dire qu'un nom est inférieur à un autre nom n'a aucun sens ! Les propriétés mathématiques sont des relations entre les **objets** mathématiques eux-mêmes, pas des relations entre leurs noms ! Et comparer un objet avec lui-même n'apporte aucun gain de connaissance, on l'a déjà dit.

A ce titre, le langage mathématique ne fonctionne pas autrement que le langage courant : lorsqu'on dit "Pierre est plus petit que Paul", il n'y a pas la moindre ambiguïté : on parle bien de "l'être Pierre" et de "l'être Paul", pas des noms, des mots "Pierre" et "Paul", et l'on sait très bien que ce ne sont pas eux que l'on compare ainsi mais leurs tailles ! Mais la langue usuelle, contrairement au langage mathématique, ne dispose pas d'une infinité de dénominations pour un objet quelconque et n'a donc pas besoin, comme l'algèbre, de lois de transformation et de reconnaissance des écritures.

D'une façon générale, **comparer *truc* et *machin*** signifie donc :

1) Déterminer si *truc* = *machin* .
Si oui, il n'y a plus rien à faire puisqu'il n'y a qu'**un seul objet.**

2) Sinon, voir si l'on peut faire entrer les **deux objets** dans une certaine relation (ordre,
incidence, etc.), suivant la nature des objets en question.

***

Au terme de cette réflexion, le concept d'égalité apparaît donc comme un concept charnière, médiateur : linguistique par vocation, mathématique par nécessité, puisqu'il n'y a pas de mathématique sans langage (mathématique). Générateur de diversité pour les dénominations d'objets et unificateur de leurs sens, il est inhérent à toute activité mathématique : sa compréhension conditionne, en effet, aussi bien la reconnaissance des objets qui, en tant que tels, interviennent dans une situation, que la maîtrise de la manipulation de leurs différentes désignations.

NARRATIVES, EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES ET CALCUL FORMEL:
DE LA CONSTITUTION À LA TRANSFORMATION DU SENS*

Luis Radford

Université Laurentienne, Ontario, Canada

Résumé: Le but de cet article est de discuter deux problèmes qui se posent chez les élèves en début d'apprentissage de l'algèbre. Le premier problème est celui de la *constitution* du sens d'une expression symbolique. Le deuxième problème est celui de la *transformation* à laquelle on doit soumettre le sens précédent afin de pouvoir effectuer, sur l'expression symbolique en question, des traitements de type syntactico-formel. Dans ce qui suit nous discutons ces problèmes à partir d'observations en salle de classe portant sur l'activité mathématique de trois groupes d'élèves de 9e année (15 ans). L'analyse est conduite à l'intérieur d'une perspective sémiotique s'inspirant de la phénoménologie de Husserl.

INTRODUCTION ET CADRE THÉORIQUE

L'utilisation de symboles en mathématiques pose d'emblée deux problèmes différents. Le premier, celui de la *référence*, concerne la nature de l'objet mathématique lui-même. Le deuxième, celui de la *désignation* des objets, concerne la manière que se donnent les individus pour rendre ces objets des *objets de connaissance*. Alors que le premier problème relève de l'ontologie, le deuxième relève de l'épistémologie.

Les deux problèmes mentionnés sont, bien sûr, interreliés. Une ontologie réaliste munit les objets mathématiques de certains attributs. Elle autorise certaines pre-suppositions (qui restent toutefois souvent implicites) et privilégie certains types de discours pour thématiser les objets du savoir (on y parle, par exemple, de "découverte de l'objet"). Du côté épistémologique correspondant, le rôle des symboles y apparaît, en général, comme ce qui permet un accès aux objets. Par exemple, c'était une telle ontologie qui permettait à Frege de comparer l'activité du mathématicien à celui du géographe explorateur. Celui-ci, disait Frege, découvre une rivière qui était déjà là. De manière similaire, le mathématicien découvre un théorème qui a toujours été vrai. C'est pourquoi, soutenait-il, les théorèmes de l'arithmétique incarnent des vérités éternelles. «

* Cet article fait partie d'une programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada / Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH / SSHRC)

Nous pouvons dire par conséquent que ces objets sont en dehors du temps ». (Frege, 1895/1970, p. 482). Dans l'épistémologie fregéenne les symboles donnent présence à ces réalités conceptuelles préexistantes à l'activité des individus. Les symboles, disait-il, « donnent présence à ce qui est absent, invisible, et le cas échéant inaccessible aux sens. » (Frege, 1971, p. 63). Le rôle des symboles est tout à fait autre dans une ontologie formaliste. Ainsi, en parlant au sujet des nombres, Hein disait: « j'appelle nombre certains symboles numériques tangibles. Donc l'existence de ces nombres n'est pas en question. » (Heine, cité dans Frege, 1960, p. 183). C'est pourquoi les axiomatiques formelles des mathématiques introduisent les objets comme une suite de lettres et réduisent le problème de la désignation des objets à une simple correspondance entre variables et ces objets donnés en soi[25]. Mais dès qu'on se place dans le contexte de l'enseignement, le problème ontologique de la référence et le problème épistémologique de la désignation prennent une allure tout à fait différente. C'est surtout le problème de la désignation qui va nous occuper ici. Nous retiendrons en particulier deux aspects.

(1) Le premier concerne les mécanismes sémiotiques de constitution du sens quand des expressions symboliques sont construites à partir d'un certain contexte.

(2) Le deuxième est celui de la transformation du sens afin de pouvoir mener des opérations sur les symboles désignant les objets. Ces aspects ne sont pas indépendants –du moins ils ne le sont pas pendant certaines phases de l'activité mathématique. Mais ils sont sous-tendus par des exigences sémiotiques et cognitives différentes.

On sait très bien que Duval caractérise ces aspects de l'activité sémiotique comme relevant de la conversion et du traitement entre registres sémiotiques, respectivement (Duval, 1993). Bien qu'essentiellement juste, en faisant intervenir deux registres dans la conversion et un seul registre dans le traitement, cette classification laisse de côté néanmoins le rôle d'autres systèmes sémiotiques dans la constitution du sens, notamment le système du langage parlé et celui des gestes. Or, la prise en compte et l'élucidation du rôle des autres systèmes sémiotiques assurant la conversion et le traitement sont des éléments fondamentaux pour une étude de l'ontogenèse des significations mathématiques. Il ne s'agit pas d'affirmer que Duval a minimisé le rôle du langage comme pivot d'articulation entre registres. C'est lui-même qui nous a rappelé que le rôle du langage en tant que pivot d'articulation fût pertinemment souligné par Jakobson. Il s'agit, pour moi, d'insérer le langage au sein de l'activité

[25] Dans ce contexte, la problématique de l'objet disparaît, ainsi que celle de sa désignation. Comme note Nichanian, « la difficulté apparue il y a un instant concernant la détermination originaire de l'objet, et donc l'apparaître de cet objet en tant que tel, a disparu; mais elle a disparu tout simplement parce qu'on se pose aucune question concernant la constitution du « domaine d'objets » dont on vient de parler. (Nichanian, 1979,p.17).

sémiotique des individus pour retracer la constitution du sens et la transformation de celui-ci. Toutefois, il convient de noter, avant de continuer, qu'en prêtant attention à la « voix » des élèves, je ne me place pas dans la foule de travaux contemporains qui réduisent la construction du savoir au discours ou à l'interaction (pour une critique des approches discursives voir Radford 2002a). Je me rapproche plutôt du constat que Marx exprimait dans son Grundrisse selon lequel les idées n'existent pas séparées du langage.

Puisque ma position théorique vis-à-vis du langage est cruciale pour situer l'analyse que je ferai du sens que les élèves attribuent aux expressions algébriques, il me faut apporter une nuance ici. En soutenant que les idées n'existent pas séparés du langage, je ne prends pas parti pour la position subjectiviste qui voit dans le langage le véhicule d'expression des idées. Je ne prends pas parti non plus pour la position (adoptée par plusieurs post-modernistes) qui confère au langage le rang d'un démiurge tout-puissant constructeur de la réalité. Il s'agit plutôt, pour moi, de concevoir le langage (et les autres systèmes sémiotiques) comme des moyens de réflexion (dans les deux sens, celui de reflet et celui de prise de conscience) se mouvant dans un horizon d'objectivation selon des modes de fonctionnement culturellement constitués (Radford, 1998). Dans cette dernière conception, où la réflexion est une des formes de la praxis sociale, conception proche à plusieurs égards de celle que Marx énonçait dans le Grundrisse, le langage apparaît en tant que porteur de significations et des « modes d'action (opérations) socialement élaborés, dans la pratique desquels les hommes modifient et connaissent la réalité objective » (Leontiev, 1984, p. 155).

Cet article fait suite à d'autres articles que nous avons publié précédemment concernant le problème de la désignation des objets mathématiques. Il se veut une exploration additionnelle et nécessaire d'un des résultats auxquels nous sommes parvenus sur l'apprentissage de l'algèbre symbolique chez des élèves débutants. Ce résultat peut être résumé de la manière suivante. Suite aux travaux de Filloy et Rojano (1984, 1989), dans une vaste partie de la littérature sur l'apprentissage de l'algèbre, on parle des difficultés qu'éprouvent les enfants à opérer sur l'inconnue[26]. Ces travaux mettent en évidence la difficulté qu'ont les élèves pour passer de la résolution d'équations du type ax+b=c à la résolution d'équations du type ax+b=cx+d. Alors que le premier type ne demande pas une opération sur l'inconnue (car la solution se fait en opérant sur les nombres a, b et c), le deuxième type exige bel et bien une opération sur l'inconnue. Or, dans notre programme de recherche longitudinale en salle de classe (Radford 2000a), nous avons trouvé que, sous certaines conditions, l'opération sur l'inconnue dans des problèmes du type ax+b=cx+d ne pose pas de problèmes aux élèves débutants. Ainsi, après un travail sémiotique à partir de la manipulation d'objets concrets, nos élèves ont pu facilement

[26] Voir par exemple le texte de Carragher et al. (2001) discuté récemment dans le Forum sur l'algèbre tenu lors de la 25e rencontre du PME aux Pays Bas et les commentaires et réactions à ce texte par Linchevski, Radford, Tall, Teppo, Warren et Cooper, Vol.1,pp.141-159.

passer au symbolisme et résoudre des équation telles que 14+2e = 2+4e (voir Radford, 2002b). Par contre, ces mêmes élèves n'ont pas réussi à reconnaître, dans des tâches de généralisation de patrons géométrico-numériques, que les expressions '(n+1) +n', '(n+n)+1' et '2n+1' réfèrent à une même situation ou objet (Radford 2000b; Radford, sous presse). Le problème n'est donc pas celui de la possibilité ou impossibilité de l'élève à opérer sur l'inconnue car cette question ne peut pas être tranchée par un oui ou par un non (ou plutôt elle peut être répondue par oui et non à la fois, mais alors la question perd tout son intérêt). La question devient celle-ci : comment se fait-il que dans certains cas l'opération sur l'inconnue est possible alors que, pour les mêmes sujets, dans d'autres cas l'opération sur l'inconnue est impossible ? Pour répondre à cette question, nous voulons suggérer, il faut regarder les problèmes de la désignation des objets et de la constitution du sens. Pour ce faire, il faut regarder comment la désignation des objets à travers les expressions symboliques algébriques est reliée aux intentions des individus et à l'évolution de ces intentions au cours de l'activité contextuelle. Il nous faut voir comment, dans les actes donateurs de sens, les intentions se cristallisent en s'exprimant dans les expressions symboliques que les élèves retrouvent au cours de leur immersion dans la pratique de l'algèbre.

L'intention à la base du sens mathématique à laquelle nous faisons référence ici ne doit pas être réduite à la subjectivité de l'individu. S'il est vrai que pour qu'il y ait intention il doit y avoir un individu, il n'est pas moins vrai que pour que l'intention soit accomplie elle doit être exprimée. Son expression se trouve ainsi cernée par la parole ou le geste historiquement et culturellement constitué, c'est-à-dire, par un système de significations qui vont au-delà de l'individu lui-même (c'est ce que Merleau-Ponty appelait l'expressivité du langage mais qui vaut bien pour d'autres systèmes sémiotiques également). Les intentions ont lieu à l'intérieur d'expériences culturelles que Husserl appelait noesis. Il appelait noema le contenu conceptuel de ces expériences. Ainsi, le noema correspond à la manière selon laquelle les objets sont saisis et deviennent connus par les individus. Noesis correspond aux catégories culturelles qui rendent possible que les objets du savoir soient l'objet d'attention (Husserl, 1931).En poursuivant ma recherche au sujet des processus sémiotiques de construction du sens et d'utilisation de signes chez des élèves débutant l'apprentissage de l'algèbre symbolique, la question que cet article tente d'examiner est celle de la manière dont les expressions symboliques sont munies de sens lors de la désignation des objets et de ce qui arrive au sens quand des opérations sur ces expressions sont nécessaires. L'analyse présentée ci-dessous portera sur une tâche concernant la résolution d'un problème en mots. En termes du cadre théorique esquissé précédemment, la question de recherche est d'étudier la manière (la noesis) dans laquelle les élèves utilisent des signes pour exprimer des facettes particulières (les noemata) des objets du discours. Après quelques commentaires sur la méthodologie, je vais proposer une distinction entre problème en mots (story-problem) et narrative symbolique. Cette distinction me permettra de fournir

des interprétations de certaines expressions algébriques produites par les élèves et qui, à première vue, semblent dépourvues de sens. Je vais en suite discuter le concept de nominalisation. L'intérêt théorique de ce concept n'est pas tout simplement d'expliquer comment les inconnues d'un problème sont introduites dans la phase de symbolisation algébrique. Sa fonction est plutôt celle d'un outil théorique pour examiner comment se fait la construction du sens des expressions symboliques dans ces limbes où on n'a pas tout à fait quitté l'histoire originelle (celle du problème en mots) et on n'a pas encore complètement atteint le domaine de la narrative symbolique (c'est-à-dire, la narrative racontée en signes). La dernière section présente une discussion courte du problème de l'utilisation abstraite ou formelle des signes une fois que l'équation associée avec le problème en mots a été produite.

METHODOLOGIE

Les données présentées ci-dessous proviennent d'un programme de recherche longitudinal qui a débuté l'année 1998-1999 et auquel participent 4 classes appartenant à deux écoles différentes. Un des objectifs de ce programme est d'assurer un accompagnement à ces quatre classes pendant plusieurs années. Lors de cet accompagnement, nous participons conjointement avec les professeurs des écoles dans l'élaboration des activités mathématiques reliées à l'algèbre. Les activités de salle de classe sont élaborées de sorte que les élèves travaillent selon une structure de petits groupes (2 à 3 élèves par groupe). Usuellement, après le travail en petits groupes, le professeur conduit une discussion générale qui permet de discuter les acquis des élèves, de les comparer et de les affiner quand c'est nécessaire. L'objectif et le contenu des activités sont circonscrits par le programme d'études de la province de l'Ontario, Canada. Ces activités s'insèrent dans le fonctionnement normal de la salle de classe et ont lieu selon la programmation des écoles. Nous enregistrons les activités sur vidéo à l'aide de plusieurs caméras. Ensuite, nous procédons aux transcriptions et à l'analyse des activités. L'analyse permet une rétroaction pour les activités à venir. Il ne s'agit donc pas d'une recherche de type « expérimentale classique » (passation de questionnaires, analyse de ceux-ci et obtention des conclusions) mais d'un accompagnement qui nous permet de voir, de près et sur le terrain, l'évolution des mécanismes sémiotiques de construction du sens et d'utilisation de signes.

Je me limiterai ici à mentionner quelques extraits provenant de trois petits groupes d'une des activités autour de la mise en équation et de la résolution d'un problème en mots[27]. Ces données ont été recueillies quand les élèves se trouvaient en 9^{e} année.

[27] Considérées sous un certain angle, nos observations peuvent être vues comme une micro-étude de cas. Ceci est exact à condition de postuler comme méthodologie officielle de la didactique des mathématiques celle des passassions massives de questionnaires, et ce indépendamment de l'objet de la recherche. Or, l'étude du sens en algèbre est un phénomène

Comme il découle de ce qui a été dit au sujet de la position théorique adoptée ici vis-à-vis du langage, en faisant du dialogue des élèves un point central de notre méthodologie, la question n'est point celle de tenter de voir les jeux de sens que chaque individu peut vivre dans sa tête à un moment donné fixé par un problème particulier, mais d'explorer l'accès des élèves à une pratique mathématique qui passe par la construction d'un sens à travers un langage symbolique complexe, historiquement constitué.

L'activité mathématique que je vais discuter était basée sur le scénario suivant : « Kelly a deux bonbons de plus que Manuel. Josée a 5 bonbons de plus que Manuel. Les trois enfants ensemble ont 37 bonbons »[28]. Le même scénario a été utilisé pour générer trois problèmes. Dans le premier problème, on demandait aux élèves de désigner le nombre de bonbons de Manuel par x ; ensuite ils devaient trouver une expression algébrique pour le nombre de bonbons de Kelly et de Josée, produire une équation associée au problème et la résoudre. Les problèmes 2 et 3 comprenaient des questions similaires. La différence se trouve dans le point d'ancrage de la désignation des objets. Alors que dans le problème 2, on a demandé aux élèves de désigner par x le montant de bonbons de Kelly, dans le problème 3 la lettre x devait désigner le nombre de bonbons de Josée.

RESULTATS ET DISCUSSION

De Héros aux Objectités[29]

Une des difficultés auxquelles les élèves doivent faire face dans des problèmes incluant des phrases comparatives telles que :

---

nouveau et on peut se poser la question de la validité d'une approche par questionnaires pour l'explorer méthodologiquement. La vaste recherche menée dans le domaine de la didactique de l'algèbre a été occupée, jusqu'à récemment, par un intérêt sur l'acquisition de la syntaxe du langage algébrique (on consultera à ce sujet la critique intéressante de Nemirovsky, 1994). Le questionnaire semble un outil approprié pour élaborer des catalogues d'erreurs d'élèves, etc. Mais étant donné la nature contextuelle de la catégorie sémiotique du sens, il semble difficile que les questions que nous nous posons en ce moment puissent être étudiées et cernées par d'autres moyens que ceux que nous fournissent les observations en direct sur le terrain, c'est-à-dire, la salle de classe (ces observations peuvent toutefois être complétées par des questionnaires ; nous l'avons fait d'ailleurs, mais avec des intentions différentes : voir Radford 2000a).

[28] Des problèmes de ce type ont été l'objet d'une recherche menée par Bednarz et Janvier (1994) en termes de l'effet qu'ont les relations (par exemple relations additives versus multiplicatives) sur les stratégies suivies par les élèves.

[29] Pour faire référence non pas seulement à des choses individuelles mais aussi à des choses complexes, à des catégories ou à des états d'affaires, Husserl (1961, 44) utilisait le terme Gegenständlichkeit (objectité). C'est dans ce sense que nous le prenons ici.

(Comp) « Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel »

consiste à en dériver des phrases assertives (c'est-à-dire des phrases qui éliminent la relation de comparaison) du type : « A (ou B) a C ».

Si, par exemple, Manuel a 4 bonbons, la phrase assertive dérivée de (Comp) prendra la forme :

(Asser) « Kelly (sujet) a (verbe) 6 (adjectif) bonbons (nom) ».

Dans le cas de l'algèbre, l'adjectif n'est pas connu (on ne sait pas combien de bonbons A a). Comme résultat, l'adjectif doit être désigné d'une certaine façon. Il doit devenir « prédicable ». En utilisant une lettre (disons 'x') un nouvel espace sémiotique est ouvert[30]. Dans ce nouvel espace, l'histoire originale doit être racontée à nouveau, débouchant sur ce qu'on appelle souvent (bien que de façon trop simpliste, comme Duval (sous presse) nous le rappelle) la « traduction » en équation du problème donné. À la place de traduction, je préfère parler de narrative symbolique. Ce terme cherche à souligner deux éléments essentiels. Le premier élément consiste à remarquer que, dans ce nouvel espace sémiotique, on raconte encore une histoire, mais cette fois-ci en symboles mathématiques. Le deuxième élément met en évidence le fait que, bien qu'il y ait de ressemblances entre l'histoire originale et la narrative symbolique, les personnages changent. Ce changement est caractérisé comme un glissement noématique qui met en avant certains aspects de l'histoire originale et qui place en arrière-plan d'autres aspects. Les « héros », pour ainsi dire, de l'histoire originale ne sont plus Kelly, Manuel ou Josée. Ce sont maintenant les relations numériques entre les montants de bonbons qui constituent les objectités exprimées dans le nouvel espace sémiotique (c'est-à-dire dans celui de l'algèbre symbolique en émergence).

Les difficultés qu'accompagnent le glissement noématique ou glissement d'attention peuvent devenir un obstacle dans l'apprentissage de l'algèbre. Montrons un exemple dans lequel on voit les élèves du groupe 1 en train de produire une expression symbolique sans pour autant pouvoir accomplir ce changement noématique[31].

Signes en tant que marques dans des actes narratifs

Dans ce groupe, un calcul (erroné) avec des phrases comparatives a amené les élèves à la situation suivante :

Stacey: Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel. Josée a 5 bonbons de plus que

[30] Le nouvel espace sémiotique ne doit pas forcément être celui de l'algèbre symbolique. Les abaquistes italiens du 14e siècle ont construit des espaces sémiotiques complexes à l'aide de mots dotés d'une technicité très subtile. Voir Radford,1997.

[31] Dans les extraits suivants, on trouvera que les élèves s'expriment en français, parfois en anglais et parfois dans les deux langues.

> Manuel, ensemble elles [Kelly et Josée] ont 7 bonbons de plus que Manuel.

À la place de transformer les phrases comparatives en phrases assertives, les élèves ont changé le terme comparatif en forme adverbiale. Plus précisément, la formule 'plus que' est remplacée par 'plus', ce qui leur a permis d'établir une hiérarchie chez les héros de l'histoire originale selon le nombre de bonbons:

> Stacey: Josée en a 5 [de plus]. Josée en a plus, Kelly est deuxième, Manuel le troisième. Ok so on met x qui représente … non x qui représente 7, Ok? 12 (en tant que résultat de 7+5), 9 (vu comme résultat de 7+2) mais j'sais pas comment trouver … […]. Il [Manuel] en a 7 moins que ces deux-là mis ensemble (elle écrit) x – 7 […] Il faut que ça (indiquant avec le doigt 37) égale à x-7 (en suggérant 37=x-7 ou x-7=37).

La transformation des phrases comparatives en phrases assertives est reliée à la possibilité de prendre en compte de façon explicite le nombre inconnu de bonbons. Toutefois, l'introduction claire, dans l'activité mathématique, d'une lettre pour désigner le nombre inconnu n'arrive pas à régler le problème. Ceci est montré dans l'extrait suivant (Ligne 2). Quand le professeur vient voir le travail des élèves, il se rend compte que ceux-ci n'ont pas pris en compte que x représente le nombre de bonbons de Manuel. Afin d'aider les élèves, il dit :

1. Professeur: Manuel est x.
2. Stacey: Ouin, Josée a 5 bonbons de plus que Manuel et les trois ensemble ont 37 bonbons.3. Professeur: Ici ils te demandent, là, d'écrire l'expression algébrique pour le nombre de bonbons représentés par Kelly. Donc si lui est x, elle est quoi? C'est ça [ce qu'il] faut que tu figures.
4. Stacey: (en même temps qu'elle regarde le professeur, elle dit) x-2.

Même si l'intervention du professeur a pris une forme elliptique (il dit: Manuel est x), cette intervention vise à faire en sorte que les élèves centrent leur attention sur le nombre de bonbons de Manuel. L'effort du professeur pour produire un glissement noématique chez les élèves se voit, cependant, sans succès : il est accueilli par une phrase qui ne fait que répéter les informations (Ligne 2) et dont l'intonation exprime une réponse du type : « Oui, oui, nous savons tous cela ».

La construction d'une narrative symbolique pour l'histoire donnée exige une nouvelle approche : alors que l'histoire originale se déploie selon une lecture linéaire de gauche à droite (avec des éventuels retours en arrière), le point d'entrée dans la narrative symbolique n'a pas un emplacement permanent. Le point d'entrée reste dans un espace qui est impossible à définir a priori. Et même si on arrivait à le détecter, il resterait encore un autre problème : il n'y a pas de congruence (au sens de Duval) entre l'histoire originale et la narrative symbolique. Le langage naturel servant de base à l'activité sémiotique des élèves ne suffit ni à cerner le point d'entrée ni a offrir un contrôle : c'est

que dans la narrative symbolique, l'ordre du discours (pour reprendre le terme de Foucault) est différent et ce que ce discours thématise porte sur d'autres choses.

Quel est alors le rôle des signes dans l'expression symbolique produite par les élèves ? Nous verrons maintenant que les signes des élèves constituent des scripts racontant des parties remarquables de l'histoire originale. Arrêtons nous aux expressions "x-7" et "x-2" produites par Stacey. Chacune de ces expressions est faite à partir de trois signes. Dans la deuxième expression, ces signes sont 'x', '-' et '2'. Le sens de ces expressions n'est pas, bien sûr, celui qu'on s'attendrait dans la pratique de l'algèbre. Mais nous ne pouvons pas dire pour autant que ces expressions n'ont pas de sens. L'expression « x-2 », qui fusionne l'intervention du professeur (Ligne 1) et la compréhension que Stacey élabore de celle-ci (Ligne 4), peut être lue comme une expression qui dit que Manuel a un certain nombre de bonbons ('x') et qu'il a deux ('2') bonbons de moins ('-') que Kelly. Ainsi, le signe '-' n'est pas en train d'indiquer une soustraction sur l'inconnue x mais c'est une marque d'orientation d'un court script au sujet de l'histoire originale. De façon similaire, le signe '7' dans l'expression « x-7 » n'exprime pas l'expression « x moins 7 ».

Tel qu'indiqué par Stacey dans le dialogue, le nombre 7 vient former part de l'expression symbolique avec un sens importé de sorte que chaque signe dans l'équation nous raconte une partie de l'histoire originale.

Quelques minutes plus tard, le professeur est revenu voir le travail des élèves. Le dialogue a pris alors la tournure suivante :

Professseur: x c'est Manuel, oui?

Caroline: Oui.

Stacey: (*elle interrompt*) So, x moins…

Professeur: (*en continuant sa phrase*) Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel. Supposons que Manuel a 20 bonbons, combien de bonbons est-ce que Kelly aura?

Stacey: 22?

Professeur: 22. *(Il regarde Caroline)* Si Manuel avait 30 bonbons, combien …

Stacey: (*elle interrompt*) 32.

Professeur: *(Il regarde Jessica)*. Donc, euh, comment est-ce qu'ils ont fait pour trouver Kelly?

Stacey: Tu mets le 2.

Professeur: (*il corrige*) Tu ajoutes 2.

Stacey: (*ayant compris comment exprimer algébriquement les relations, dit, en se référant à Josée*) Là tu ajoutes 5. […] Donc c'est x plus 5. (*Les élèves écrivent*

'x+2' et 'x+5')

Professeur: Pis, ça (*il indique la question portant sur l'équation correspondant au problème donné sur la page de l'activité*) serait égale à quoi? Ça c'est une équation donc il faut que ça soit égale à quelque chose (*à ce moment-ci, le professeur est appelé par un autre groupe d'élèves. En considérant que le groupe de Stacey est sur la bonne piste il part*)

Caroline: (*elle ajoute les trois expressions algébriques*) Donc si j'ai 3x + 7, *(Elle regarde à Stacey)* 3x + 7? […] Ça veut dire 3, non, 3x + 7 ça égale à 37?

Stacey: (*elle reconnaît le nombre 7 dont il a été question auparavant et dit*) I don't believe that! 3x + 7 est égale à 37! … oh!

Nous voyons comment en utilisant la formule elliptique « x est Manuel » et à travers un calcul sur des nombres (qui fonctionnent ici comme le support de la noésis, c'est-à-dire de l'acte donateur de sens), le professeur déplace l'attention des élèves sur les relations entre les nombres de bonbons. Ce qui est important à souligner n'est pas le fait que les élèves arrivent par là à écrire l'expression symbolique. Ce qui est important est, en fait, l'émergence de la prise de conscience que, dans les expressions symboliques, les héros, sans être jetés à l'extérieur du champ d'attention, sont placés maintenant dans un deuxième plan et que les prédications que se font dans le nouvel espace sémiotique où gîte la narrative symbolique portent sur d'autres choses : elles se font sur des *objectités*. Il se peut bien que des formules elliptiques basées sur le verbe être du genre « x *est* Manuel » ne soient pas les meilleurs pour forger la distance inévitable entre l'histoire originale et la narrative symbolique. Il se peut que l'utilisation du verbe « avoir » aurait été plus appropriée (nous avons pris conscience de ceci après que les vidéos de l'activité ont été analysés). Cependant, dans le contexte de la salle de classe, le choix des formules elliptiques a fait possible que les élèves commencent à comprendre le très lourd sens que portent les expressions algébriques, même si elles sont composées à partir d'un nombre incroyablement limité de signes.

Nominalisation

Les groupes 2 et 3 n'ont pas rencontré les mêmes difficultés que le groupe 1. Voici un extrait du groupe 2 :

Anik : OK. … Manuel ça va être la variable x (elle montre un endroit sur le page d'activité) comme…comme s'ils veulent…trouve l'équation là … l'équation pour Kelly c′est … à cause euh elle en a 2 de plus que Manuel. Manuel il en a … en a le montant x. So x plus two parce qu'on sait pas, x c'est combien Manuel a. Right. So, elle [Kelly] en a (elle montre un endroit sur le page d'activité) en a comme whatever Manuel a plus two.

Nous voyons comment la phrase comparative a été transformée en une phrase assertive

(« elle en a comme whatever Manuel a plus two »). En introduisant la lettre x (dans « Manuel ça va être la variable x » et « Manuel il en a … en a le montant x »), Anik, en utilisant d'abord le verbe 'être' et ensuite le verbe 'avoir', ouvre la porte qui mène à la narrative symbolique. Nous pouvons voir comment, malgré la reformulation à la fin de l'intervention, les héros commencent à disparaître de la scène principale. Mais essayons de voir les mécanismes sémiotiques qui rendent ceci possible de plus près.

L'insertion de 'x' comme une désignation du nombre de bonbons de Manuel prépare le terrain pour une nominalisation. Par nominalisation je veux dire un processus linguistique à travers duquel quelque chose est transformée en sujet ou en objet d'un verbe. En le nommant, on dégage cette « quelque chose » de ce que Hjelmslev appelait la masse amorphe de l'horizon du discours (Hjelmslev, 1969, pp. 51-52) et on la place en avant, devenant ainsi objet d'attention[32].

En disant « whatever Manuel a », l'expression peut maintenant devenir le nom dans la phrase assertive « Kelly a (nom) +2 ». Il est en effet intéressant de noter que, sans aide, le groupe 1 n'aurait pas pu offrir de nominalisation. Les groupes 2 et 3, par contre, ont effectué des nominalisations. Voici un exemple, provenant du groupe 3, au sujet du problème 3 (où x désigne le nombre de bonbons de Kelly). 1. Michelle: Kelly...(inaudible)...Là le x is all moved around. They're trying to trick us. So if Kelly has deux bonbons de plus que Manuel, then Manuel a deux bonbons de moins que Kelly, right? […] But now that Kelly is x, moins deux...

2. Jessy: (il interropmt) Ouain, ouain.
3. Michelle: I'm thinking… Josée a cinq bonbons de plus que Manuel. So Manuel a x moins deux puis Josée en a plus cinq que ça, right? So x moins deux parenthèse... plus cinq.

La ligne 1 montre un changement de sens, Bien que les phrases « Kelly has deux bonbons de plus que Manuel » et « Manuel a deux bonbons de moins que Kelly » réfèrent au même état d'affaires, le sens n'est pas le même[33]. Le sens change à cause de la manière dans laquelle l'objet est saisi –le contenu noématique n'est pas le même. Dans la dernière partie de la ligne 1 et dans la première partie de la ligne 3, Michelle produit une expression symbolique pour le nombre de bonbons de Manuel. L'insertion du signe 'x' permet une première nominalisation qui rend possible la phrase « Manuel a x moins deux ». Cette phrase est très importante pour notre analyse. Il s'agit, en effet, d'une phrase hybride qui illustre clairement comment le sens passe de l'histoire originale à la narrative symbolique par l'entremise du langage naturel. Dans la

[32] La nominalisation est, de manière plus générale, un des mécanismes d'objectivation sémiotique. Le thème de l'objectivation est traité en détail dans Radford (sous presse) et Radford 2002c.

[33] On se rappellera ici du fameux exemple de Frege, discuté également par Husserl: le vainqueur de Jena et le vaincu de Waterloo.

deuxième partie de la ligne 3, l'attention est portée sur l'expression « x moins deux » seulement. À la place de voir cette expression comme expression d'un des sens contextuels possibles (par exemple, 'le nombre de bonbons de Kelly moins deux' ou encore 'le nombre de bonbons de Manuel'), Michelle produit une suspension subtile et fondamentale de ces sens. Pour ce faire, elle utilise le déictique « ça ». La procédure sémiotique utilisée par Michelle, basée donc sur un recours aux déictiques, rend possible une deuxième nominalisation. Le référent est formellement nominalisé et peut, par là, devenir le nom du verbe « avoir » dans « Josée en a plus cinq que ça ».

Tel qu'indiqué dans l'introduction, l'intérêt théorique du concept de nominalisation est de nous renseigner au sujet de la manière dans laquelle les expressions symboliques deviennent dotées de sens. La nominalisation nous permet de scruter l'activité sémiotique dans ces limbes où l'on n'a pas tout à fait quitté l'histoire originale et on n'a pas encore atteint la région de la narrative symbolique. En particulier, la nominalisation nous permet d'étudier la constitution des sens d'ordre supérieur nécessaires aux nouvelles prédications requises dans l'élaboration d'expressions symboliques.

Il est temps maintenant de discuter le problème didactique des opérations avec les signes menant à l'équation.

Le collapse des narratives

Voici un extrait du dialogue du groupe 2 portant sur le problème 1.

1. Anik: Ouin. Gars bein. (Elle prend les feuilles) ce qu'on essaye de faire c'est de mettre [les expressions symboliques] avec les personnes, Ok ? Kelly en a deux de plus que Manuel, Manuel en a x, plus two c'est ce que Kelly en a [elle] a n'a whatever que lui a plus deux. Ok. Ça va être x plus two, ça c′est entre parenthèse, plus x plus cinq, qui va faire ce que Josée en a, plus x qui va faire ce que Manuel en a [elle vise l'expression '(x+2)+(x+5)+x']
2. Luc: : Égale à quoi? 30, 37? (Chantal écrit 2x+5x+x)
3. Anik: (en regardant l'expression symbolique de Chantal, elle dit) 2x, je pense pas
4. Chantal: pourquoi pas?
5. Anik: (elle pointe à un endroit sur le papier) parce que là t'es t'après faire deux fois x
6. Chantal: Non.
7. Anik: Icite on est après faire deux plus x (Anik écrit (x+2)+(x+5)+x)
8. Luc: (en regardant l'expression écrite par Anik, dit) Tu les regroupes, les regroupes tous les x (Chantal efface ce qu'elle avait écrit)
9. Anik: (En s'adressant à Luc) Non, non!

10. Luc: Ouin ! tu regroupes tous les x
11. Anik: non! Gars bein, gars bein, (elle pointe encore vers un endroit sur le papier)
12. Luc: Oh my God!
13. Anik: Je veux juste te l'expliquer, gars bein. Lui y'a en a, elle en a x plus deux, right?

À la ligne 2, Chantal utilise une syntaxe basée sur le critère de juxtaposition de signes. La phrase est structurée à la manière des narratives où les signes sont codés en tant que termes clés. Il s'agit d'une stratégie similaire à celle utilisée par les scribes babyloniens dans la construction des tablettes pictographiques de la période proto-littéraire (ca. 3300-2900 Av. J.-C.) précédant l'apparition du cunéiforme où, par exemple, un ensemble de pictogrammes représentant « mouton », « 2 » et « temple » pouvait signifier « deux moutons ont été remis (ou reçus) du Temple » (voir Radford 2001, 28-33). L'expression 2x ne signifie pas 2 fois x ou deux x. Pour Chantal, 2x exprime l'idée que Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel, et c'est pourquoi elle est surprise (ligne 6) qu'Anik ait pu interpréter ceci différemment. Mais le dialogue montre également une autre facette de la lutte que livrent les élèves dans leur essai de signification à travers le langage algébrique : à la ligne 8, Luc regroupe les termes similaires. Anik s'oppose radicalement à cette action. La question est: pourquoi? La raison en est que le regroupement des termes similaires signifie une rupture avec le sens original. Tous les efforts accomplis lors de la désignation des objets afin de produire la narrative symbolique doivent être mis à l'écart.

La narrative symbolique au complet doit maintenant collapser. Il n'y a pas, dans l'histoire originale, de segment possible qui puisse correspondre au résultat du regroupement des termes. Rien, en effet, dans l'hisoire originale ne peut être corrélé à l'expression 3x+7. L'effort désespéré d'Anik pour ne pas perdre la piste du sens de la narrative apparaît clairement à la ligne 13.

EN GUISE DE CONCLUSION

Ce travail se place à l'intérieur de nos recherches sur la production de signes et la constitution du sens en algèbre. Après avoir résumé certains résultats précédents, nous avons suggéré, dans la première section, que le problème de l'opération sur l'inconnue à intérêt à être repensé comme un problème lié aux actes donateurs du sens. C'est dans cette optique que nous avons abordé dans cet article deux problèmes sémiotiques : (1) celui de la désignation des objets du discours lors de la construction de narratives symboliques et le sens des expressions symboliques ; (2) celui des difficultés présentes quand des opérations doivent être menées sur des signes qui racontent une narrative symbolique.

En ce qui concerne le premier point, l'analyse de quelques extraits d'une activité de salle de classe suggère que la réussite des élèves dans la construction de la narrative symbolique dépend de leur possibilité de se déplacer à travers différentes couches de contenu noématique. Nous avons vu, en effet, l'interaction entre les différents sens et la dynamique requise pour enrichir, déplacer et abandonner ces sens. Nous avons également vu comment ceci se fait par des processus de nominalisation où interviennent plusieurs mécanismes sémiotiques, en particulier celui basé sur des déictiques. La nominalisation, en tant que procédure linguistique, permet une objectivation d'objets qui existaient jusque là, à l'état potentiel seulement. Elle extrait de l'horizon amorphe sur lequel se meut le discours des objets qui, de ce fait, deviennent prédicables. Elle assure qu'une « quelque chose » devienne accessible à l'activité intellectuelle des élèves est que cette « quelque chose » soit convertie en sujet ou en objet d'un verbe.

En ce qui concerne le deuxième point, nos observations de salle de classe laissent voir certaines difficultés qui se présentent dès qu'un calcul formel doit être effectué sur des expressions symboliques élaborées préalablement sous forme de narrative symbolique. Pour que le calcul formel ait lieu, la narrative symbolique doit collapser. Et cela exige que le sens de l'expression symbolique soit transformé. Une deuxième constitution du sens doit être mise en place. La constitution du sens après le collapse mérite encore plus de recherche. Alors que Russell (1976, p.218) considérait la manipulation formelle de signes comme descriptions vides de la réalité, Husserl soulignait le fait que de telles manipulations de signes requièrent un glissement d'attention, un changement noématique. Sans prétendre réduire la nouvelle attention au signe qua signe, Husserl soutenait que le centre d'attention doit se placer sur le signe lui-même. Il disait que la manipulation abstraite de signes est possible grâce à des nouvelles significations résultant de règles qui fonctionnent à la manière des règles d'un jeu (Husserl 1961, p. 79), ce qui l'a amené à parler de signes qui ont une signification de jeu. Il me semble que la richesse de la métaphore d'Husserl réside dans la manière de nous rappeler le rôle culturel et conventionnel des règles. Mais puisque l'arbitraire et le conventionnel sont deux choses différentes, la faiblesse de la métaphore est qu'elle ne nous aide pas à voir la justification derrière la nature du conventionnel.

Remarque :

Une version abrégée de cet article, dédiée à Raymond Duval, paraîtra dans les actes de la 26^{e} conférence du groupe international *Psychology for Mathematics Education*, qui se tiendra en Norwich, UK, en juillet 2002

References

Bednarz, N. et Janvier, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context. *Proceedings of the 18th Conference of the International group for the psychology of Mathematics Education* (PME 18), Portugal, **2**, 64-71.

Carraher, D,. Schliemann, A.& Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utretch University, , Vol. **1**, 130 140.

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol. 5, pp. 37-65.

Duval, R. (sous press). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'Algèbre, IREM de Nice*. Frege, G. (1895/1970). The whole number. *Mind*, **79** (316), 481-486 (Traduction de l'article: Le nombre entier, publié dans: Revue de métaphysique et de Morale, vol. 3 (1895), pp. 73-78).

Frege, G. (1960). *Translations from Philosophical Writings of Gottlob Frege*, by Peter Geach and Max Black. Oxford: Basil Blackwell.

Frege, G. (1971) *Écrits logiques et philosophiques*, Paris: Éditions du SeuilFilloy, E. et Rojano, T. (1984). From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 years old). *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Madison, Wisconsin, 51-56.

Filloy, E. et Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol 9, No. 2, pp. 19-25.

Hjelmslev, L. (1969). *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press.

Husserl, E. (1931). *Ideas*. London: The Macmillan Company.

Husserl, E. (1961). *Recherches Logiques* (Recherches I et II). Paris: PUF.

Leontiev, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*, Moscou: Éditions du Progrès.

Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and the Velocity sign, *Journal of Mathematical Behavior*, **13**, 389-422.

Nichanian, M. (1979). *La question générale du fondement: Écriture et temporalité*. Thèse de Doctorat de troisième cycle de Philosophie, Université des Lettres et Sciences humaines de Strasbourg.

Radford, L. (1997) L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre, *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28, 81-96.

Radford, L. (1998). *On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*, paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998. Disponible au site: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/

Radford, L.: (2000a). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, **42** (3), 237-268.

Radford, L. (2000b). Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks, in: T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (PME-24), Hiroshima University, Japan, **4**, 81-88. Disponible au site: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/

Radford, L. (2001). The Historical Origins of Algebraic Thinking. In Sutherland, R. *et al*. (Eds.), *Perspectives in School Algebra* (pp. 13-36). Kluwer.

Radford, L. (2002a). *Des limites épistémologiques du langage*. *Savoir mathématique et pratique sociale à la Renaissance*. Pre-prints 1/2002, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne.

Radford, L. (2002b). Algebra as tekhnē. Artefacts, Symbols and Equations in the Classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1**(1), 31-56.

Radford, L. (2002c). *The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge*. Pre-prints 2/2002, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne.

Radford, L. (sous presse). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*.

Russell, B. (1976). *An Inquiry into Meaning and Truth*. London: G. All

BIBLIOGRAPHIE

Intérêt général

• BKOUCHE R., CHARLOT B., ROUCHE N., *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin
• BOURDEAU M., *Pensée symbolique et intuition*, PUF/collection Philosophies
• BROSSARD M., *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Presses Universitaires du Septentrion, 2004
• CHANGEUX JP., CONNES A., *Matière à pensée*, Odile Jacob / Poches, 2000
• CLOT Y. (ouvrage collectif dirigé par), *Avec Vygotski*, Éditions La Dispute, 2002
• CRUMP T. *Anthropologie des nombres*, Seuil, 1995
• DAMASIO A., *L'erreur de Descartes*, Odle Jacob / Poches, 2001
• EDELMAN G., *Biologie de la conscience*, Odile Jacob / Poches, 2000
• GIUSTI E., *La naissance des objets mathématiques*, Ellipses/collection L'esprit des sciences
• GLAESER G., *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, La Pensée Sauvage
• GUITTARD R., *La pulsation mathématique*, L'Harmattan
• LAKATOS I., *Preuves et réfutations*, Hermann
• LARROCHE F., *Promenades mathématiques*, Ellipses
• LEGRAND P. (coordonné par), *Les maths en collège et au lycée*, Hachette Éducation
• MEYERSON I., *Les fonctions psychologiques et les œuvres*, Albin Michel, 1995
• PEIRCE C.S., *Écrits sur le signe*, Seuil, 1978
• PIAGET J., *Psychologie de l'intelligence*, Pocket/collection Agora
• VERGNAUD G. (sous la direction de), *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*, Hachette Éducation
• VYGOTSKI L., *Conscience, inconscient, émotions*, La Dispute, 2003
• VYGOTSKI L., *Pensée et langage*, La Dispute, 1997
• WALLON H., *De l'acte à la pensée*, Flammarion/collection Champs
• *Faire des maths en classe*, INRP ADIREM, Actes du colloque de Poitiers, 2004
• *L'enseignement des mathématiques. Des repères entre savoirs, programmes et pratiques*
Publication des IREM, Topiques Éditions, 1996
• *Mathématiques au collège : les enjeux d'un enseignement pour tous*, Actes du colloque Inter-IREM Premier Cycle, Lille, 1999

Plus particulièrement sur l'algèbre…

• BARBIN E., BOYÉ A. (sous la direction de), *François Viète*, Vuibert, 2005
• BEDNARZ N., KIERAN C., LEE L., *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*, Kluwer Publishers, 1996
• BOOTH L., *Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire*, Petit x n° 5, IREM de Grenoble
• CHEVALLARD Y., *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique* (3 parties), Petit x n° 5; 19 et 23, IREM de Grenoble
• CONDILLAC, *La langue des calculs*, Presses Universitaires de Lille, 1981

• GÉCO, *Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre ?*, Repères IREM n° 28, Topiques Éditions, 1997
• KIERAN C., *Concepts associated with the egality symbol* (traduction du Groupe IREM Premier Cycle), Educational Studies in Mathematics, 1981
• KIERAN C., BOOKER G., FILLOY E., VERGNAUD G., WHEELER D., *Cognitive processes involved in learning school algebra*, Mathematics and Cognition, Cambridge UP, 1990
• KIERAN C., *The learning and teaching of school algebra*, Handbook of research on mathematics teaching and learning, 1992
• KIERAN C., CHALOUH L., *Prealgebra : the transition from arithmetic to algebra Research ideas for the classroom*, MacMillan, 1993
• LEMOYNE G., CONNE F., BRUN J., *Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales*, RDM volume 13 n° 3, La Pensée Sauvage, 1993
• RADFORD L., *Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking : a semiotic analysis*, Educational Studies in Mathematics 42, Kluwer Publishers, 2001
• RADFORD L., *On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking*, Psychological Mathematics Education, 2002
• RADFORD L., *Gestures, speech, and the sprouting of signs : a semiotic-cultural approach to student's types of generalization*, Mathematical thinking and learning (Pre-print), 2003
• ROUGER-MOINIER F., *Quelques problèmes pour donner du sens à des règles de calcul littéral en troisième*, Repères IREM n° 42, Topiques Éditions, 2001
• SERFATI M., *La révolution symbolique de l'écriture mathématique*, Petra, 2005
• *Du numérique à l'algébrique au collège et au lycée*, Recherche-Formation/Académie de Toulouse, 1997-2000

Groupe Premier Cycle

année scolaire 2007 - 2008

Françoise SAVIOZ
Miquela CATLLA
Karine DESCHAMPS-FOURNIÉ
Emmanuelle FAYEL
Annie BOURDIL
Yves CHASSIN (*responsable*)
Bernard VIDAL

IREM de Toulouse
Université Paul Sabatier
Bâtiment 1 R 2
31062 TOULOUSE cedex 9

Titre	Éléments 0
Auteurs	Groupe Premier Cycle de l'IREM de Toulouse
Public	Professeurs de collège et de lycée et professeurs des écoles
Date	Février 2008
Mots clefs	Vygotski, algèbre, calcul, enseignement-apprentissage, activité-classe, erreurs, Pensée et Langage, lecture numérique, égalité, concepts quotidiens/ concepts scientifiques, apprentissage-développement.

Résumé

«Éléments 0» inaugure une série de brochures «périodiques» (à périodicité variable) intitulées «Éléments n». Y seront exposées des lectures possibles de l'oeuvre de Vygotski par l'intermédiaire d'articles écrits soit par notre groupe, soit par des spécialistes : dans ce premier numéro, nous reproduirons quelques pages du livre de Michel Brossard intitulé « Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation» concernant les processus de conceptualisation. On y trouvera également des comptes rendus d'expérimentations menées dans nos classes, des réflexions diverses sur l'enseignement des mathématiques qui illustreront l'évolution de nos idées.

Les publications de départ concerneront l'enseignement des nombres et de l'algèbre, puisque c'est dans ce domaine que porte l'essentiel de nos recherches. L'importance de cet enseignement, les difficultés qu'il soulève, ne sont plus à démontrer : il est déterminant pour la formation de l'esprit mathématique de l'élève et la maîtrise des concepts algébriques est indispensable pour la poursuite des études en mathématiques.

Brochure n° 175

N° ISBN : 978-2-952-9992-8-1
N° EAN : 978295999281

Édition **IREM de Toulouse**
Université Paul Sabatier
Bâtiment 1 R 2
31062 TOULOUSE cedex 9
mél : *irem@cict.fr*