GROUPE PREMIER CYCLE

Éléments 1

irem
Toulouse

Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques de Toulouse

SOMMAIRE

PRÉSENTATION

« Éléments 0 » inaugurait une série de brochures « périodiques » (à périodicité variable) intitulées « Éléments n ». Voici donc « Éléments 1 ». On y trouvera deux articles, l'un sur le calcul, l'autre sur l'introduction du calcul littéral en classe de cinquième, intimement liés à nos pratiques de classe. On pourra y lire quelques réflexions sur la notation dans un contexte qui relance ce débat déjà ancien. Et un article de Luis Radford sur la théorie de l'objectivation paru en espagnol et dont l'auteur a eu l'amabilité de relire notre traduction.

Il est possible qu'on puisse trouver quelques redites d'un article à l'autre, mais, se trouvant dans des contextes et des éclairages différents, elles peuvent peut-être aider à mieux cerner les propositions concernées.

Nous rappelons enfin que nous sommes prêts à publier dans les prochains numéros les réactions suscitées par nos diverses propositions.

Bonne lecture.

Le groupe Premier Cycle de l'IREM de Toulouse

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LE CALCUL

> « Les hommes ne communiquent les uns avec les autres par les significations qu'à proportion du développement des significations. »
> (A. N. Léontiev, *Le problème de la conscience. Note sur les thèses principales du rapport de L.S. Vygotski)*

Introduction

Depuis plusieurs années, notre groupe s'intéresse à l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège et à ses difficultés dont bon nombre se révèlent dans la pratique du calcul littéral. Depuis près de trente ans, de nombreux travaux ont été publiés sur le sujet, des études sur les erreurs des élèves parfois suivies de propositions ou de recommandations : ces études ont conduit leurs auteurs à une réflexion sur les différences entre arithmétique et algèbre, entre calculs numériques et littéraux. Brun, Conne et Lemoyne énumèrent certaines de ces différences à partir de publications diverses et de l'étude synthétique réalisée par Kieran (1989). Citons-les :

« 1) l'essence de l'algèbre est la compréhension de la nature structurale des relations mathématiques et des procédures ;

2) l'arithmétique est procédurale ; en algèbre, les procédures font partie des objets (ex : $x^2 + 2x + 1$) ;

3) accepter en algèbre de suspendre l'évaluation des opérations constitue une rupture fondamentale avec l'arithmétique ;

4) pour résoudre des problèmes arithmétiques, les élèves ont recours à des méthodes différentes de celles qui sont attendues dans la résolution de problèmes d'algèbre. En arithmétique, l'élève effectue des comptages, des ajouts, des combinaisons de quantités, des traitements de nombres naturels, …, dans le but de produire une quantité, un nombre et ce produit obtenu ne porte pas de « mémoire de la manière dont il a été obtenu et est ainsi jugé indépendamment de sa production ». En algèbre, au contraire, produit et production doivent être liés et examinés : « Ainsi, si les élèves ne reconnaissent pas que le nombre total d'objets dans deux collections contenant 5 et 8 objets respectivement peut être écrit 5 + 8 (plutôt que 13), il est fortement improbable qu'ils sauront reconnaître que a + b représente le nombre total d'objets dans des collections contenant a et b objets. » (Kieran et al. 1990) ;

5) le signe = est interprété ainsi en arithmétique : « do something signal » ; ce qui entraîne le rejet d'identités et d'équations de types : a) $4 + 3 = 6 + 1$; b) $2x + 3 = x + 4$. » (J. Brun, F. Conne et G. Lemoyne, *Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre.*)

Nous ne commenterons pas en détails ces diverses affirmations qui rejoignent, dans la plupart des cas, nos observations en classe. Nous nous arrêterons seulement sur les deux derniers points qui ont particulièrement nourri notre réflexion.

D'abord, il nous semble vrai de dire, comme nous l'avons constaté dans nos classes, que, lors d'une résolution de problèmes arithmétiques, le seul objectif que suivent souvent nos élèves, particulièrement en classe de sixième, c'est la production d'un « résultat ». Pour eux, tout calcul doit invariablement s'achever par la production d'un nombre écrit à l'aide de seuls chiffres et d'une virgule si nécessaire [1]. Même les formes fractionnaires des nombres sont la plupart du temps exclues : si l'on demande, par exemple, à des élèves de calculer $3{,}7 + \frac{9}{10}$, presque tous les élèves considéreront que la seule réponse légitime est 4,6 et refuseront la réponse $\frac{46}{10}$ ou $\frac{23}{5}$. Dans ces conditions, il n'y a pas à s'étonner que lors des premières activités de calcul littéral des élèves cherchent, désemparés, « un résultat », demandent « quand est-ce qu'on s'arrête de calculer ? » ou écrivent l'égalité « $3 + 2x = 5x$ », puisque tout « résultat » ne peut comporter de symbole d'opération.

Ensuite, il nous paraît évident que, pour la plupart des élèves, la signification de l'égalité n'est pas celle des mathématiciens. Elle est vue plutôt comme le « déclencheur » d'une action, souvent appelée calcul, sans la conscience explicite qu'elle est une relation entre deux formes d'un même nombre.

Ces quelques considérations, énoncées rapidement, nos lectures diverses, nos observations en classe, éclairées par la théorie de l'apprentissage dans laquelle nous nous plaçons, nous ont convaincus que les concepts de nombre, d'opération, d'égalité, de calcul, entre autres, et leurs développements, devaient être examinés en détail. En effet, ces concepts sont mobilisés tant en arithmétique qu'en algèbre, tant dans le calcul littéral que dans le calcul « d'avant le calcul littéral ». Pour plus de clarté, nous avons choisi d'appeler ce calcul « d'avant », abordé dès l'école primaire, qui ne s'effectue que sur des nombres écrits à l'aide de chiffres, le calcul chiffral [2], pour le distinguer du calcul littéral où certains nombres peuvent être écrits à l'aide de lettres. Cet article s'intéressera donc essentiellement au calcul, à l'articulation du calcul chiffral et du calcul littéral dans l'apprentissage en lien avec les concepts de nombre, d'opération et d'égalité desquels il ne peut être dissocié.

---

1 Comme le souligne Chevallard (1985) : « En fait, le royaume du calcul est régi par la loi de simplification intériorisée en habitus, dont l'une des clauses est constituée par le principe d'achèvement des calculs. »

2 Nous préférons employer l'adjectif « chiffral » plutôt que « numéral » que l'on rencontre parfois chez certains auteurs. Il nous semble qu'il exprime plus nettement que ce calcul ne porte que sur des nombres écrits en chiffres, alors que l'adjectif « numéral » renvoie à la notion de nombres sur lesquels portent à la fois le calcul chiffral et le calcul littéral.

I. Le cadre théorique

Notre réflexion sur le calcul chiffral et sur son articulation avec le calcul littéral s'inscrit dans une approche historico-socio-culturelle de l'apprentissage dont Vygotski est l'un des fondateurs essentiels [3]. Nous voudrions rappeler brièvement quelques idées-forces de cette approche qui ont particulièrement fondé notre pensée sur le problème de l'enseignement du calcul qu'il soit chiffral ou littéral :

a) les concepts [4] de l'algèbre sont des généralisations des préconcepts [5] de l'arithmétique, c'est-à-dire des généralisations des généralisations arithmétiques. Ils s'élaborent à partir de ce qui a été construit dans et par les activités antérieures, dans le domaine numérique, dès l'école primaire, sans révoquer ces constructions précédentes.

> « Un nouveau stade de généralisation ne peut apparaître que sur la base du précédent. Une nouvelle structure de généralisation a pour source non pas une nouvelle généralisation directe des objets à laquelle procéderait la pensée mais la généralisation des objets généralisés dans la structure précédente. Elle apparaît en tant que généralisation de généralisations et non pas simplement comme nouveau mode de généralisation d'objets singuliers. Le précédent travail de la pensée, qui s'est traduit dans les généralisations dominant au stade précédent, n'est pas annulé, n'est pas perdu mais s'intègre à titre de prémisse nécessaire dans le nouveau travail de la pensée.» (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 391)

b) La pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale, le mot a un rôle décisif dans la formation d'un concept. Le mot permet à l'élève de diriger volontairement son attention sur certains traits distinctifs et en fait la synthèse, il symbolise en quelque sorte le concept en abstraction.

> « Le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale ; l'élément nouveau, l'élément central de tout ce processus, qu'on est fondé à considérer comme la cause productive de la maturation des concepts, est l'emploi spécifique du mot, l'utilisation fonctionnelle du signe comme moyen de formation des concepts. » (Ibid., p. 207)

c) Dans la conception vygotskienne des rapports entre pensée et langage, on pourrait dire que la pensée est en quelque sorte générée par l'activité et qu'elle se modifie par sa rencontre avec le langage et ce, à travers les significations verbales. Une signification verbale est l'unité indissociable d'une activité de pensée et de formes langagières ; mais c'est aussi un rapport entre activité de pensée et langage qui est variable au cours de l'histoire de l'élève et selon la nature de ses activités.

> « La signification du mot n'est pas immuable. Elle se modifie au cours du développement de l'enfant. Elle varie aussi avec les différents modes de fonctionnement de la pensée. C'est une formation plus dynamique que statique. » (Ibid., p. 427)

---

[3] Pour une présentation plus ample de l'œuvre de Vygotski, voir la brochure « Éléments 0 » et aussi les notes situées en dernière partie de l'article « Séquence d'introduction au calcul littéral » de cette présente brochure.

[4] Dans notre approche, un concept ne peut être isolé. Les concepts n'existent qu'intégrés dans des systèmes de concepts.

[5] Vygotski distingue les concepts des préconcepts. Les préconcepts se construisent par généralisation des choses, l'exemple typique étant les concepts arithmétiques de l'écolier. Les concepts, eux, se construisent par généralisation des objets antérieurement généralisés, l'exemple typique étant les concepts algébriques.

II. Une enquête

Notre approche théorique montre l'importance de la construction des concepts de nombre, d'opération, d'égalité et de calcul dans les activités arithmétiques, puisque c'est sur la « base » de ces constructions que pourront se développer ces concepts que l'activité algébrique mettra en jeu. Or nous avons souligné le rôle clé du mot dans la formation des concepts et son rapport dynamique avec l'idée avec laquelle il est lié, à travers des significations qui se modifient au cours de l'histoire de l'élève. C'est pourquoi il nous a semblé qu'une réflexion sur le calcul et son enseignement pouvait difficilement se passer d'une étude préalable pour tenter de cerner le niveau de développement de la signification du mot calcul ou du verbe calculer chez nos élèves. Pour cela, durant l'année scolaire 2009-2010, nous avons demandé à 172 élèves de deux collèges de l'académie de Toulouse, de répondre par écrit, sans contrainte de temps, à la question suivante : « En quelques phrases, pouvez-vous préciser ce que signifie pour vous calculer ? ». Au début d'une séance habituelle, sans qu'ils aient été prévenus, nous leur avons distribué une feuille pour qu'ils y écrivent leurs réponses. Cette expérience a été réalisé sur 99 élèves du collège Victor Hugo de Carmaux et sur 73 élèves du collège Émile Zola de Toulouse. Au total 48 élèves de sixième, 41 élèves de cinquième, 61 élèves de quatrième (dont 10 se trouvaient en quatrième aide et soutien) et 22 élèves de troisième d'insertion ont été interrogés. Nous récapitulons les différentes réponses des élèves dans le tableau ci-dessous :

Réponses des collégiens	6e		5e		4e		3e		Total	
	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres (des chiffres). Faire une addition, une soustraction, multiplication, division.	22	53,6%	23	47,9%	25	41%	16	72,7%	86	50%
C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres pour trouver un résultat. Essayer de trouver un résultat.	8	19,5%	10	20,8%	19	31,1%	2	9,1%	39	22,7%
Compter.	2	4,9%	0	0%	5	8,2%	1	4,55%	8	4,7%
Résoudre un problème, trouver une solution.	4	9,8%	1	2,1%	1	1,7%	1	4,55%	7	4,1%
Il faut réfléchir.	2	4,9%	5	10,4%	2	3,3%	0	0%	9	5,2%
Réponses peu compréhensibles.	0	0%	2	4,2%	6	9,8%	1	4,55%	9	5,2%
Pas de réponse.	3	7,3%	7	14,6%	3	4,9%	1	4,55%	14	8,1%

Nous avons également posé la même question, dans les mêmes conditions, à 9 animateurs de l'IREM de Toulouse, à 9 professeurs de mathématiques chiliens du secondaire en stage à l'IREM de Toulouse et à 15 professeurs des écoles, profitant pour ces derniers d'un stage de formation continue. Il s'agissait dans ce cas d'essayer de déterminer, même grossièrement, si la signification du mot calcul (ou du verbe calculer) s'était développée pour ces personnes qui avaient continué à étudier les mathématiques pendant plusieurs années après le collège et d'apprécier dans quelle mesure la signification s'était modifiée.

Voici leurs réponses :

Réponses des professeurs de mathématiques	**Effectif**	**%**
Déterminer une valeur d'une expression (algébrique) en appliquant un algorithme, certaines règles…	6	33%
Réaliser, effectuer, faire des opérations, une suite d'opérations sur des nombres (des lettres, des objets mathématiques).	5	28 %
Réaliser, effectuer, faire des opérations pour trouver un résultat, une valeur numérique, résoudre un problème.	3	17 %
Procédé qui donne la réponse à un problème.	1	5,5 %
Utiliser les opérateurs +, –, ÷, × avec les réels.	1	5,5 %
C'est obtenir un résultat.	1	5,5 %
Mélange de nombres avec des opérations.	1	5,5 %

Réponses des professeurs des écoles	**Effectif**	**%**
Mettre en relation différents nombres (assembler des quantités) pour résoudre un problème.	6	40%
Utiliser différentes opérations pour résoudre un problème.	1	6,7%
Comprendre la relation possible entre des nombres.	1	6,7%
Manipulation de nombres.	1	6,7%
Donner un résultat.	1	6,7%
Calculer permet d'obtenir le résultat d'une opération.	1	6,7%
Réaliser des opérations.	1	6,7%
Permet de résoudre des problèmes.	1	6,7%
Confronter des nombres entre eux.	1	6,7%
Associer des nombres entre eux en fonction d'une opération donnée.	1	6,7%

III. Brève analyse et quelques commentaires

Commençons par une remarque. Comme l'écrit Vygotski :

> « Ainsi, dès l'origine, la pensée et le langage ne sont absolument pas taillés sur le même modèle. On peut dire en un certain sens qu'il existe entre eux une contradiction plutôt qu'une concordance. La structure du langage n'est pas le simple reflet, comme dans un miroir, de celle de la pensée. Aussi le langage ne peut-il revêtir la pensée comme une robe de confection. Il ne sert pas d'expression à une pensée toute faite. En se transformant en langage, la pensée se réorganise et se modifie. Elle ne s'exprime pas mais se réalise dans le mot. » (Ibid., p. 431)

Les réponses écrites que nous allons tenter d'analyser ne sont pour nous que des indices d'une pensée. Elles ne recouvrent pas entièrement la pensée des élèves ou des professeurs qu'il aurait sans doute fallu interroger plus finement, ce qui était impossible d'entreprendre dans le cadre de ce travail.

> « La pensée est un nuage d'où s'écoulent des gouttes de langage »
>
> (A. N. Léontiev, *Le problème de la conscience. Note sur les thèses principales du rapport de L.S. Vygotski.*)

III.1. Les élèves

Si nous observons les réponses des collégiens, nous constatons que la réponse majoritaire (50% des élèves) est que calculer « C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres. » Près d'un quart des collégiens (22,7 %) précisent que ces opérations « sont faites » en vue de trouver un « résultat ». Les autres réponses restent trop peu fréquentes pour vraiment pouvoir en tirer des conclusions.

Dans certaines classes, des élèves ont senti le besoin d'illustrer leurs essais de « définition » du verbe calculer. Ils ont demandé s'ils pouvaient donner des exemples de ce qu'ils considéraient comme des calculs. Ainsi 99 élèves (sur 172) ont écrits des exemples de calcul. Leurs exemples sont de deux ordres : les premiers sont du type « 10 – 5 = 5 » ou « 4 + 3 = 7 », certains calculs étant posés en colonnes. Ils représentent 85 % des exemples donnés. Les seconds sont du type « 3 + 4 » ou « 2 × 4 » (non suivis du symbole d'égalité). Ils représentent 12 % des exemples donnés. Seulement 3 % des élèves écrivent un « calcul » où interviennent deux opérations comme « 3 × 4 + 58 = 70 ».

Il faut aussi relever que la réponse « calculer, c'est compter » a été donnée à 75 % par des élèves de classe de quatrième aide et soutien ou par un élève de troisième d'insertion.

Ces réponses appellent plusieurs brefs commentaires. D'abord on peut observer que les significations que donnent les élèves au verbe calculer ou au mot calcul ne se sont que peu modifiées de la sixième à la quatrième (et même à la troisième, mais remarquons que nous parlons là d'élèves de troisième d'insertion). Nous pouvons noter que l'objectif d'un résultat est davantage signalé par les élèves de quatrième (31,1% en quatrième contre 19,5% en sixième). L'apprentissage du calcul littéral n'a, semble-t-il, guère changé le rapport au calcul des élèves de quatrième qui reste lié au seul calcul chiffral puisqu'aucun élève n'évoque le calcul littéral. Ensuite il est manifeste dans ces réponses que les significations de nombre, d'opération et de calcul sont encore peu discriminées chez les élèves. La notion de calcul est pensée par complexes[6] et la différenciation des traits distinctifs du calcul y est extrêmement limitée : en effet, lorsque qu'un élève écrit que « 3 + 4 » est un calcul, il tend à affirmer que, dans certains cas, calcul signifie nombre. De même, quand un élève dit que calculer « C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres », il laisse entendre qu'opérer c'est calculer, qu'un calcul est une opération.

Il est à signaler qu'on peut retrouver ces mêmes « approximations » dans des manuels scolaires de mathématiques. Il arrive qu'on puisse lire sur une même page d'exercices les formulations suivantes[7] :

- « Calcule en ligne les opérations : a) 3 421 + 725 … » ,
- « Calcule mentalement les sommes : a) 34 + 12 + 16 + 15 … »,
- « Pose et effectue les opérations : a) 5 236 + 883 … ».

Cela laisse à penser au lecteur que somme et addition peuvent être synonymes, puisque l'opération en jeu dans le premier exemple est l'addition. La dernière formulation suggère que lorsqu'on écrit « 5 236 + 883 », l'opération n'est pas effectuée.

On peut aussi lire dans un autre manuel[8] : « Classer, sans poser aucune opération, ces calculs dans l'ordre croissant de leur résultat. A = 1 458 + 564 … ». Là encore, cela laisse entendre que l'on puisse classer des calculs dans l'ordre croissant comme si ces calculs étaient des nombres.

De plus, dans dix manuels de sixième sur douze examinés, nous trouvons, dans la partie cours, concernant l'addition, le même exemple à quelque chose près :

$13{,}1+6{,}8=19{,}9$

↑ ↑ ↑

termes somme

La flèche indique que 19,9 est une somme, sans doute la somme de 13,1 et de 6,8. 19,9 est bien égal à la somme de 13, 1 et de 6,8 ou pour le dire comme Frege, 19,9 et 13,1 + 6,8 dénotent bien le même nombre, mais 19,9 ne peut être reconnu comme une somme puisque dans

[6] Voir note [C] située en dernière partie de l'article « Séquence d'introduction au calcul littéral » de cette présente brochure.

[7] Livre de mathématiques de sixième, Bréal, 2005, p. 37.

[8] Livre de mathématiques de sixième, collection Domino, Nathan, 2005, p. 56.

l'écriture 19,9 ne figure aucun signe particulier indiquant que ce nombre a été obtenu par addition (ni par soustraction d'ailleurs, ni par multiplication…). Par contre l'écriture 13,1 + 6,8 indique bien l'antériorité d'une opération dont on perçoit la « cicatrice » [9], le signe +. C'est la somme de 13,1 et de 6,8.

Dernière remarque : 14 élèves (8,1%) ne répondent pas à la question posée. Est-ce à dire qu'ils ne savent pas ce que c'est que calculer ? Pourtant, si nous leur demandions de calculer 137 + 246, tous sauraient ce qu'il y a à faire. Cette remarque peut être rapprochée de ce qu'écrit L. S. Vygotski :

> « La première chose qui mérite ici d'être notée, c'est la profonde *discordance, que l'expérimentation fait apparaître, entre la formation du concept et sa définition verbale.* Cette discordance se maintient non seulement chez l'adolescent mais aussi dans la pensée de l'adulte, parfois même dans la pensée au plus haut point développée. *La présence d'un concept et la conscience de ce concept ne coïncident ni dans le moment de leur apparition ni dans leur fonctionnement.* La première peut se manifester plus tôt et agir indépendamment de la seconde. L'analyse de la réalité à l'aide des concepts survient beaucoup plus tôt que l'analyse des concepts eux-mêmes. » (Ibid., p. 261)

III.2. Les professeurs du secondaire

Regardons maintenant les réponses des professeurs du secondaire. Elles diffèrent de celles des collégiens puisque la réponse majoritaire (33%) est « Déterminer une valeur (d'une expression) en appliquant un algorithme, certaines règles… ». 28% des professeurs répondent que calculer c'est « Réaliser, effectuer, faire des opérations, une suite d'opérations sur des nombres (des lettres, des objets mathématiques). » 17% précisent que ces opérations sont effectuées en vue d'un résultat, d'une valeur numérique, de résoudre un problème.

Il est à remarquer que la réponse majoritaire trouvée chez les collégiens ne se retrouve pas chez les professeurs. En effet aucun professeur n'écrit que calculer c'est additionner, soustraire, ou faire une addition, une soustraction. Les professeurs ne parlent que d'opérations, terme plus général.

Il est aussi à noter que quatre professeurs précisent qu'il peut s'agir de calcul algébrique, d'expression algébrique ou parlent de calcul sur des lettres [10] alors qu'aucun collégien n'a fait la moindre allusion au calcul littéral. Six d'entre eux parlent de valeur numérique (déterminer une valeur numérique d'une expression, effectuer une suite d'opérations pour arriver à une valeur numérique). Or l'expression « valeur numérique » apparaît dans les programmes de collège, entre

---

[9] Ce mot « cicatrice » qui indique qu'une opération a été réalisée, comme en chirurgie, peut permettre à des élèves de mieux distinguer les notions de nombre et d'opération. Il n'est pas rare d'entendre dans nos classes un élève reprendre un de ses camarades, lorsqu'il parle de multiplication pour 34 × 18 au lieu de nombre ou de produit : « Mais la multiplication est faite, tu ne vois pas la cicatrice ! ».

[10] On constatera que la notion de calcul sur des grandeurs n'a été évoquée ni par les élèves ni par les professeurs.

autres, en lien avec les équations (tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques) ou avec le calcul littéral (calculer la valeurs d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques). L'expression « valeur numérique » est donc manifestement liée au domaine de l'algèbre. En conséquence, on peut raisonnablement affirmer que dix professeurs (56%), font référence plus ou moins explicitement à l'algèbre dans leurs réponses. Pour eux la signification du concept de calcul a évolué, s'est développée.

> « …l'algèbre n'est pas une répétition de l'étude de l'arithmétique mais représente un plan nouveau et supérieur du développement de la pensée mathématique abstraite, laquelle réorganise et élève à un niveau supérieur la pensée arithmétique qui s'est élaborée antérieurement, … » (Ibid. p. 339)

On peut sans doute avancer l'idée que, pour les professeurs, la maîtrise des concepts algébriques a permis une réorganisation à un niveau supérieur de la pensée arithmétique : cette dernière s'est abstraite et généralisée. Le calcul littéral est évoqué, on parle de valeur d'une expression. Le calcul chiffral semble apparaître, pour la plupart, comme un cas particulier du calcul littéral.

III.3. Les professeurs des écoles

La même question posée à des professeurs des écoles donnent des réponses plus variées, même si la réponse « Mettre en relation différents nombres pour résoudre un problème » reste la plus fréquente (40 %). Il nous est donc plus difficile d'analyser ces réponses. Mais la réponse majoritaire suscite un commentaire : elle laisse entendre que pour ces professeurs des écoles, calculer s'apparente à opérer. En effet mettre en relation différents nombres, même dans cette expression vague puisque la relation n'est pas précisée, peut conduire à penser qu'il s'agit ici d'opérer car toute opération sur des nombres est bien une loi de composition interne sur un ensemble de nombres, du moins à l'école primaire ou au collège (à partir du lycée, on peut opérer sur d'autres objets comme les vecteurs, les fonctions, …).

IV. Vers une tentative de « définition »

Cette enquête, succinctement analysée, nous a à la fois permis de mieux évaluer le niveau de développement du concept de calcul chez les élèves et nous a confirmé ce que nous pressentions, à savoir que les traits distinctifs de ce concept n'étaient que peu différenciés chez eux, et qu'ils pensaient le calcul finalement comme un complexe. Or comme l'écrit Vygotski :

> « Le concept dans sa forme naturelle et développée suppose non seulement l'unification et la généralisation des éléments concrets de l'expérience mais encore leur différenciation, leur abstraction et

leur isolement et la capacité d'examiner ces éléments différenciés, abstraits, en dehors de la liaison concrète et empirique dans laquelle ils sont donnés. Sous ce rapport la pensée par complexes s'avère impuissante. Elle est toute entière marquée par une surabondance, une surproduction de liaisons et se distingue par une abstraction faiblement développée. Le processus de différenciation des traits distinctifs y est extrêmement limité. » (Ibid., p. 252)

S'est alors posé à nous le problème de savoir comment favoriser la différenciation et l'abstraction des traits distinctifs du concept de calcul dans notre enseignement. Il nous a semblé nécessaire de repenser en partie l'articulation calcul chiffral / calcul littéral puisque le mot calcul apparaissait dans les deux termes, et qu'il fallait analyser cette articulation non seulement en termes de ruptures ou de différences mais aussi en termes de continuité. Nous nous sommes donc interrogés sur les « traits communs » au calcul chiffral et au calcul littéral et avons tenté de les distinguer. Pour cela, plusieurs auteurs (parmi d'autres) ont particulièrement nourri notre pensée : Vygotski et sa loi d'équivalence des concepts, Frege et ses concepts de sens et de dénotation et Léontiev et sa théorie de l'activité.

Vygotski énonce son principe d'équivalence des concepts comme suit :

« C'est seulement aux stades supérieurs du développement des significations des mots et, par conséquent, des rapports de généralité qu'apparaît un phénomène d'une importance primordiale pour toute notre pensée et déterminé par la loi d'équivalence des concepts. La substance de cette loi est que *tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés.* » (Ibid, p. 385)

Il poursuit en disant qu'un exemple parfait de cette loi d'équivalence des concepts est donné par les concepts de nombres formés au cours de l'étude de l'arithmétique. Par exemple, écrit-il : 1 = 1 000 000 – 999 999 = n + 1 – n, quels que soit l'entier n.

1 peut donc s'écrire d'une infinité de façons comme différence de deux entiers consécutifs. Mais il peut aussi s'écrire comme somme (0,9 + 0,1) comme produit, comme quotient, comme somme d'un quotient et d'un produit … Il peut s'écrire d'une infinité de manières à l'aide des opérations et d'autres nombres. En conséquence, nous pouvons avancer que :

Tout nombre peut s'écrire d'une infinité de manières à l'aide d'autres nombres et des opérations.

Ou en prenant les termes de Frege : tout nombre peut être dénoté d'une infinité de manières à l'aide d'autres nombres et des opérations. 2 + 5 et 10 – 3 dénotent bien le même nombre même si le sens [11] (selon la définition de Frege) de ces deux écritures diffère.

« Or, il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères), outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler sens du signe, où est contenu le mode de donation de l'objet. » (G. Frege, *Sens et dénotation*)

Pour mieux saisir la théorie de l'activité de Léontiev, nous partirons d'un exemple. Soit le problème suivant posé à un élève de sixième : « Sur une étagère en bois de chêne de 80 cm de long, de 30 cm de large et de 2 cm d'épaisseur, on range 26 livres de 2,7 cm d'épaisseur chacun.

[11] Le mot « sens » a une toute autre signification chez Vygotski : le sens d'un mot représente l'ensemble de tous les faits psychologiques que ce mot fait apparaître dans notre conscience.

Peut-on ranger sur cette étagère 3 autres livres de même épaisseur que ceux déjà rangés ? » Supposons que ce problème soit posé en situation de classe à un élève A et lors d'un examen important pour un élève B. Ce que va inciter les deux élèves à se lancer dans la résolution du problème va sans doute différer : pour l'élève B, ce sera la réussite à son examen, pour l'élève A, ce pourra être de montrer à ses camarades qu'il raisonne vite, qu'il est le « meilleur » de la classe en mathématiques. Léontiev nomme ce qui, dans l'activité, fait fonction d'incitation, le motif [12] de l'activité.

Pour résoudre le problème, les deux élèves vont s'engager dans des actions orientées vers un but conscient : il est possible qu'ils dessinent l'étagère, schématisent la situation pour mieux la comprendre, opèrent sur certains nombres, calculent… Mais le but conscient de ces actions possibles ne coïncident pas strictement avec le motif : l'élève B ne calcule pas pour réussir son examen, mais pour exprimer un nombre qui pourrait lui permettre de répondre à la question.

Ces actions possèdent parallèlement un aspect opérationnel déterminé par les conditions concrètes de leur réalisation. Par exemple, l'élève A, pour aller plus vite calculera mentalement, il se contentera de gribouiller un schéma, accaparé par la volonté de répondre le plus rapidement possible à la question par oui ou par non, tandis que l'élève B dessinera avec application, posera les calculs… Léontiev appelle opération « le mode d'exécution d'une action » (Léontiev, 1976).

Il semble très probable que, même si ces deux élèves sont d'un niveau « équivalent », leurs productions écrites différeront quant à la qualité de l'expression, la clarté de la solution, leurs temps de réalisation, etc. ; la prise de conscience des actions et des opérations engagées sera sans doute plus grande chez l'élève B à cause de l'obligation qu'il ressentira de rédiger clairement. Mais pour tous les deux, le calcul, comme l'acte d'opérer sur certains nombres, ont été vécus comme des actions ou des opérations à but conscient (au sens de Léontiev), même si leurs degrés de conscience ont varié.

À la lumière de ces différents éclairages, on peut peut-être tenter une synthèse : tout nombre pouvant s'écrire sous une infinité de formes (loi d'équivalence des concepts), calculer un nombre consiste donc à l'écrire sous une forme souhaitée (une écriture qui dénote le même nombre dans le sens souhaité) et ce, que ce soit en calcul chiffral ou en calcul littéral. Pour cela, on va agir sur la forme du nombre (action ou opération consciente orientée vers un but), à l'aide des propriétés sur les nombres, dans le but de trouver la forme de ce nombre appropriée au problème posé.

Illustrons notre propos : si on demande à un élève de collège de calculer le nombre $A = 7 \times 137 + 7 \times 192$, sans autre précision, il comprend, par habitude, qu'on lui demande d'écrire le même nombre sous une autre forme, plus compacte, excluant tout symbole opératoire (exceptée la barre de fraction dans le calcul chiffral fractionnaire). C'est la plupart du temps la

[12] Certains auteurs préfèrent employer le terme de mobile à la place de motif.

forme qui nécessite le moins de caractères pour écrire le nombre, ce que les élèves appellent le « résultat ». En effet A sous la forme $7 \times 137 + 7 \times 192$ requiert 11 caractères pour être écrit. Le calcul (ou une suite de calculs) va permettre d'écrire le nombre A à l'aide de 4 caractères seulement : 2303. Nous nommerons 2303 la « forme réduite » du nombre A pour la distinguer des autres formes, par analogie avec la forme réduite des polynômes. Mais tout calcul chiffral n'exige pas nécessairement la recherche de la « forme réduite » du nombre : imaginons, en effet, que l'on demande à ce même élève de collège si le nombre A est un multiple de 7. La recherche de la « forme réduite » du nombre A n'est plus judicieuse. Un autre calcul s'impose, c'est d'écrire A sous la forme $7 \times (137 + 192)$ et de conclure. Dans les deux cas, les calculs sont bien des actions qui changent les formes du nombre A, mais ces formes dépendent du problème dans lequel le nombre apparaît.

Prenons maintenant un exemple dans le domaine du calcul littéral. Supposons que l'on propose à un élève de collège de développer l'expression $A(x) = (x + 1)\ (2x - 1) + 4\ (x + 1)$ où x est un nombre réel quelconque. Il va écrire : $A(x) = \ldots = 2x^2 + 5x + 3$. Si maintenant on lui demande de résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $A(x) = 0$. Par calcul, cet élève devra écrire $A(x)$ sous la forme $(x + 1)\ (2x + 3)$, puis résoudra l'équation produit. Là encore, comme dans le cas du calcul chiffral, les calculs sont des actions qui changent les formes du « nombre algébrique »[13] mais dépendantes du problème dans lequel ce nombre apparaît. Que ce soit dans le domaine du calcul chiffral ou dans celui du calcul littéral, calculer un nombre est une action dont le but est de trouver une forme du nombre adaptée au problème dans lequel il intervient.

On peut donc avancer que nous avons réussi à dégager des « traits communs » au calcul chiffral et au calcul littéral, ce qui nous permet de tenter de « définir » le calcul, non pas au sens mathématique (ce que nous serions bien incapables de faire[14]), mais d'en dessiner des contours suffisamment nets pour que l'élève puisse davantage prendre conscience de ce concept de calcul. Tentons cette « définition » :

Calculer un nombre, c'est écrire ce nombre sous une forme adaptée au problème dans lequel il intervient. Si le problème est seulement de calculer un nombre, calculer ce nombre c'est l'écrire sous sa « forme réduite », c'est-à-dire la forme qui nécessite le moins de signes possible pour l'écrire.[15]

V. Prolongements et perspectives

Cette réflexion sur la détermination de traits communs au calcul chiffral et au calcul littéral

---

[13] Nous reprenons l'expression de « nombre algébrique », malgré sa polysémie, définie dans l'article « Séquence d'introduction au calcul littéral » de cette brochure.

[14] La C.R.E.M. elle-même y renonce comme le note M. Artigue dans son article *L'intelligence du calcul*.

[15] Un élève de sixième a résumé à sa façon cette définition : « Alors calculer, c'est mettre le nombre sous la forme qui me plaît ! »

nous a permis de mieux cerner l'articulation entre ces deux calculs. Il a aussi rendu possible l'établissement d'une « définition » opérante du calcul qui puisse s'enseigner en classe pour permettre aux élèves de distinguer nettement le concept de calcul des autres concepts mis en jeu lors d'activités numériques et une meilleure prise de conscience de leurs actions et de leurs opérations (au sens de Léontiev). Ce travail de prise de conscience nous paraît essentiel pour favoriser le développement du concept de calcul[16] lorsqu'on abordera le calcul littéral. Il doit être accompagné d'un travail similaire sur les concepts d'opération, de nombre, d'égalité …, ces concepts étant liés dans un système de concepts. En particulier, il nous semble important que les élèves distinguent au moins deux temps dans l'activité de résolution de problèmes numériques : celui des opérations et celui du calcul. Et ce, pour faciliter la prise de conscience fondamentale entre opérer et calculer.

> « il arrive […] toujours, à quelque niveau que ce soit, et plus ou moins rapidement, un moment où il faut procéder à une élucidation essentielle au sens de tout le complexe numérique : celle de la différence entre une opération et un calcul. » (S. BARUK , *Si 7 = 0*)

C'est pourquoi, nous avons demandé que ces deux temps apparaissent explicitement et soient dégagés dans la rédaction des solutions de problèmes numériques. Nous leur avons prescrit de rédiger leur solution en trois parties : on opère, on calcule, on conclut.

Illustrons par un exemple ce que nous avons pu, entre autres, demander aux élèves de sixième. Considérons l'énoncé suivant : « Un coureur à pied a parcouru 5,5 km depuis le départ d'une course. Il se dit qu'une fois qu'il aura parcouru encore six fois cette distance, il lui restera à parcourir 3,695 km. Sans calcul, écrire la longueur totale de la course ? Calculer la longueur totale de la course. »

L'énoncé distingue bien les deux temps, celui de la détermination de la longueur totale de la course (sans calcul), qui est un temps où l'élève va être amené à opérer sur les nombres ou grandeurs donnés et celui du calcul de cette longueur. Il a aussi permis une discussion qui peut favoriser cette prise de conscience attendue. En effet, la plupart des élèves qui ont résolu le problème ont écrit : « On opère : sans calcul, la longueur totale de la course est $7 \times 5{,}5$ km + $3{,}695$ km (nous passons sous silence ceux qui ont écrit $6 \times 5{,}5$ km + $3{,}695$ km). Or, une question se pose sur le facteur 7 : comment a-t-il été obtenu ? 7 est obtenu par un calcul, $6 + 1 = 7$. Donc on ne peut pas considérer que la proposition $7 \times 5{,}5$ km + $3{,}695$ km a été produite sans calcul : elle en comporte un, puisque 7 n'apparaît pas dans l'énoncé. Cela les a amenés à comprendre que la réponse à cette première question était : « On opère : sans calcul, la longueur totale de la course est $(6 + 1) \times 5{,}5$ km + $3{,}695$ km. » Puis ils ont calculé en écrivant : « $(6 + 1) \times 5{,}5$ km + $3{,}695$ km = $7 \times 5{,}5$ km + $3{,}695$ km = $38{,}5$ km + $3{,}695$ km = $42{,}195$ km. »

Ces notions de nombre, d'opération, de calcul, d'égalité ont été travaillées tout au long de

[16] Rappelons qu'un concept de « plein exercice » est conscient et mobilisable à volonté.

l'année dans des activités diverses qui ne se restreignent pas à des recherches de problèmes numériques [17] . Il nous a semblé que l'ensemble de ce travail a rendu possible pour bon nombre d'élèves une meilleure prise de conscience de ces concepts. De plus, le travail de cinquième sur les enchaînements d'opérations a été facilité par cette approche. Le fait d'avoir eu à écrire durant l'année de sixième des expressions mobilisant plusieurs opérations comme (6 + 1) × 5,5 km + 3,695 km ou 80 cm – 26 × 2,7 cm les a familiarisés avec des expressions numériques que l'on rencontre en cinquième. Ainsi, lorsqu'on a demandé en cinquième la mesure (qui est un nombre) de ces grandeurs, en km ou en cm, ils ont écrit les nombres (6 + 1) × 5,5 + 3,695 ou 80 – 26 × 2,7 et les ont calculés comme ils avaient calculé les grandeurs (6 + 1) × 5,5 km + 3,695 km ou 80 cm – 26 × 2,7 cm, sans même hésiter pour beaucoup. Et ce lien entre grandeurs et mesures a permis de justifier les calculs de ces écritures numériques, sans avoir recours aux « priorités » dites opératoires qui posent tant de problèmes à enseigner [18].

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. (2005), « L'intelligence du calcul », *Le calcul sous toutes ses formes*, Actes de l'Université d'été de Saint-Flour.

BARUK, S. (2004), *Si 7 = 0*, Paris, Odile Jacob.

BEDNARZ, N., RADFORD, L., JANVIER, B., LEPAGE, A. (1992). *Arithmetical and Algebraic Thinking in Problem-Solving*, in W. Geeslin and K. Graham (eds.), Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-16), University of New Hampshire, USA, 1.

BENARD, D. (2002), « Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence », *Repères-IREM*, n° 47.

BOOTH, L. (1985), « Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire », *Petit x*, n°5, IREM de Grenoble.

BOURDIER-SAVIOZ F. (2008), *L'erreur n'est pas une faute*, Paris, L'Harmattan.

BROSSARD, M. (2004), *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.

BRUN, J., CONNE, F., LEMOYNE, G. (1993), « Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre », *RDM*, vol. 13/3, Grenoble, La pensée Sauvage.

---

[17] Ces notions doivent être également travaillées dans des activités théoriques.

[18] Ce point mériterait à lui seul un long développement que cette article ne peut contenir. Il sera abordé dans une prochaine publication.

CHEVALLARD, Y. (1985, 1989, 1990), « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège », *Petit x*, n°5, n° 19, n° 23, IREM de Grenoble.
CLOT, Y. (dir.) (2002), *Avec Vygotski*, Paris, La Dispute.
FREGE, G. (1971), Sens et dénotation, in *Écrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil.
KAHANE, J. P. (dir.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques*, C.R.E.M., Paris, Odile Jacob.
KIERAN, C. (1989), « A perspective on algebraic thinking », Actes de la 13e conférence internationale *Psychology of mathematics education*, 2.
KIERAN, C., BOOKER, G., FILLOY, E., VERGNAUD, G., WHEELER, D., (1990), *Cognitive Processes involved in learning school algebra,* in P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), ICME Studies, Cambridge University Press.
LÉONTIEV, A. (1976), *Le développement du psychisme*, Paris, Éditions Sociales.
LÉONTIEV, A. (2002), Le problème de la conscience. Note sur les thèses principales du rapport de L.S. Vygotski, in *Avec Vigotski*, Paris, La Dispute.
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2006), *Le calcul numérique au collège,* Documents d'accompagnement des programmes de collège.
SCHNEUWLY, B. (2008), *Vygotski, l'école et l'écriture*, Genève, Les cahiers de la section des Sciences de l'Éducation, n° 118.
VYGOTSKI, L.S.(2003), *Conscience, inconscient, émotion*, Paris, La Dispute.
VYGOTSKI, L.S. (1997), *Pensée & langage*, Paris, La Dispute.

SÉQUENCE D'INTRODUCTION AU CALCUL LITTÉRAL

Cette séquence a été présentée à plusieurs enseignants de mathématiques lors de différents stages du plan académique de formation. L'article essaye de répondre aux questions soulevées lors de ces journées de formation.

« The variable is perhaps the most mathematical of all notions; it is certainly also one of the most difficult to understand »
B.Russell, *Principes des mathématiques* (1903)

Généralement, l'algèbre (comprise ici au sens d'algèbre élémentaire) doit jouer un rôle important dans le cursus des collégiens et bien sûr au delà.
Or, toute une littérature (française et surtout étrangère) montre que l'entrée dans l'algèbre pose de grandes difficultés aux élèves. La séquence présentée ci-dessous essaye de proposer quelques pistes pour faciliter l'apprentissage du calcul littéral.

Consciemment ou non, tout enseignement suppose des conceptions sous-jacentes. Afin de rendre plus aisée la lecture de cet article, il nous paraît évident ici d'expliciter les conceptions sur lesquelles reposent l'élaboration de la séquence, en particulier pour saisir le lien entre développement et apprentissage-enseignement, pour nous fondamental.

L'exposé de ces conceptions apporte non seulement des précisions mais également permet de comprendre l'objectif des activités proposées. Pour faciliter la tâche du lecteur, des notes, de nature plutôt théoriques, sont reportées à la fin de l'article. On peut donc lire le texte de manière linéaire et se reporter ensuite sur ces notes.

Les quelques notes de bas de page sont le moyen de relier ces conceptions à des auteurs qui, tout en n'étant pas directement enchâssables dans notre approche, ont des ramifications certaines et autorisent des prolongements fertiles.

L'élaboration de cette séquence repose donc sur quelques idées-forces d'une approche que l'on peut qualifier d'historico-socio-culturelle et dont, pour dire vite, on peut affirmer qu'elle a comme point de départ les travaux de Lev Vygotski, Henri Wallon [A].

- L'idée qu'un concept isolé n'a pas de sens ; que la compréhension d'un concept ne peut se faire qu'en liaison avec d'autres. [B]

  Les travaux du groupe nous ont conduits à réfléchir à l'amont de l'enseignement du calcul littéral, à savoir la construction des nombres, leur lecture, leur écriture, au calcul chiffral [voir article dans cette brochure].

  En particulier s'est imposée la nécessité, avant l'abord de l'algèbre, d'une solide connaissance du *nombre, de ce qu'est le calcul. Il est utile ici de préciser que nous ne considérons pas l'algèbre comme une arithmétique généralisée [nous reviendrons plus loin sur ce point].*

- La formation des concepts [B]
- La pensée par complexe [C]
- La médiation sémiotique et le rôle du professeur comme médiateur [D]
- La Zone de Proche Développement (ZPD) [E]
- L'objectivation [F].

De plus, très souvent, l'introduction à l'algèbre se fait par la résolution de problèmes ***au moyen*** de l'algèbre. Il est certes nécessaire de travailler cet aspect mais en complément il est fondamental de faire travailler ***sur*** l'algèbre (en tant que structure). Nous rejoignons là la manière dont les concepts se forment et deviennent opérants.

Activité 1 - A

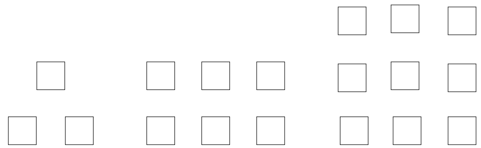


figure 1 figure 2 figure 3

- Combien de carrés comprend au total la figure 5 ? Faire le dessin
- Sans faire de dessin, combien de carrés comprend au total la figure 10 ?
- Combien de carrés comprend au total la figure 144 ?

Activité 1 - B

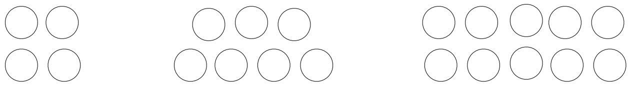


figure 1 figure 2 figure 3

- Combien de cercles comprend au total la figure 6 ?
- Sans faire de dessin, combien de cercles comprend au total la figure 11 ?
- Combien de cercles comprend au total la figure 207 ?

Activité 1 - C

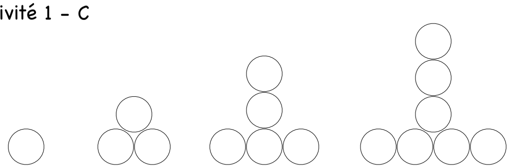
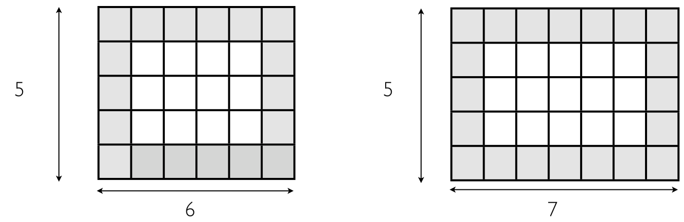


figure 1 figure 2 figure 3 figure 4

- Combien de cercles comprend au total la figure 5 ? Faire un dessin.
- Sans faire de dessin, combien de cercles comprend au total la figure 10 ?
- Combien de cercles comprend au total la figure 207 ?

Activité 2



- On peint toutes les cases en bordure du rectangle. Dans chaque cas, déterminer le nombre de cases peintes.
- Quel est le nombre de cases peintes quand la longueur est 11 ? puis 19 ?

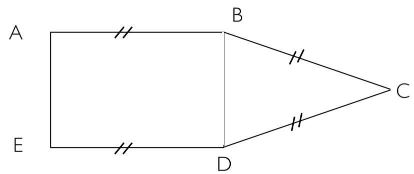
Décrire la méthode.

- Exprimer le nombre de cases peintes pour une longueur quelconque du rectangle. (de manière précise).

Activité 3

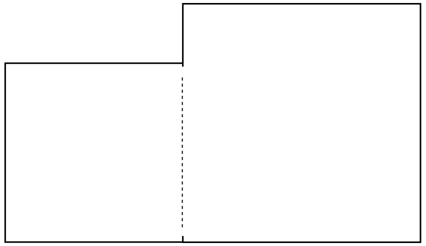
Une unité de longueur étant choisie, on travaille avec les mesures.
On donne un pentagone ABCDE tel que AB=BC=CD=DE et EA = 3.

- Comment exprimer le périmètre de ce pentagone ?
- Que vaut le périmètre quand AB = 11 ?
- Que vaut le périmètre quand AB = 7,2 ?



Activité 4

La figure suivante est composée de deux carrés accolés.
Les mesures des longueurs des côtés des carrés sont deux nombres entiers consécutifs.

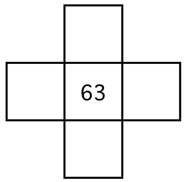


- choisir deux nombres qui conviennent et déterminer la mesure du périmètre
- comment exprimer le périmètre dans tous les cas possibles ?

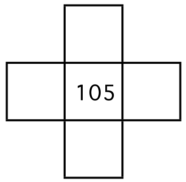
Activité 5 « Table de multiplication ou de Pythagore »

x	1	2			5	
1						
2		4			10	
3				12	15	18
4					20	

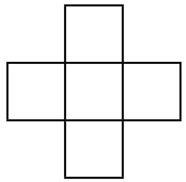
- Comparer 10 +15 +20 et 12 +15 +18
- Compléter **sans faire de calcul**



ligne 7 ; colonne 9

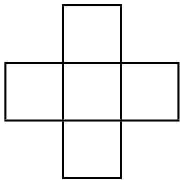


ligne 7 ; colonne 15

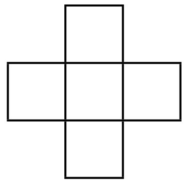


ligne 7; colonne 23

- Compléter



ligne 7 ; colonne a



ligne n ; colonne 5

• À quel moment de la progression annuelle ?

Comme indiqué ci-dessus, un certain nombre de pré-requis sont nécessaires. Dans la progression annuelle cette séquence a été réalisée en janvier-février faisant ainsi suite à des activités sur «nombres - opérations - calculs» depuis le mois de septembre, mais également à un travail important sur la proportionnalité et les grandeurs mesurables. La proportionnalité parce qu'elle donne à voir l'idée de relation, relation entre deux grandeurs mesurables ou deux suites numériques. La notion de relation permettant un travail complémentaire sur l'égalité (en particulier la réflexivité) [B].

• Quelles modalités et pourquoi ?

Les deux premières activités ont été données dans le cadre d'un travail de groupe (groupes de 3 ou 4 élèves). Pour clarifier immédiatement notre position il est évident qu'on ne doit pas attendre de ce travail de groupe le fait que les élèves «re-inventent» seuls les notions qui sont les objectifs de cet apprentissage. Notre démarche ne s'inscrit pas dans la lignée du constructivisme piagétien ni du behaviourisme [C].

Dans notre approche, le travail de groupe a comme objectif d'amener les élèves à co-élaborer un certain nombre de significations partagées par la nécessité imposée de rédiger le plus clairement possible les réponses. Cela avec l'aide du professeur qui doit donc être vu comme un «médiateur sémiotique» et qui par son passage, les questions qu'il pose, oriente l'évolution des « signes » [1] utilisés dans le groupe de « sens individuels » vers une signification partagée, de plus en plus scientifique et culturelle. On englobera dans une définition étendue de « signes » toutes les ressources mobilisées par les élèves pour répondre : mots - gestes - regards - schémas … oral et écrit …

On profite ainsi de la perméabilité entre perception, action et connaissances et en retour les actions en train de se faire augmentent cette perméabilité.

Dans le groupe, les élèves vont agir en parlant, en « gesticulant », en écrivant, en dessinant, en mobilisant des objets mathématiques. Ils accomplissent une succession d'actions qui prennent une signification commune. Pour reprendre J. Bruner nous avons à faire à une « construction contextuelle et culturelle » des significations. On retrouve ici la pertinence de L.Vygotski quant à ses écrits sur le caractère particulièrement médiateur d'objets ainsi construits.

Cette construction commune résulte d'expériences différenciées des co-auteurs que sont les élèves et de cette différence [2] initiale naît la valeur de ce qui est élaboré, étant entendu que seule cette

---

[1] « Un signe […] est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. » C. S .Peirce.

[2] « La verbalisation est une activité qui change les différences en valeurs » M. Bakhtine.

différence ne suffit pas à l'appropriation du concept visé.

Le travail collaboratif au sein du groupe va créé ce que nous appelons une « ZPD du groupe » (par expansion de la notion de ZPD décrite par Vygotski) que l'enseignant va mettre à profit lors de ses interventions pour hisser les élèves à un niveau supérieur de compréhension des notions visées.

On peut dire que la ZPD du groupe est «supérieure» à la somme des ZPD de chacun des élèves du fait des échanges, des productions partagées… Le rôle du langage[3] est ici particulièrement prégnant (comme communication et comme formation de la pensée : les deux fonctions distinctes mais inséparables du langage comme l'a mis en évidence L.Vygotski) : chaque nouvelle intervention d'un élève provoque une modification sur les autres et l'écho[4] entraîne une réorganisation de son système antérieur de connaissances (idem pour tous les membres du groupe).

Cette nouvelle organisation individuelle demande à se «cristalliser» pour devenir connaissance transmissible aux autres. Elle doit prendre une forme qui peut être signifiante pour les autres. Demander aux élèves de récapituler, de synthétiser les faits, d'écrire des remarques sont autant de moyens de faire prendre conscience, de faire se mobiliser les processus mentaux supérieurs.

À ce moment-là, l'écriture littérale d'un nombre n'est toujours pas introduite. En quelque sorte, les mots et les phrases utilisés sont une forme en devenir, et donc en cours de maturation, du langage symbolique des mathématiques ; « l'ensemble sémiotique instanciel » (l'ensemble des signes évoquées plus haut) contient en germe la langue officielle du calcul littéral. À partir de la formulation nécessairement imprécise et floue du départ les interventions de l'enseignant conduisent progressivement les élèves à une rédaction plus précise, plus rigoureuse, à la nécessité ressentie d'une formulation efficace.

Pour le professeur, il existe également un deuxième intérêt à ce travail de groupe et à l'analyse de sa ZPD, c'est de diagnostiquer au plus près les «connaissances» à cet instant des élèves et d'adapter les interventions.

Après le premier travail en groupe, par la mise en commun au niveau du groupe-classe s'opère un changement de facteur d'échelle. On retrouve le rôle de «médiateur» de l'enseignant à ceci près que les fonctions psychologiques des élèves ont évolué. La mise en commun va agir comme une « montée en généralité » plus grande par confrontation/fusion des « objets » produits par chacun des groupes.

---

[3] « La merveille du langage est qu'il se fait oublier : je suis des yeux les lignes sur le papier, à partir du moment où je suis pris par ce qu'elles signifient, je ne les vois plus…… l'expression s'efface devant l'exprimé, c'est pourquoi son rôle médiateur peut passer inaperçu. » M. Merleau-Ponty, *La perception phénoménologique*.

[4] « Quand l'élan spirituel se fraie un chemin par les lèvres, son effet revient frapper l'oreille. La représentation est par là transposée en une véritable objectivité sans être soustraite par cela à la subjectivité. Cela seul le langage le peut : sans cette transposition continue en une objectivité qui revient au sujet (même pendant le silence), la formation d'un concept et donc toute vraie pensée est impossible ». W. Humbolt, cité par I. Meyerson.

• À partir de quel «matériau» mathématique ?

Les deux premières activités portent sur les nombres entiers naturels. Plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, en classe de cinquième, l'ensemble des entiers naturels est certainement celui qui est le mieux maîtrisé tant au niveau de la connaissance du nombre que de celle des propriétés des opérations.

Ensuite, avec ces nombres, il est très facile de construire des «motifs figuraux» comme ceux utilisés et le passage (réversible) du figural au numéral semble assez simple.

Ces situations associant figural / numéral ou géométrique / numéral permettent aux élèves de « garder du sens » à partir de leurs connaissances antérieures (quotidiennes, mathématiques…), de démarrer une réflexion et d'émettre des réponses (quelquefois partielles) en gardant comme appui sécurisant ces connaissances antérieures sur lesquelles ils peuvent faire retour. Ces appuis garantissent une certaine confiance chez l'élève qui peut commencer ainsi à analyser sa production et distinguer le particulier du général. On est là dans une dimension affective, non négligeable dans l'enseignement.

En s'appuyant sur le concept de conversion de R.Duval, on peut dire qu'il est aisé pour les élèves de construire, schématiser les figures manquantes ou celles qui vont servir au cours de l'activité pour tester, s'assurer de la pertinence des réponses proposées.

Par ailleurs, il est plus facile de contrer une certaine habitude des élèves de ne percevoir dans un cadre arithmétique que l'aspect calculatoire, qui consiste à ne fournir uniquement et systématiquement qu'un résultat sous «forme réduite», par une focalisation sur l'aspect relationnel, nécessitant l'attention volontaire sur les opérations en jeu et favorisant le faire/défaire un nombre [tricotage / détricotage] : - faire accepter que la réponse soit 2 x 5 - 1 plutôt que la forme réduite 9.

[2 x 5 - 1, suivi de 2 x 6 - 1, 2 x 7 - 1 donnant plus à voir dans ce cas que 9 ; 11, 13]

- mettre en avant la nécessité du travail sur l'équivalence de deux expressions d'un nombre basé sur les propriétés (ainsi mises en avant de manière plus explicite [5 + 5 -1 ou comme la somme de 5 et de la différence de 5 et de 1 ou comme la différence du double de 5 et de 1]
- insister sur le renforcement de la signification du «=» en un sens plus algébrique que « faire ».

Ce « faire », qui dans l'expression très souvent formulée « 8 plus 2 fait 10 » introduit subrepticement l'idée de temps, passé et présent, entraîne pour l'élève l'oubli de ce passé et donc de la compréhension de ce 10 comme d'une somme et donc de l'équivalence si souvent fertile en mathématiques.

C'est aussi l'occasion de mettre en évidence une des connaissances opérantes en mathématiques, trop souvent implicite, qui est celle consistant à changer de point de vue.

Une même demande faite à partir de nombres autres qu'entiers serait plus fastidieuse, moins directe et masquerait très certainement le fil conducteur de l'activité qui est de faire émerger des relations.

La troisième activité doit permettre d'élargir la réflexion aux autres ensembles de nombres, de ne pas laisser croire que l'on ne peut travailler qu'avec les nombres entiers (de passer en quelque sorte du discret au continu), de poursuivre l'analyse dans un énoncé entre «ce qui varie» et «ce qui ne varie pas», de lier géométrique et algébrique (il peut être demandé aux élèves des constructions de différentes configurations de la figure soit manuelles, soit assistées par un logiciel de géométrie dynamique).

Elle a été proposée en classe entière et a également servi pour évaluer les conséquences de la réflexion sur les deux premières activités.

• Quelques commentaires …

Cette séquence, à quelques petites modifications près, a été proposée depuis quatre ans à des élèves et cela correspond en tout à huit classes soit deux cents élèves environ. Les commentaires regroupent les remarques et observations sur ces élèves.

Dans l'activité 1-A, la relation en jeu est une relation de proportionnalité. Cette situation se place délibérément dans le prolongement du travail sur la proportionnalité fait antérieurement et permet certainement une meilleure entrée dans l'activité pour les élèves dont beaucoup d'entre eux se sont retrouvés en terrain connu.

Par ailleurs, 1-A et 1-B sont complémentaires en ce sens que plusieurs groupes ont remarqué qu'il y avait un «écart», un «décalage» de 1 entre le nombre de carrés et le nombre de cercles. Cette proximité renforce la motivation pour aller plus loin.

Lors de la première mise en place de cette séquence avec une classe l'activité 1-A n'était pas proposée et il semble que les productions de réponse ont mis plus de temps à éclore.

La situation 1-C complète la série. Bien que son énoncé reprenne le même modèle que les deux autres, son rôle est différent (en tout cas dans l'intention au moment de l'élaboration de la séquence). Elle est destinée à tester «le niveau de solidité» à cet instant des nouvelles connaissances / compétences en cours de formation. La réaction des élèves est instructive. Son analyse permet à l'enseignant de savoir avec quels élèves il faut insister pour que l'idée de relation devienne première.

Les différentes manières de verbaliser la relation apparaissent plus vite ; dans un même groupe, plusieurs points de vue sont exprimés. Tout cela fournit un terreau fertile pour les interventions de l'enseignant.

Dans la suite, nous présenterons quelques travaux d'élèves relevés en classe dont certains font apparaître des manières de répondre relativement riches et non anticipées par l'enseignant.

La disposition des carrés ou des cercles a aussi un effet sur la réflexion des élèves : des questions émergent sur son importance ou non pour dessiner les figures manquantes ; elle permet également à l'enseignant d'évaluer ce qui est perçu comme important, ce qui pour lui est «l'objet» du problème et éventuellement de recentrer le questionnement (par exemple pour cet élève qui ne percevait dans l'arrangement des cercles qu'un T renversé et ne lisait pas du tout le nombre de cercles). Ce fait est fondamental parce qu'il souligne toute l'attention à porter au lien entre perception, lecture, lecture en contexte et représentation. Autrement dit le travail en cours n'est pas uniquement disciplinaire et contribue à développer des compétences plus générales mais cet aspect n'est pas l'objet de cet article[5].

Au cours du travail des élèves, le professeur intervient soit pour faire préciser des éléments de réponse, soit pour des questions supplémentaires.

Un exemple : Dans le 1-B, quel est le numéro de la figure dont le nombre de cercles est 3052 ? À ce moment-là, tous les élèves ont perçu que pour passer d'une figure à la suivante, il suffisait d'ajouter 3. Avec l'aide de l'enseignant, ils sont également arrivés à écrire que «le nombre de cercles d'une figure est la somme du triple du numéro de la figure et de 1» (il existe plusieurs formulations de cette relation entre les groupes; la mise en commun portera justement sur leur analyse d'un point de vue de la mobilité langagière). À partir de là, comment répondre à la question ? Enlever 3 pour arriver à une figure dont le numéro est connu parait fastidieux… Idem en ajoutant 3 à partir du début… Le « détricotage » de la relation verbale obtenue s'est imposée peu à peu aux élèves mais sa réalisation a soulevé quelques difficultés qui ont nécessité une réflexion plus approfondie sur la signification de cette relation et des nombres en jeu au travers de leur écriture. [Cette partie nous confirme dans le fait que l'introduction à l'algèbre se prépare le plus tôt possible, dès l'abord de l'arithmétique].

Toute la réflexion se fait essentiellement au moyen de la langue naturelle; l'écriture du « détricotage » prend du temps… [On est déjà dans une phase de résolution d'équation sans que ce terme apparaisse]. Un manque apparaît assez rapidement dans le discours des élèves : comment appeler / désigner ce nombre ? Cette phase est intermédiaire entre « écriture chiffrale » et « écriture littérale ».

Se met également en place, conceptuellement parlant, la notion de « **propriétés universelles** », c'est à dire que la relation / propriété est vraie pour tous les nombres en jeu, ici les numéros des figures. Encore une fois, médiation par le langage. L'enseignant fait oraliser et écrire des phrases du type « quel que soit **le numéro**… ». Ce nombre englobe en quelque sorte **tous** les autres. Cette phase de généralisation est très importante puisqu'elle oblige à penser le nombre autrement

[5] « La pensée abstraite de l'enfant se forme lors de toutes les leçons et son développement ne se décompose nullement en processus séparés correspondant aux différentes matières entre lesquelles se répartit l'apprentissage scolaire »
(L. Vygotski, *Pensée & langage*, page 349)

qu'arithmétiquement, une nouvelle façon de catégoriser le nombre devenant nécessaire.

Comme chaque fois que l'élève a rencontré une nouvelle catégorie de nombre (décimal, fraction…) il a été nécessaire d'établir **un système d'écriture** : on va étendre ce principe à ce « nouveau nombre »[6] avec l'écriture littérale.

Ce nouvel objet en train de se construire est à cheval sur l'instant de sa création : il s'enracine dans son passé et s'oriente vers son futur et les potentialités de ce « nouveau nombre »[7], libéré du chiffre : nombre générique, variable, inconnue, paramètre…

Un autre objet voit, lui, s'élargir son potentiel de sens : l'égalité. Le travail de détricotage entrepris aura comme prolongement possible, en passant par l'objet « équation », la création de nouveaux nombres : les nombres négatifs[8].

Dans le cas de démonstrations futures que rencontreront les élèves, le passage par «l'exemple générique» permettra l'établissement d'une preuve rigoureuse. Insister sur la véracité de la relation pour n'importe quel nombre prépare l'élève aux nombreuses situations qu'il va rencontrer où il ne devra pas singulariser un cas plus qu'un autre… sauf quand il s'agira justement de trouver un (des) nombre(s) particulier(s)… au moyen du traitement d'une équation.

Du point de vue de la formation des concepts, l'exploration de relations entre quantités (par dépassement du seul comptage ou calcul, autrement dit de leurs connaissances antérieures, elle oblige à les percevoir de manière tout à fait nouvelle) favorise une approche plus théorique et donc le développement d'une « pensée abstraite ».

Le travail de comparaison des différentes configurations d'une même situation conduit les élèves, pour convaincre ses partenaires par exemple, à formuler une phrase prenant en compte la totalité des configurations, cette dernière s'instituant en relation.
Avec 3052 cercles, la « représentation algébrique » en train de se cristalliser est appliquée dans ce cas pour lequel une vérification empirique est trop coûteuse.

En fonction des classes des questions annexes se font jour. Par exemple, « la différence du double d'un nombre et de un » et «la somme d'un nombre et de la différence de ce nombre avec un» sont-ils le même nombre ? Ce type de question, en focalisant sur la structure d'un nombre non calculable « chiffralement », concourt au développement de l'attention volontaire et donc globalement des fonctions psychiques supérieures.

L'activité 2 est donnée en travail de groupe avec une demande supplémentaire : proposer au

[6] «L'objet conduit au signe.» (I. Meyerson, *Les fonctions psychologiques et les œuvres*)

[7] L'algèbre n'est pas une arithmétique généralisée : ce « nouveau nombre » que l'on pourrait appeler « nombre algébrique » malgré sa polysémie, oblige à penser différemment, du fait justement de ses potentialités dont ne dispose pas le « nombre arithmétique ».

[8] « La limitation opposée à l'accomplissement des opérations indirectes (soustraction et division) est chaque fois devenue la cause véritable d'un acte nouveau de création : ainsi ont été créés par l'esprit humain les nombres négatifs et les nombres fractionnaires. » R. Dedekind

moins deux manières d'exprimer le nombre de cases peintes en fonction du nombre de cases sur la longueur. Le passage de l'enseignant dans les groupes consiste à s'assurer que l'énoncé est bien lu et que la nouvelle demande est bien prise en compte.

Les élèves ne disposent toujours pas de l'écriture littérale à ce moment de la séquence.

La deuxième question continue d'interpeller les élèves. Quelques exemples d'échanges :

> « on ne peut pas savoir puisqu'on ne connaît pas le nombre de cases » - « que veut dire quelconque ? » - « si la longueur est de 14… combien de cases ? » « il n'y a qu'à compter » « oui, mais si c'est 32 ? » « … et si c'est 3000… ? » - « la largeur reste pareil… » - « on ne connaît pas l'autre nombre » - « on pourrait prendre 11 par exemple » (On reconnaît là un cas d'exemple générique - par un effet de type métonymie, qu'il est relativement fréquent de trouver en classe tant que les élèves n'ont pas atteint un degré de généralisation suffisant au niveau du calcul algébrique).

Il est nécessaire dans chaque groupe d'amener les participants à verbaliser correctement l'énoncé des relations trouvées pour lesquelles les élèves ont fait preuve d'imagination (quelquefois jusqu'à six manières de décrire le nombre de cases peintes en sus du comptage). Comme l'écriture en français n'est pas des plus simple, on voit se produire un travail sur la structure des nombres en jeu (le produit de la somme de…, la somme du produit de…) et l'apparition d'abréviations pour nombre de cases sur la longueur, nombre de cases sur la largeur… (une forme «d'algèbre syncopée» comme on en trouve dans l'histoire de l'évolution de l'algèbre [algèbre de Diophante], germe de notre écriture littérale).

La mise en commun est un moment important : chaque groupe va présenter les différentes manières qu'ils ont définies. Chaque élève-récepteur doit alors faire l'effort d'attention et de compréhension de la phrase énoncée; des débats nourris se produisent alors. C'est le moment où l'enseignant indique que l'on va recenser toutes les propositions dans un tableau récapitulatif mais en reprenant des écritures mathématiques comme ci-dessous. Par contre, à chaque fois, l'élève aura à lire «correctement» la relation et à l'expliciter éventuellement à ses camarades.

manières de « lire » le problème	pour nombre de cases sur la longueur = 6	pour nombre de cases sur la longueur = 7	pour nombre de cases sur la longueur = …
[1] par comptage	18	20	
[2]	$nbre\ \ cases = 6\times5-4\times3$	$nbre\ \ cases = 7\times5-5\times3$	
[3]	$nbre\ \ cases = (6+5)\times2-4$	$nbre\ \ cases = (7+5)\times2-4$	
[4]	$nbre\ \ case = 6\times2+3\times2$	$nbre\ \ case = 7\times2+3\times2$	
[5]	$nbre\ \ case = 6\times2+5\times2-4$	$nbre\ \ case = 7\times2+5\times2-4$	
[6]	$nbre\ \ case = 6\times5-12$	$nbre\ \ case = 7\times5-15$	

Les écritures sont analysées, commentées… des rapprochements se font.

Par exemple entre les écritures [2] et [6] : 4 x 3 est-il «plus parlant» que 12, en particulier si l'on veut compléter le tableau dans la dernière colonne pour un nombre de cases de 34 ?

Autre remarque qui est apparue : le premier terme de la différence des écritures dans les variantes [3] et [5] est logiquement le même nombre (ce raisonnement peut se mener assez facilement)… l'idée de distributivité n'est pas loin.

Les échanges autour de ce tableau sont différents dans chaque classe en fonction des différentes manières trouvées, les détours ne sont pas les mêmes mais globalement les remarques convergent à la fin.

À ce stade, l'écriture littérale est introduite à partir de la discussion avec les élèves : comment donner une écriture à un nombre qui n'a pas de « valeur chiffrale » fixe tout en permettant des calculs comme en calcul chiffral ?

Les élèves sont ensuite invités à ré-écrire toutes les relations formulées «en langue naturelle» avec cette nouvelle écriture. Il est fondamental à ce niveau de faire discuter de l'apport de cette écriture en terme d'économie de moyens (facilité d'écriture, de lecture possibles) et de commencer de « petits » calculs littéraux.

En revenant à l'activité 2, en ajoutant un autre cas, celui où le rectangle a n cases sur sa longueur et en comparant l'ensemble du tableau, on fait continuer l'effort de focalisation sur la structure des nombres, ligne par ligne par exemple.

Comme prolongement, il est demandé aux élèves de reprendre sous forme d'expression littérale toutes les relations écrites dans l'activité 1.

La troisième activité doit permettre d'élargir la réflexion aux autres ensembles de nombres, de ne pas laisser croire que l'on ne peut travailler qu'avec les nombres entiers, de lier géométrique et algébrique, de passer du discret au continu, de poursuivre l'effort de distinction entre «ce qui varie» et «ce qui ne varie pas». Un complément possible est la construction manuelle de différentes configurations de la figure ou l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour «étirer» la figure.

Maintenant que le système d'écriture littérale commence à être utilisable par les élèves, il semble pertinent de faire mener une réflexion sur la relation « signe » et « objet » représenté. Autrement dit que la forme que l'on donne au signe n'est pas autonome par rapport à la signification de l'objet. C'est à cela qu'est destinée l'activité 4.

L'objectif est de faire analyser et comparer l'écriture littérale donnant la mesure du périmètre de la figure à partir de la mesure de la longueur du côté du petit carré et celle à partir de la mesure de la longueur du côté du grand carré.

L'enseignant va amener les élèves à écrire ces deux égalités en nommant P la mesure du périmètre et *a* la mesure de la longueur du côté, pour arriver à les mettre côte à côte.

On obtient donc

$$P = 6 \times a + 4$$

$$P = 6 \times a - 2$$

qui semble révéler une contradiction.

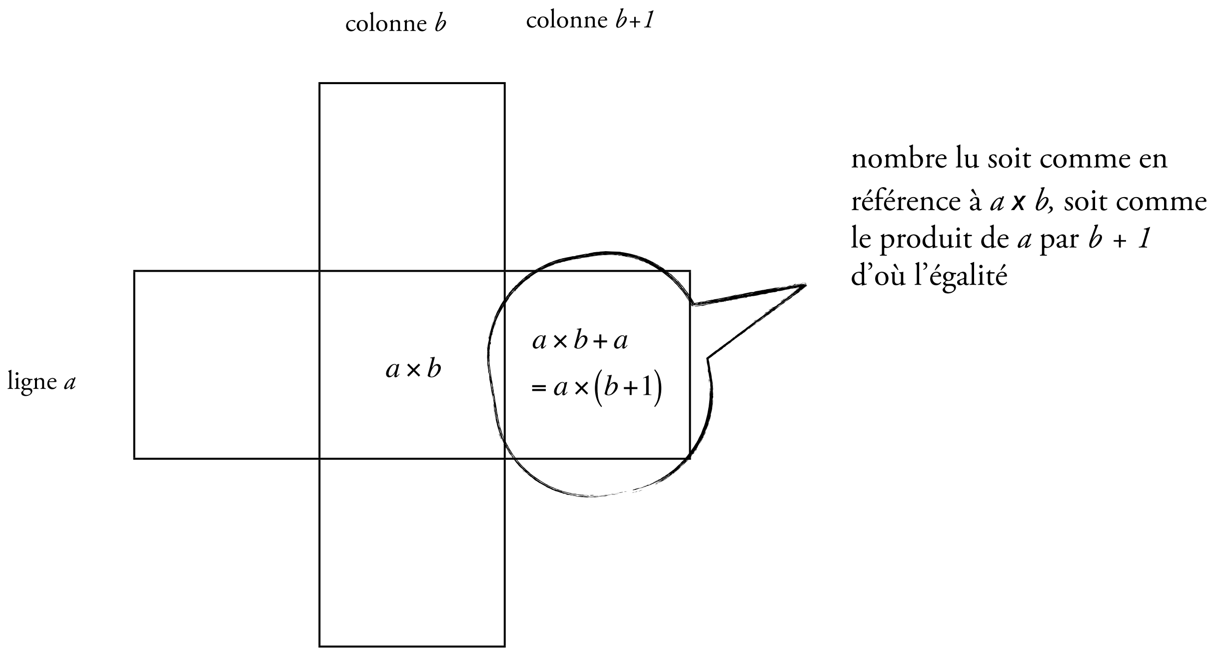
On peut à cet instant demander s'il est possible de s'assurer de la vérité de ces deux égalités. C'est à dire que dans le premier cas la mesure du périmètre est bien supérieure de 4 unités à ce que serait la mesure du périmètre de deux petits carrés accolés et dans le second cas que la la mesure du périmètre est bien inférieure de deux unités à ce que serait la mesure du périmètre de deux grands carrés accolés. Retour au géométrique avec manipulation de segments au tableau qui arrive à convaincre les élèves.

La place est maintenant laissée sur la lecture de ces deux égalités et il ressort très vite qu'il est incontournable pour ce type d'écriture de bien préciser ce qu'est le nombre *a*.

Dans l'activité 5, en imposant aux élèves de travailler « sans calcul », notre intention était de faire manipuler les nombres, au départ en écriture « chiffrale », de manière plus algébrique en travaillant sur l'aspect structural et la décomposition. Une comparaison identique à celle demandée pour la première égalité va être menée dans chacun des cas suivants et va provoquer l'utilisation du calcul littéral.

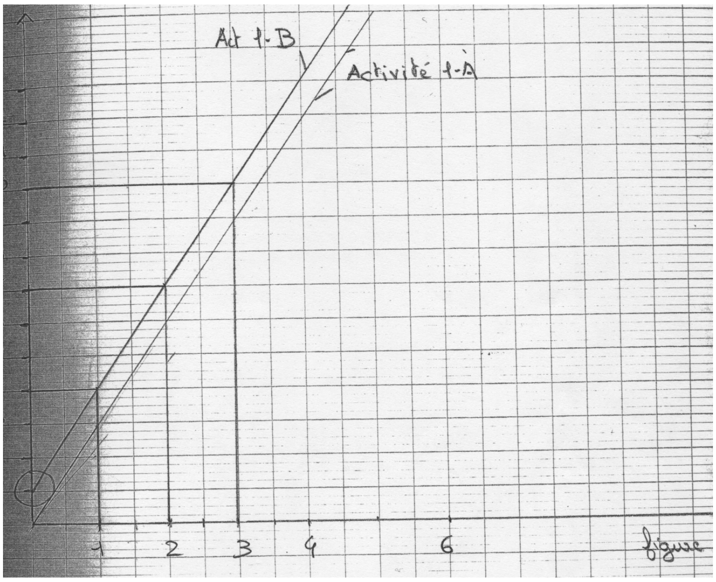
Il semble ici particulièrement intéressant de faire « lire » chaque nombre à l'intérieur d'une croix de différentes manières

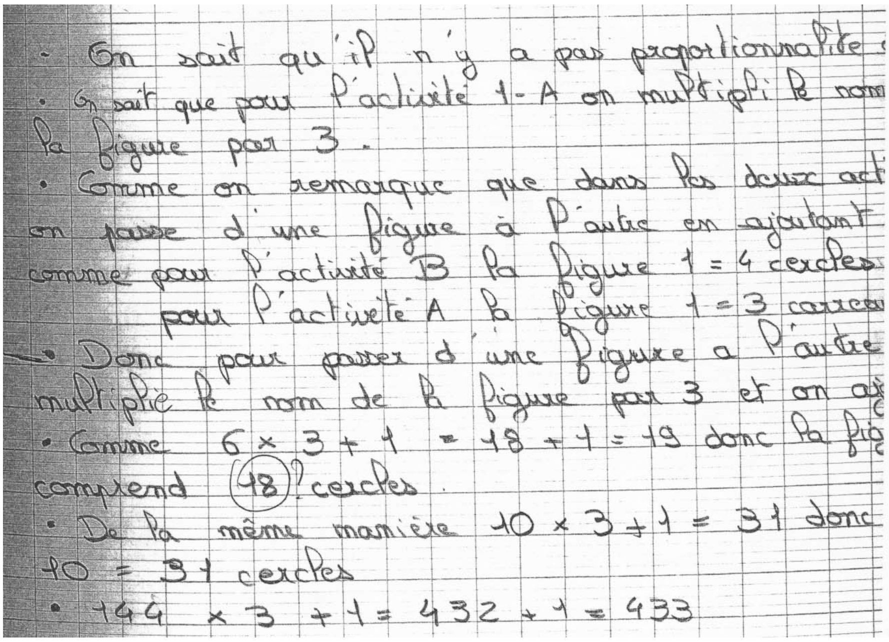
À partir de l'exemple ci-contre, qui concerne le cas « le plus général », on peut faire effectuer plusieurs calculs littéraux et faire accéder aux propriétés des nombres et des opérations.



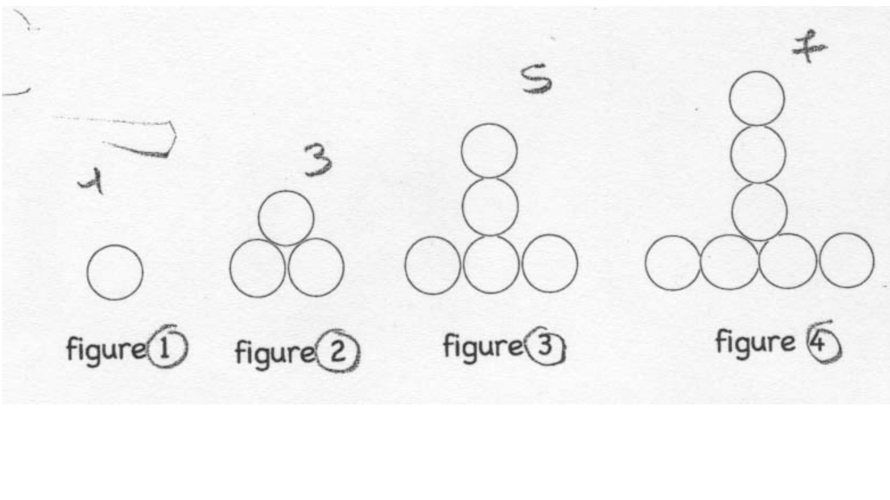
- **Quelques travaux d'élèves …**

Activité 1



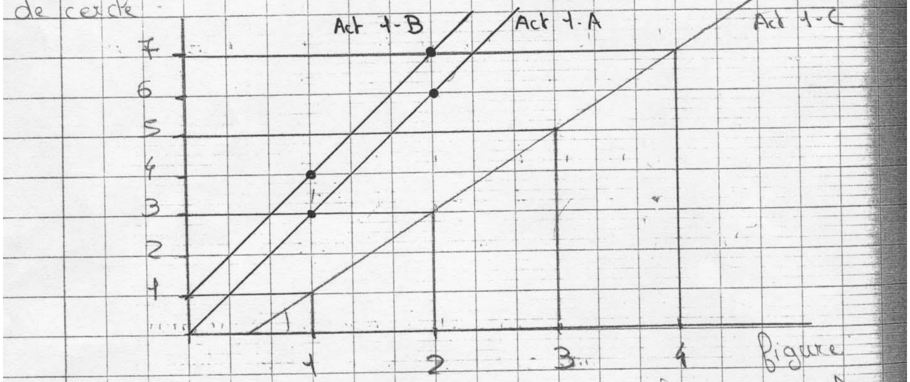


• On sait qu'il n'y a pas proportionnalité
• On sait que pour l'activité 1-A on multipli le nom
la figure par 3.
• Comme on remarque que dans les deux acti
on passe d'une figure à l'autre en ajoutant
comme pour l'activité B la figure 1 = 4 cercles
pour l'activité A la figure 1 = 3 carreau
• Donc pour passer d'une figure a l'autre
multiplie le nom de la figure par 3 et on a
• Comme 6 × 3 + 1 = 18 + 1 = 19 donc la fig
comprend 18 ? cercles
• De la même manière 10 × 3 + 1 = 31 donc
10 = 31 cercles
• 144 × 3 + 1 = 432 + 1 = 433



• Il y a pas proportionnalité

• Pour passer d'une figure a l'autre on ajout de cercle



• La figure 5 comprend 7 + 2 = 9 cercles

• La figure 10 comprend 9 + 2 × 5 = 19 cercles
10 - 5 = 5

• La figure 207 comprend 207 - 10 = 197
19 + 2 × 197 = 413

• On ne peut pas savoir car les figures 1, 2, et 3 ne sont pas proportionnelles entre elles.
10 et 7 ne sont pas des multiples de 4.

• Vu que le numéro de la figure et le nombre de cercle ne sont pas proportionnelles ont ne peut pas trouver le résultat, le nombre de cercles pour les figures.
On peut seulement faire la proportionnalité ~~sur~~ entre une figure et une autre.

• La figure 6 comprend 19 cercles au total (4+3=7 ; 7+3= 10 .....) Il y a 3 cercles de différence entre les figures.

• La figure 10 comprend 30 cercles au total.

~~• La figure 144 comprend cercles au total~~

• Pour trouver le nombre de cercles total pour la figure 144, il faut mettre en place une relation : num. de la f. ×3+1
donc (144 ×3)+1 = 420 + 1 = 421.

• Le nombre de cercle = 3× le num. de la f. +1.

Activité 1

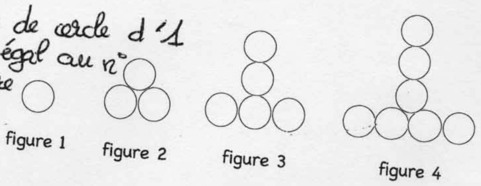
1: 1+ (2x0) = 1   1x2 -1
2: 1+ (2x1) = 3   2x2-1
3: 1+ (2x2) = 5   3x2-1
4: 1+ (2x3) = 7   4x2 -1
5: 1+ (2x4) = 9   5x2-1
10: 1+ (2x9) = 19   10x2-1
207: 1+ (2x206) = 413   207x2-1

- le nombre de cercle pour la figure 5 est de 1+ (2x4) so
  9 cercles
- le nombre de cercle pour la figure 10 est de 1+ (2x9) soit 19 cercles
- le nombre de cercle pour la figure 207 est de 1+ (2x206) soit 413 cercles

le nombre de cercles est 1+ 2 x (la figure -1)

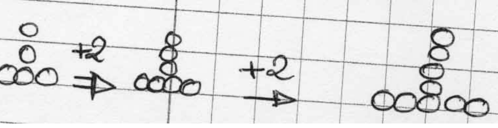
Activité 1 – C

* GRAPHIQUE   le nombre de cercle d'1 figure est égal au n° de la figure x2 -1



- Combien de cercles comprend au total la figure 5 ? Faire un dessin.
- Sans faire de dessin, combien de cercles comprend au total la figure 10 ?
- Combien de cercles comprend au total la figure 207 ?

- La figure 5 contient 9 cercles.
  Le nombre de cercles dans la figure 5 est de 9 cercles.



Activité 2

Il n'y a pas proportionnalité entre la longueur et le nbr de cases peintes car on ne peut pas passer de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant

$$+1\left(\begin{array}{ccc} 6 & \longrightarrow & 18 \\ 7 & \longrightarrow & 20 \end{array}\right)+2$$

Il y a une relation entre la longueur et le nbr de cases peintes :

{longueur x2} +6 = nbr de cases peintes

Le nbr de cases peintes est égal au double de la longueur et en ~~ajoutant~~ ajoutant 6

Le nbr de cases peintes est 28 pour la figure 11.

11x2+6=28

" " " " " " 44 " " " 19.

19 x2 +6=44

(longueur x2 + largeur x2) −4 = périmètre.

• (5x2) + (6x2) − 4 = 10 + 12 − 4 = 22 − 4 = 18

Pour le 1er cas le nombre de cases est 18

(5x2) + (7x2) − 4 = 10 + 14 − 4 = 24 − 4 = 20

Pour le 2e cas le nombre de cases est 20

• (5x2) + (11x2) − 4 = 10 + 22 − 4 = 32 − 4 = 28

(5x2) + (19x2) − 4 = 10 + 38 − 4 = 48 − 4 = 44

→ le nombre de cases pour la figure 11 est 28 et pour 19 : 44

méthode = largeur x2 + longueur x2 − les 4 angles.

• (5 x 2) + (28 x 2) − 4 = 10 + 56 − 4 = 66 − 4 = 62

(l x 2) + (L x 2)

Si la longueur est 28 le nombre de cases peintes est 62.

⑥ Le nombre de case peinte est 22 car : on aditionne 5 et on fait le produit onze par deux = vingt-deux.

⑦ Le nombre de case peintes est : ~~WI~~ la somme de 19 par 2 et de produit de quarante - quatre

⑧ longueur = 8 . Le nombre cases peintes est : vingt et un car la somme de cinq et de six puis le puis le produit de 9 par égal à dix-huit

Le nombre de case ~~est~~ sur la longueur ×2 + nombre longueur −2 tous ×2

Le nombre de cases peinte est égal à la différence du prod
du nombre de cases sur la longueur par le nombre de cases
la largeur et du produit de la différence du nombre de
sur la longueur et de 2 par la différence du nombre
cases sur la largeur et de 2. [1]

Le nombre de cases peinte est égal à la différence de
somme du produit du nombre de cases de la long
par deux(2) et du produit du nombre de cases de
largeur par 2 et de 4. 2

le nombre de case peinte est égal à la différence du p
de somme du nombre de case sur la longueur et
nombre de case sur la largeur par 2 et de 4. ?

le nombre de case peinte est égal au produit de la
différence de somme du nombre de cases de la l

• Le nombre de cases peintes est égal à la somme du produit de cases sur la longueur par 2 et du nombre de cases sur la largeur par 2, à la quelle on enlève 4. [1]

• Le nombre de cases peintes est égal à la différence du produit du NC longueur par NC largeur et du produit du NC longueur moins 2 par 3. [2]

• Le nombre de cases peintes est égal à la différence du produit de la somme du NC longueur et du NC largeur par 2 et de 4. [3]

1) Le nombre de case peinte en bordure du rectangle est de 18

1er cas Le nombre de case peinte.

$5 \times 2 = 10 + 6 \times 2 = 22 - 4 = 18$ cases peintes.

Le nombre 2 vient que à chaque extrémité il y a le même
cases peintes. Le nombre 4 vient que si on fait pas moin 4 on compte
les carrés peint dans les angles de chaque rectangle.

2ème cas Le nombre de case peinte en bordure du rectangle est de 20

$5 \times 2 = 10 + 7 \times 2 = 24 - 4 = 20$ cases peintes.

l. L.

2) Le nombre de case peinte alors que la longueur est 11 est de 28 c

$5 \times 2 = 10 + 11 \times 2 = 32 - 4 = 28$ cases peintes.

l. L.

Le nombre de case peinte alors que la longueur est 19 est de 44

$5 \times 2 = 10 + 19 \times 2 = 48 - 4 = 44$ cases peintes.

l. L.

3) Le nombre de case peinte alors que la longueur est 386
cases peintes.

$5 \times 2 = 10 + 386 \times 2 = 782 - 4 = 778$ cases peintes.

largeur longueur

[A]

L'approche historico-socio-culturelle prend ses sources dans les travaux de différents auteurs au premier rang desquels LevVygotski mais également Henri Wallon. Il n'est pas ici le lieu de développer ces travaux[9] tellement ils sont riches en prolongements possibles pour l'éducation. Nous reprendrons seulement quelques idées-forces sur lesquelles s'appuie la séquence proposée. Il est également nécessaire de préciser que toutes ces idées forment un tout, qu'il n'est pas possible de les lire de manière disjointe (ce serait d'ailleurs en perdre tout l'intérêt). Nous nous contenterons d'exposer quelques points et comme la lecture que nous faisons de ces idées-forces est forcement réductrice nous renverrons le lecteur pour une étude plus approfondie aux œuvres fondatrices suivantes

- *Pensée et langage* de Lev Vigotski qui constitue l'ossature de cette conception, en particulier les chapitres 6 et 7
- *De l'acte à la pensée* de Henri Wallon
- *Les fonctions psychiques supérieures* et les œuvres de Ignace Meyerson.
- On peut ajouter également *Avec Vygotski*, sous la direction de Yves Clot, qui a l'avantage de faire le lien entre des auteurs comme Vygotski, Wallon, Bakhtine…

D'une manière générale, pour l'approche historico-socio-culturelle (AHSC), le moteur du développement des fonctions psychiques supérieures (extension de la pensée et de la conscience) est la relation sociale. Ce développement découle de modifications des fonctions psychiques à partir de l'appropriation/intériorisation des différents types « d'outils » culturels construits par les générations précédentes. Il s'ensuit que l'enseignement-apprentissage doit précéder le développement (c'est un des points qui différencient cette approche des autres conceptions d'éducation).

Pour citer Bernard Schneuwly :

> « Le développement à l'âge scolaire n'est possible que grâce à l'enseignement ».

L'enseignement, étant conçu sur une base disciplinaire, doit être systématique. Il doit susciter la réflexion, la prise de conscience et le contrôle dirigé de sa propre activité psychique.

---

[9] On peut noter que ces travaux ne forment pas un Tout définitif, monolithique, dogmatique. Ce serait d'ailleurs faire un énorme contre-sens que de le croire. Du fait, en particulier, de la disparition prématurée de Vygotski, de la nature même de la réflexion menée, de nombreuses pistes sont encore à suivre apportant des éléments de réponse comme en témoignent les nombreuses publications actuelles.
Il convient de citer un domaine en pleine expansion, prometteur, quasi-inexistant au moment où sont publiés les ouvrages cités plus haut, qui peut éclairer l'AHSC, celui de la neurobiologie : on lira avec profit les publications de Antonio Damasio et Gerald Edelman.

[B]

La formation des concepts

Vygotski distingue les concepts quotidiens (« appris sur le tas » - ils ont une portée locale - ils sont contextualisés - ils sont relativement isolés les uns des autres) et les concepts scientifiques (ils ont une portée générale - ils forment des systèmes - ils se créent avec le concours essentiel du langage).

Autrement dit : les concepts spontanés/quotidiens peuvent être compris comme une forme de généralisation, quasi-exclusivement empirique, des expériences quotidiennes, sans enseignement systématique alors que les concepts scientifiques doivent être entendus comme généralisation de l'expérience de l'ensemble de l'humanité - les sciences au sens large embrassant toutes les connaissances humaines.

L'école est le lieu où les concepts scientifiques sont en cours d'appropriation / de constitution. Bien évidement l'appui sur les autres concepts est incontournable.

Pour faire suite à ce qui est écrit précédemment, certains traits distinctifs prennent plus de force. Parmi les objets une différenciation s'opère, une « première » généralisation a lieu puis l'abstraction. On peut dire que le concept est une synthèse de « pensées ».

L'idée d'un concept «isolé» n'a pas de sens. Les concepts sont toujours en perpétuel développement chez chaque individu, insérés dans un système de concepts. Le développement de cette «structure de concepts» modifie la nature de la pensée de l'élève qui en retour accroît le développement de sa «structure de concepts». Ceci permet d'expliquer pourquoi l'enseignement de notions isolées n'a pas de sens.

Par exemple, la notion de nombre ne devient concept que reliée aux notions d'opérations, d'égalité...... (à leur tour « concepts se développant »).

Classiquement, on distingue deux catégories de « connaissances », les connaissance déclaratives ou structurales (principes, définitions, propriétés...) et les connaissances procédurales (méthodes, techniques de traitement, de résolution...). Très souvent, l'entrée dans l'algèbre se fait pour les élèves par l'acquisition de connaissances procédurales; on remarque alors que ces savoirs procéduraux sont dépourvus de sens et ne sont pas transférables comme le constate entre autres Bruer «nombreux sont les élèves qui ne savent pas pourquoi les procédures mathématiques qu'ils apprennent fonctionnent.».

L'autre manière qui consiste à faire travailler l'élève uniquement sur les connaissances déclaratives n'est pas satisfaisante non plus, ce qu'avait déjà anticipé Vygotski en affirmant que « la difficulté avec les concepts scientifiques tient à leur verbalisme » [10].

L'enseignement systématique de savoirs « combinés », déclaratifs et procéduraux, semble très prometteur, si l'on en juge à partir des études à notre disposition (on peut citer par exemple celles de Jean Schmittau et Anne Morris - The Development of Algebra in the Elementary Mathematics).

Cet enseignement combiné met en évidence une troisième catégorie de « connaissances », que l'on pourrait appeler « capacités de recontextualisation » qui sont celles qui permettent à l'élève de savoir pourquoi utiliser telle ou telle connaissance et comment les utiliser. Ces connaissances ne sont pas « inscriptibles noir sur blanc », elles sont individuelles, se construisent peu à peu en fonction du système de significations propre au sujet.

Il est intéressant de remarquer que pour Vygotski, l'algèbre est une exemple prototypique de formation d'un concept pour un élève (Pensée et langage - page 392 et suivante) : les connaissances en construction en algèbre se fondent sur les connaissances arithmétiques qui en retour, du fait même de ces nouvelles acquisitions se modifient, se transforment. L'effet de ces transformations/réorganisations dynamiques sont une plus grande autonomie de fonctionnement pour l'élève. Les nouveaux concepts scientifiques opérants agissent en médiateur de sa pensée et étendent sa capacité de résolution de problèmes.

[C]

La notion de pensée par complexe

Ce type de pensée se trouve chez l'enfant mais également chez l'adulte. On retrouve un tel fonctionnement lorsque qu'un élève aborde un nouveau «domaine conceptuel» comme l'algèbre par exemple.

Cinq complexes (associatif, collection, en chaîne, diffus, pseudo-concept) sont définis par L. Vygotski mais ce n'est pas le lieu, ici, de les distinguer. Dans ce type de « pensée » l'individu lors de « classements » réunit des objets concrets hétérogènes. Les liaisons se font de manière empirique et de manières très diverses. Tous les traits distinctifs sont « à égalité ». Le complexe n'est pas supérieur à ses éléments. Ce qui signifie que cette « pensée » n'est pas totalement opérante pour résoudre des problèmes tout en ayant une certaine forme de cohérence.

Le pseudo-concept permet de comprendre et d'expliquer certains phénomènes observés en classe. C'est un pont entre la pensée concrète et la pensée abstraite. D'où cette dualité : intérieurement c'est un complexe et extérieurement cela ressemble à un concept. Il y a là une

[10] On peut rapprocher ce point avec l'évolution de la pensée L. Wittgeinstein qui de « le signifié coïncide immédiatement ou médiatement, à travers un concept, avec la chose désignée par le mot », de ses premières recherches, en arrive à écrire dans ses derniers textes que « la garantie du fait que les formes ont un signifié se trouve dans l'usage que l'on fait d'elles dans les communautés historiques particulières ».

difficulté pour l'enseignant de distinguer pensée par complexe et pensée par concept. Autrement dit, lors « d'expressions » utilisées en classe ce sont les mêmes objets pour l'élève et le professeur, le même référent, mais ils n'ont pas la même « signification opérante » dans l'activité en cours.

On peut donc penser qu'il est important de réduire le plus possible la part d'implicite dans le dialogue professeur/élève (sans toutefois arriver à tout expliciter, ce qui aurait pour effet malheureux de supprimer ce « jeu » - au sens mécanique - fondamental dans la construction des significations propres à chacun). La verbalisation dans différents registres (symbolique, langue naturelle, graphique…) est une piste essentielle. En algèbre, les propriétés qui interviennent ne sont pas toujours explicitées et leur énoncé est rarement écrit.

La présence d'un concept et la conscience d'un concept ne coïncident pas.

Autrement dit, un enseignant peut présenter une nouvelle notion à un élève, ce nouveau concept est là; il faut que cet élève l'intègre à sa « structure de concepts » pour que ce concept devienne « opérant ».

La verbalisation (langage oral et langage écrit très complémentaires) est un puissant moyen pour y arriver. On trouve là toute l'importance du rôle fonctionnel de la signification de l'« énoncé verbal » dans l'acte de la pensée.

Le concept « pour autrui » se développe avant le concept « pour soi ». Les idées ne prennent toute leur consistance que lorsqu'elles rebondissent sur celles des autres.

Dans l'activité proposée, il y a obligation pour chaque élève de composer avec un ou des partenaires puis avec l'ensemble des groupes.

La diversification des situations soumises aux élèves leur permet de mettre « en contact » un certain nombre de notions, de créer des liens entre ces notions, d'éprouver ces notions dans différents contextes. Ces liens se croisent à des nœuds - ces nœuds sont les « concepts en développement ». Très schématiquement, on peut dire que plus il y a de liens, plus les « concepts en développement » sont opérants.

[D]

Un point crucial de l'AHSC est le concept de médiation : par les « instruments psychologiques » qui modifient radicalement la relation de l'homme à lui-même et à son environnement social, par la médiation sémiotique qui permet un développement conjoint de la pensée et du langage, par la médiation humaine (entre élèves ou entre élève et enseignant).

L'amplification des fonctions psychiques supérieures (attention, volonté, mémoire, formation de systèmes de concepts, langages écrits…) procède de la différenciation des fonctions antérieurement indifférenciées. L'intégration de « signes » re-structure leur fonctionnement et leur forme.

De ce fait, les « instruments psychologiques » ne sont pas seulement des prothèses (avec une seule fonction d'aide) mais sont des « transformateurs » de l'individu.

Le langage comme outil de construction et de maîtrise de la pensée

Les interactions entre élèves et entre élève et professeur provoquent des réorganisations mentales. L'édification de la « pensée » se fait de manière interpersonnelle puis intrapersonnelle.

Quand on est conscient de l'existence ce processus, il n'est pas rare de le rencontrer en classe : lors de débats, il arrive qu'un élève s'approprie l'idée d'un autre et que l'on entende « toi, tu dis ça [phrase] mais…… » et en même temps on constate la transformation de la pensée du locuteur… en une sorte de réflexion « par contradiction ».

On peut rajouter ici l'apport d'auteur comme Bakhtine sur les fonctions discursives du langage. Pour les enseignants, les échanges entre élèves sont aussi le moyen d'obtenir des informations sur l'état de leur « développement ».

[E]

La notion de Zone de Proche Développement (ZPD) est certainement celle la plus utilisée parmi toutes celles contenues dans les travaux de Vygotski mais également celle qui a le plus grand nombre d'interprétations.

Revenons au texte :

> « La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un est précisément le symptôme le plus notable qui caractérise la dynamique de son développement et de la réussite de son activité intellectuelle. Elle coïncide entièrement avec sa ZPD. » (Pensée et langage - page 353)

Pour nous, elle n'est pas une « zone » dans un sens géographique. Citons Françoise Savioz :

> « sous la locution zone de proche développement, est souvent entendu un aspect morphologique du développement intellectuel, voire quasi topologique ; ceci peut découler de sa traduction par « zone proximale de développement »

formulation qui fait porter l'accent logique sur le mot « zone » (une étendue), plutôt que sur le mot « développement » (une dynamique) ; mais peut-être aussi, cette acception s'adapte-t-elle au flou qui entoure la notion d'âge mental ».

Elle n'indique pas qu'il y aurait des situations d'enseignement « parfaites ».

Elle ne signifie pas non plus qu'il y aurait pour chaque élève un « potentiel », vu comme « caractéristique intrinsèque à apprendre » qu'il suffirait de déclencher (cette conception est proche du modèle biologique avec la métaphore du « germe à la plante » et de l'enseignant comme jardinier).

En accord avec le modèle de développement d'un individu exposé par Vygotski, la ZPD concourt à révéler les fonctions psychologiques en cours de maturation, à en connaître leur état et à trouver les médiations qui vont favoriser leurs extensions et transformations.

La ZPD peut être vue comme espace-temps d'une tension entre l'extérieur et l'intérieur d'un élève, « croisement entre deux logiques, l'une d'enseignement, l'autre de développement » pour reprendre les propos de B. Schneuwly.

[F]

Concernant tout ce qui est lié à l'objectivation, nous renvoyons dans cette même brochure à l'article de Luis Radford « Théorie de l'objectivation ».

Nous compléterons par ce que dit Lluis Radford dans *Semiótica cultural y cognición* - Université du Chiapas - Mexique - juillet 2004 :

> « Soit A une activité avec un objectif O. Pour atteindre l'objectif O, les individus mobilisent certains concepts C_1, C_2 … Une situation usuelle est celle dans laquelle pour atteindre O, un nouveau concept $\hat{c}$ est introduit. Avant son apparition, $\hat{c}$ se rencontre comme simple «chose mathématique». Cette «chose mathématique» est une forme confuse, simplement présentée comme mathématisable.
>
> Utilisant la notion de ZPD nous pouvons dire que cette « chose mathématique » est un élément de la ZPD à un moment donné. L'objectivation du savoir est de passer de la « chose mathématique » au concept $\hat{c}$. » *(traduction par nous-mêmes)*

> « Exactement comme nous disons qu'un corps est en mouvement et non qu'un mouvement est dans un corps, nous devrions dire que nous sommes en pensée et non que les pensées sont en nous. »
> C. S. Peirce

Bibliographie

Intérêt général

Bourdeau M., *Pensée symbolique et intuition*, PUF/collection Philosophies

Brossard M., *Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Presses Universitaires du Septentrion, 2004

Brossard M., Situations et formes d'apprentissage, *Revue Suisse des Sciences de l'Éducation* n°23, 2001

Clot Y. (ouvrage collectif dirigé par), *Avec Vygotski*, Éditions La Dispute, 2002

Clot Y., Clinique du travail et problème de la conscience, *Travailler* n°6, 2001

Damasio A., *L'erreur de Descartes*, Odle Jacob / Poches, 2001

Edelman G., *Biologie de la conscience*, Odile Jacob / Poches, 2000

Edelman G., *La science du cerveau et la connaissance*, Odile Jacob, 2007

Frege G., *Écrits logiques et philosophiques*, Seuil / Points Essais, 1971

Giusti E., *La naissance des objets mathématiques*, Ellipses/collection L'esprit des sciences, 2000

Meyerson I., *Les fonctions psychologiques et les œuvres*, Albin Michel, 1995

Moro Ch., La Cognition située sous le regard du paradigme historico-culturel vygotskien, *Revue Suisse des Sciences de l'Éducation* n°23, 2001

Peirce C.S., *Écrits sur le signe*, Seuil, 1978

Radford L., L'altérité comme problème éducatif, *Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs*, Université Laurentienne - Canada, 2009

Radford L., *Théorie de l'objectivation*

Savioz F., *De la mobilité langagière en classe, avec l'exemple de l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de doctorat, 2007

Schneuwly B., Vygotski, l'école et l'écriture, *Cahier de la section des sciences de l'éducation* n°118, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation

Vygotski L., *Conscience, inconscient, émotions*, La Dispute, 2003

Vygotski L., *Pensée et langage*, La Dispute, 1997

Wallon H., *De l'acte à la pensée*, Flammarion / collection Champs,

Wells G., Learning and teaching «Scientifics Concepts» Vygotsky's ideas revisited, Conference, «Vygotsky and the Human Sciences», 1994

Plus particulièrement sur l'algèbre…

Bardini C., Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique, Thèse de doctorat, 2003

Baruk S., *Si 7 = 0*, Odile Jacob / poches n°180, 2006

Bednarz N., Kieran C., Lee L., *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching, Kluwer Publishers*, 1996

Booth l., Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, *Petit x* n° 5, IREM de Grenoble

Chevallard Y., Le passage de l'arithmétique à l'algébrique (3 parties), *Petit x* n° 5, 19 et 23, IREM de Grenoble

Condillac, *La langue des calculs*, Presses Universitaires de Lille, 1981

Dziurla R., *Semiotics of Play in View of the Development of Higher Mental Functions*, Poznan University - Pologne

Kieran C., Concepts associated with the egality symbol (*traduction du Groupe IREM Premier Cycle*), *Educational Studies in Mathematics*, 1981

Kieran C., Booker G., Filloy E., Vergnaud G., Wheeler D., Cognitive processes involved in learning school algebra, *Mathematics and Cognition*, Cambridge UP, 1990

Kieran C., Chalouh L., *Prealgebra : the transition from arithmetic to algebra Research ideas for the classroom, MacMillan*, 1993

Kieran C., Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator* Vol.8, 2004

Radford L., Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking : a semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics* 42, Kluwer Publishers, 2001

Radford L., Gestures, speech, and the sprouting of signs : a semiotic-cultural approach to student's types of generalization, *Mathematical thinking and learning (Pre-print)*, 2003

Radford L., *Semiótica cultural y cognición*, Université du Chiapas - Mexique , 2004

Radford L., *Body, Tool, and Symbol : Semiotic Reflections on Cognition*, E. Simmt and B. Davis Editors, 2005

Radford L., Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts, *ZDM*, 2007

Radford L., Bardini C., Sabena C., Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations, *CERME* 4, 2005

Rouger-Moinier F., Quelques problèmes pour donner du sens à des règles de calcul littéral en troisième, *Repères IREM* n° 42, Topiques Éditions, 2001

Schmittau J., Morris A., The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov, *The Mathematics Educator* Vol.8, 2004

Schmittau J., The Development of Algebraic Thinking. A Vygotskian perspective, *ZDM* Vol 35, 2005

DE LA SUPPRESSION OU PAS DES NOTES, QUELQUES RÉFLEXIONS

Ce n'est pas la pensée qui réfléchit, c'est l'homme qui réfléchit.
L. S. VYGOTSKI (notes, 1929) [1]

On n'apprend ni de façon identique, ni la même chose, que l'on soit scolarisé ou pas.

Surpris par un problème dans le vécu quotidien, on y fait face spontanément, par tâtonnement, essais-erreurs, imitation, ... ; en quelque sorte l'inattendu prend sur le fait d'une désorientation de l'aptitude à "se dire".

À l'école, première différence, au lieu d'être contingent, le problème est introduit exprès ; l'étonnement naît en étant "drainé" d'emblée par un certain degré de formulation, l'imprévu parvient avec un niveau donné de mise en mots.

Deuxième différence, à l'école, le problème est soumis à une attention collective engageant d'office un contexte langagier plus divers, plus réactif.

Mais, précisément, c'est le bénéfice de ces différences qui se trouve contrecarré par les pratiques d'enseignement les plus générales et habituelles ; c'est ainsi que pour nombre d'élèves, le développement intellectuel "achoppe" sur le vécu scolaire ; au lieu de se retrouver "libre" en formation de racines de nouvelles connaissances dans les acquis du quotidien, l'activité intellectuelle d'un élève est d'autant plus "tuteurée" et privée d'expansion d'étonnement, que les comportements attendus sont anticipés tout construits et prévus en détails.

Pour illustrer cela, partons d'une saynète-récit empruntant à une recherche [2] qui a fait autorité auprès des chercheurs en didactique des mathématiques ; ouvrant sur l'universel de la question du rapport enseignement collectif/apprentissage individuel, elle conforte l'exclusion d'une explication qui s'accrocherait à la seule remise en cause des "méthodes" suivies individuellement ou localement.

Les auteurs ont étudié cinq adolescents brésiliens qui vendaient, pour survivre, dans les rues de RÉCIFE, des petites marchandises à consommer comme des coconuts ; ils ont enregistré

---

[1] BROSSARD M. (2004), *Vygotski, Lectures et perspectives de recherches en éducation*. Suivi d'*un inédit en français de L. S. Vygotski (1929)*, Presses Universitaires du Septentrion.

[2] CARRAHER T. N., CARRAHER D.W.E et SCHLIEMAN A.U. (1985), *Mathematics in the street and in schools* ; in British journal of Developmental Psychology ; 3 ; 21-29 ; cité par NOIRFALISE R., (1994), Caractéristiques du sujet ou adaptation à un milieu ? in *Bulletin APMEP*, n° 393.

On reconnaîtra au passage des emprunts rédactionnels à ***l'Erreur n'est pas une faute***, L'Harmattan 2008.

précisément les opérations arithmétiques faites par ces adolescents dans la rue et ont demandé aux instituteurs de poser les mêmes calculs.

R. Noirfalise a relevé le cas suivant :

M., 12 ans,

Dans la rue :

- L'ACHETEUR : Je voudrais 4 coconuts ; cela fait combien ?
- L'ENFANT : Cela fait 105, plus 30, égale 135, un coconut vaut 35. Cela fait 140 .

Avec le support d'une activité réelle, M. compte, en vrai et sans erreur, avec ses savoirs quotidiens ; les significations parlent.

Lui parlent et parlent à son interlocuteur :

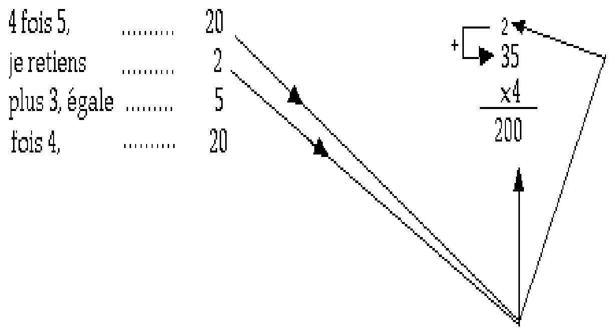
3 coconuts ⇛ cela fait 105, un coconut de plus ⇛ plus 30 et plus 5 …

N'importe qui - indépendamment de sa culture mathématique - en particulier s'il vient de vendre trois coconuts à "35 l'un", ***peut*** procéder ainsi dans le langage du quotidien.

L'activité intellectuelle est ici procédurale et machinale ; le langage pour soi assure une "fonction associative" entre pensée et mots d'action/communication appelés spontanément par les indices de reconnaissance familiers dans la situation.

À l'école :

- L'ENSEIGNANT(E) : Calcule 4 fois 35.
- M. :



S'il est clair que l'algorithme classique du calcul d'un produit n'a pas pris sens pour M.[3], il reste qu'elle ne dit rien de faux ; ce sont les "gestes" associés aux dires qui dérapent, détachés les uns des autres qu'ils sont, du point de vue du sens.

La demande enseignante cerne un comportement attendu, convoque la remémoration des monstrations successives de la gestuelle calculatoire qui ont très bien rendu familière la situation

[3] Mais… se justifie-t-il dans la situation proposée ? La disposition particulière des calculs n'a qu'un rôle pratique, facilitant la lecture rapide. La disposition *en ligne* signifierait des objectifs enseignants différemment orientés.

mise en place. L'antienne a été bien apprise en tant que suite de mots qui n'évoquent que du "devoir" socialement affiché à répétition.

D'après les parcours scolaires traditionnels, on peut affirmer qu'en tendance,[4] le concept de multiplication paraît s'enraciner graduellement dans l'entraînement à suivre pas à pas une procédure de calcul ritualisée, davantage que grâce à un sinueux processus de distanciation par rapport à des expériences mentales d'additions particulières, un processus d'abstraction et de généralisation.

Dans de tels contextes, les significations autour de comptage/calcul/opération, pour rester dans l'exemple, s'agglutinent et se présentent le plus souvent selon une structure qui tient à la fois du *complexe en chaîne* et du *complexe diffus***.** [5]

Ce sont les recherches de VYGOTSKI qui ont mis en évidence que le développement du système " pensée-langage / conscience " s'initiait au quotidien dans des modes de *pensée par complexes*.

Comme le mouvement de la pensée par complexes s'effectue de proche en proche selon une proximité de traits distinctifs perçus plutôt que par des relations de sens, lors d'une réflexion en pensée par complexes les savoirs font difficilement système ; l'émergence de dynamiques d'intégration cohérente d'éléments dérangeants n'est alors que sporadique ; autrement dit les dépassements signifiant apprentissage ne sont guère susceptibles d'engagement.

Autrement dit encore, lorsque les leçons restent implicitement dans l'unique dépendance de "pré-requis" individuels et n'envisagent pas la provocation de questionnements collectifs "par surprise", alors l'enseignement ne peut participer que de manière anecdotique à la croissance intellectuelle des élèves.

En effet, selon les apports théoriques de VYGOTSKI, l'accomplissement de son rôle émancipateur des individus et des potentiels sociaux, nécessite que l'apprentissage scolaire, pour l'essentiel, devance le développement ; l'apprentissage

---

[4] Le ***degré d'humanitude réalisé*** est lié à l'histoire particulière de chaque individu, non duplicable et infiniment varié ; ses approches descriptives ne peuvent être ***vraies qu'en tendance***, dirigées suivant des lignes générales, en ***cohérence avec des choix interprétatifs*** qui les orientent.

[5] Le ***complexe en chaîne***

> *se construit selon le principe de la réunion dynamique et temporaire de maillons isolés en une chaîne unique et du transfert de signification d'un maillon de la chaîne à un autre*,

et le ***complexe diffus*** réunit

> *à l'aide de liaisons diffuses des groupes intuitifs-concrets d'images ou d'objets*,

VYGOTSKI L. S. (1985), *Pensée & langage*, Paris, La Dispute, pages 168 et 170.

Par "complexes" sont désignées des structures de généralisation de la pensée ; ce sont les antécédents des concepts et ***pensée par complexes*** renvoie à ***pensée enfantine*** ; néanmoins, pour l'adulte, dans la vie quotidienne notamment, des modes de pensée par complexes se réactualisent sans cesse. La pensée par concepts ne se substitue pas à la pensée par complexes, pas plus que le développement de la frondaison ne vaut disparition des racines de l'arbre, mais au contraire, leur développement concomitant.

> suscite alors, fait naître toute une série de fonctions (...) qui sont dans la zone de proche développement [6] (...). C'est là ce qui différencie l'apprentissage qui a pour but le développement intégral et harmonieux de l'enfant et l'apprentissage de savoir-faire techniques spécialisés qui n'exercent aucune influence essentielle sur le développement.

Un peu avant, dans le même chapitre de *Pensée et langage*, VYGOTSKI avait mis en évidence que, non seulement

> le développement des concepts scientifiques [7] implique un certain niveau de concepts spontanés, niveau auquel le caractère conscient et le caractère volontaire apparaissent dans la zone de proche développement, mais encore (...) les concepts scientifiques transforment les concepts spontanés et les élèvent à un niveau supérieur en leur constituant une zone de proche développement.

Suivant cette ligne interprétative, faisant fond à un regard renouvelé du rapport fonctionnel entre enseignement collectif et apprentissage individuel, la notion courante de *soutien scolaire* et ses divers corollaires s'avère bien pernicieuse, tout autant que celle de laquelle elle dérive de *élève en difficulté*.

"Soutenir" un élève ce serait l'aider à combler des "manques" dont il serait affecté, de par les habitudes de son milieu socioculturel ou par constitution native de ses facultés d'esprit, ou, le plus souvent par un mixte des deux, selon les idéologies sous-jacentes chez "les observateurs".

Pour cela, il est généralement requis qu'il faille anticiper des simplifications dans les sollicitations scolaires et privilégier des répétitions ciblées dans les domaines incriminés.

Or plus l'enjeu d'apprentissage est rétréci, plus pauvre se retrouve l'activité de contextualisation engendrée, plus s'affaiblit la provocation de ricochets de mots et d'idées : l'activité intellectuelle est serrée dans l'étau d'une exécution de tâche prescrite avec un unique "degré de liberté" d'où il ne faut pas dérailler.

Autrement dit, il pleut toujours où c'est mouillé !

---

[6] Ce concept créé par Vygotski reçoit des compréhensions discordantes ; cela semble pouvoir être attribué, essentiellement, à la prédominance des modèles de l'apprentissage de type piagétien pour lesquels apprendre ne ferait qu'offrir de nouvelles formes d'éléments à l'exercice de la pensée, sans modifier l'exercice en lui-même, ses processus étant supposés innés ; or il a été montré que le propre des structures de pensée est la "contagion" de leur potentiel d'efficience au delà du domaine d'activité qui amorce leur ré-organisation (exemple : apprentissage de la lecture/savoir lire) ; ***une zone de proche développement*** s'esquisse et renaît chaque fois que "son" concept en "bourgeonnement" s'engage : elle vaut dynamique de complexification d'un voisinage conceptuel donné, complexification "historique" et "contagieuse" ; ***une zone de proche développement*** est une dynamique circonstancielle qui lie le hier et le demain d'un concept vivant, une dynamique qui, pour un degré de généralisation donné, permet la propagation à l'ensemble du système pensée-langage des ressources fonctionnelles générées lors d'expériences intellectuelles ponctuelles.

[7] S'oppose à "concepts quotidiens" aussi appelés "concepts spontanés", dans la ligne de ce qui se laisse déjà entendre dans la citation elle-même.

Ces qualifications valent aussi bien pour des concepts en philosophie, dans les arts, ... qu'en biologie ou en physique.

Il s'agit de "concepts volontaires", c'est-à-dire engageables et maîtrisés autrement que sous la forme de réponse conditionnée à une situation reconnue, ce qui implique que leur degré d'abstraction soit compatible avec leur organisation systémique et donc suppose que leur rapport à la réalité qu'ils représentent ne soit pas direct, comme avec les "concepts quotidiens", mais médié par d'autres concepts.

Revenons sur les “manques” qui font classer un élève dans la case *en difficulté*.

Qu’est-ce qui les “révèle” ? Principalement et officiellement : les notes !

Ces derniers temps, il a été possible de lire ou d’entendre de la part d’auteurs à notoriété certaine, nombre d’affirmations que l’on arrive vite à trouver critiquables alors même qu’on les approuvait au premier abord comme frappées au coin du bon sens ; deux exemples.

◊ *Contestation de l’opinion selon laquelle la réussite scolaire se marque par le passage dans les grandes écoles, “comme si notre pays n’avait besoin que d’énarques ou de polytechniciens”* ; cela n’exprime-t-il pas que “réussite” n’a naturellement pas la même signification pour tout le monde ? Et, par voie de conséquence, l’enseignement susceptible de la tramer non plus ?

◊ *Demande que l’on apprenne aux enfants à “aimer l’école, à aimer apprendre”* ; comme ils aiment le chocolat ou leur hamster ? Aiment apprendre les paroles incomprises d’une chanson du “top cinquante” ou à conduire un scooter ?

De diverses manières on aborde bien les dégâts psychologiques chez les élèves qui reçoivent à répétition des mauvaises notes, mais on ne s’interroge que très rarement sur la pertinence des notes relativement à leur(s) rôle(s) ; cependant et d’abord, essayons de nous pencher un peu sur ce que peuvent être les significations des notes au moment de leur attribution, à partir de ce genre, courant, de réponses “de terrain” qui illustrent qu’un même raisonnement conduit le même élève aussi bien à du “juste” qu’à du “faux”.

Ainsi, avec les mêmes bribes de raisonnement remémorées en langage “agglutiné”, intérieur :

“je dois diviser les deux par ce qu’il y a devant “x” et obtenir “ x = ... ”

Gaël(le), authentique élève, en fin de troisième et admis(e) en seconde générale, a obtenu :

$100x - x = 12$ $\frac{\cancel{100}x}{\cancel{100}} - x = \frac{12}{100}$ $x - x = 0{,}12$ $0 = 0{,}12$ Cette équation n' a pas de solution (1)	$32 = \frac{16}{3}x$ $\frac{\frac{32}{16}}{3} = \frac{\frac{\cancel{16}}{\cancel{3}}x}{\frac{\cancel{16}}{\cancel{3}}}$ $\frac{2}{\frac{1}{3}} = x$ $\frac{2}{3} = x$ La solution de l'équation est $\frac{2}{3}$ (2)	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - \frac{21}{3} = 14x$ $\frac{-\frac{14}{3}}{14} = \frac{\cancel{14}x}{\cancel{14}}$ $\frac{-\frac{14}{3}}{14} = x$ $\frac{-\cancel{14}}{3} \times \frac{1}{\cancel{14}} = x$ $\frac{-1}{3} = x$ (3)

Alors, en décontextualisant et recontextualisant les données, quelle note ?

... *fin de l'année après révision générale, 5 ou 6 points sur 20, pour la question ;*
option a
réponse (1) sur "1 point" ... *pas de quotient dans les données,*... réponses (2) et (3) , chacune sur "2 points" ;
dans ces conditions *Gaël(le)* se verrait peut-être attribuer la note de **2 sur 5**.
option b
réponse (1) sur "1 point"... *pas de quotient dans les données,*... réponse (2) sur "2 points"... *fraction dans les données,* réponse (3) sur "3" ... *quotient dans les données et au résultat* ... ,
dans ces conditions *Gaël(le)* se verrait peut-être attribuer la note de **3 sur 6**.
option c
... chacun des calculs sur "2 points" dont un demi-point pour la "phrase de conclusion", et ... *étant donné le niveau, ... la période, ... c'est " juste ou faux "* ... ,
dans ces conditions *Gaël(le)* se verrait peut-être attribuer la note de **1,5 sur 6**.

... *début d'année, après révision centrée sur résolution d'équations et problèmes d'algèbre , cinq équations à résoudre ... sur 3 points chacune ... (et 5 points par ailleurs, pour une mise en équation).*
option a
... les erreurs en (1) et (2) sont considérées comme des "étourderies" ... bon niveau de l'élève l'année précédente, ...vacances proches... , ensemble correct ...
dans ces conditions *Gaël(le)* se verrait peut-être attribuer la note de **7 sur 9**.
option b
... aucune véritable difficulté, ... absence de conclusion en (3) ...
dans ces conditions *Gaël(le)* se verrait peut-être attribuer la note de **"2 sur 9"**.

Peut-on considérer qu'il y a adéquation entre notes et savoirs ?

Ensuite, revenons sur le fait qu'une note appartient à une échelle sensée être régulière ; pourtant, demandons-nous : d'évidence, est-ce que deux points entre 5 et 7 valent comme ceux entre 10 et 12, entre 18 et 20 ? Sur un même devoir, dans une discipline donnée ou entre disciplines différentes ... puisqu'on s'autorise à calculer des moyennes, et même au centième ?

Et encore, pour le dire vite et en restant dans le domaine évoqué, un calcul qui aboutit au bon résultat est-il obligatoirement l'indice d'une lecture numérique efficiente ?

N'est-il pas possible, par exemple, que des élèves, grâce à une écoute appliquée, prennent des repères permettant d'arriver assez souvent aux bonnes réponses, tout en restant à la marge des logiques attendues ? L'attribution d'une erreur à l'étourderie, à l'oubli ou à la confusion, en référence à des choses qui manquent ou qui ne sont pas bien désignées, ne passe-t-elle pas à côté de l'interrogation sur les processus de raisonnement ? Lorsqu'une démarche qui paraît acceptable reçoit une sanction sociale positive, ne peut-il arriver que soient ainsi consolidées des idées fausses ?

Des exercices d'application ne nécessitant pas la formulation des raisonnements suivis, constituent-ils des outils pertinents de validation des connaissances ?

Ces exercices ne peuvent-ils pas être réussis malgré des raisonnements défaillants ?

Peuvent-ils ne pas être réussis à la suite de digressions “chronophages” mais qui, communiquées et discutées sans mauvaises notes à la clé, seraient susceptibles d’initier des progrès ?

Comment et pourquoi peut-on accepter que notes et savoirs ou aptitudes soient vus d’office dans le même bon ordre ?

N’est-il pas manifeste que, en sous-jacent à cette interrogation il n’y a pas, d’abord, une question de pédagogie, mais proprement une question de représentation sociale majoritaire qui, pour que l’échec scolaire soit combattu en commençant par le commencement, devrait sans doute, pour être à la hauteur des bonnes volontés et des dévouements professionnels, intégrer quelque chose comme la conviction que le devenir intellectuel de tous les élèves est ou peut être à l’échelle des savoirs de leur temps ? [8]

---

[8] Emprunt à : “... tous les hommes sont ou peuvent être à l’échelle du poète.”
Paul ÉLUARD, dans ***L’honneur des poètes,*** recueil rassemblant des textes de vingt-deux poètes en résistance, publié en juillet 1943 par les Éditions de Minuit Clandestines.

VERS UNE THÉORIE SOCIOCULTURELLE DE L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE : LA THÉORIE DE L'OBJECTIVATION [1]

Luis Radford [2]

Traduit de l'espagnol par Miquela Catlla puis relu par l'auteur.

Introduction

Dans une classe du premier niveau de l'école primaire, la maîtresse introduit un problème sur une séquence numérique par une histoire. Il s'agit d'un écureuil qui, à la fin de l'été, apporte chaque jour deux noix à son nouveau nid en prévision de l'hiver qui approche. Dans une partie du problème, les élèves (6-7 ans) doivent trouver le nombre de noix emmagasinées par l'écureuil dans son nid après le dixième jour, sachant que, quand l'écureuil a trouvé le nid, il y avait déjà 8 noix et que l'écureuil ne mange pas les noix de sa provision d'hiver. Comme d'habitude, les élèves travaillent en petits groupes. Cristina, une des élèves, commence à compter de deux en deux : dix, douze, quatorze, seize. Comme elle se rend compte qu'elle n'a pas compté les jours, elle décide de recommencer le comptage. Or, tenir compte des jours et du nombre de noix en même temps ne va pas de soi. Donc, en s'adressant à Miguel, son équipier, Cristina dit : « Faisons-le ensemble ! ». Pendant que le reste de la classe continue son travail en petits groupes, Cristina et Miguel vont au tableau et, en utilisant une longue règle en bois, Cristina commence à compter de deux en deux pendant que Miguel compte les jours à voix haute. Dans la figure 1, quand Miguel dit « neuf », Cristina montre 26 sur une droite numérique située au dessus du tableau, qui est le nombre de noix accumulées jusqu'au jour 9. Sur la figure 2, Miguel, qui a continué de compter les jours, dit « dix » pendant que Cristina déplace la règle vers la droite et montre le nombre 28, qui est la réponse à la question.

---

[1] Cet article est le résultat d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

[2] Université Laurentienne, Ontario, Canada.

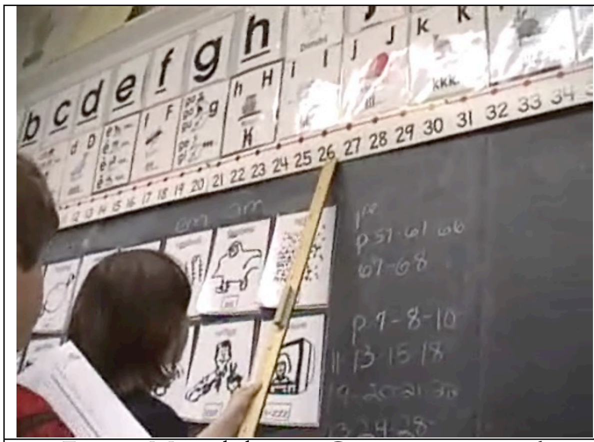


Fig. 1 : Miguel dit 9 et Cristina montre 26.

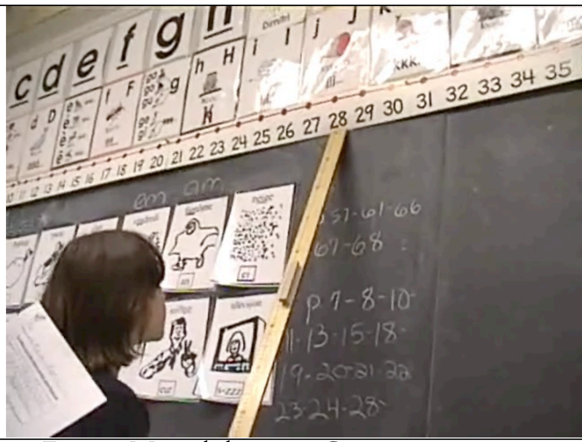


Fig. 2 : Miguel dit 10 et Cristina montre 28.

On pourrait interpréter ce passage en disant que Cristina a réussi à former une représentation mentale convenable du problème et que sa difficulté se trouvait au niveau de sa capacité de garder en mémoire l'information pertinente. Avec l'aide de Miguel, sa pensée se serait déplacée le long des états d'un espace-problème, traitant l'information à travers des règles d'inférences logiques. Mais ceci ne serait qu'une conjecture, car ce qui s'est *vraiment* passé « dans la tête » de Cristina restera à jamais un mystère. Car la pensée, telle que conçue par cette explication et par maintes théories contemporaines de l'apprentissage est une sorte de processus interne dont le mode d'existence est celui d'une vie intérieure toujours inaccessible à l'observation externe. Il s'agit d'une conception de la pensée constitutive de la tradition millénaire occidentale qui pose d'emblée une dualité entre l'esprit et le monde et que le constructivisme contemporain n'a fait que perpétuer. Ainsi, comme l'affirme le fondateur du Constructivisme Radical, la pensée demeure « une des activités humaines les plus intrigantes… Le processus réel de pensée reste invisible ainsi que les concepts que celle-ci utilise. » (von Glasersfeld, 1995, p. 77)

Mais l'inaccessibilité de la pensée par des moyens externes n'est pas le seul problème qui hante le paradigme dualiste. La pensée n'est pas non plus accessible directement à celui qui pense ! C'est comme si celui qui pense ne disposait pas d'un œil interne pour voir le déroulement de sa propre pensée. On arrive ainsi à une situation bizarre : d'une façon ou d'une autre, la pensée n'est tout simplement pas accessible…

Devant de telles difficultés et influencées par une vision discréditée de la psychologie qui remonte au débat entre Frege et Husserl, plusieurs théories de la didactique des mathématiques évitent tout simplement de se mêler de psychologie, même si tout apprentissage suppose l'activité de la pensée, au point que, sans pensée, il ne peut y avoir d'apprentissage !

Or, il ne faut pas croire que cette conception dualiste de la pensée comme « activité mentale » (de Vega, 1986, p. 439) soit la seule possible. En fait, elle provient de l'interprétation de la philosophie grecque de la part de Saint Augustin à la fin du IV^{e} siècle. Dans son interprétation, Saint Augustin a opéré une transformation profonde du sens initial du terme *eidos*. Tandis qu'Homère, entre autres, utilisait le terme *eidos* dans le sens de quelque chose d'externe, non mental - « ce que quelqu'un regarde » -, par exemple la figure, la forme, l'apparence [3]- pour Saint Augustin, *eidos* réfère à quelque chose qui est *à l'intérieur de l'individu* [4] . Influencés par cette transformation, les Rationalistes du XVII^{e} siècle, comme Descartes et Leibniz, considéraient que les mathématiques pouvaient se pratiquer même les yeux fermés, car, disaient-ils, la pensée n'a besoin ni du concours des sens ni de l'expérience pour atteindre les vérités mathématiques : les principes dont nous avons besoin pour comprendre les objets mathématiques sont, pour les rationalistes, des « principes internes » c'est-à-dire qu'ils sont à l'intérieur de nous (Leibniz, 1966, p. 34-37). Ces principes font partie des lois éternelles de la raison.

Et c'est donc ainsi, grâce à l'effet d'une tradition bien établie que, curieusement, malgré son importance, et bien qu'on parle de la pensée numérique, géométrique, etc., la pensée comme concept en soi ne fait pas partie des théories didactiques actuelles.

D'inspiration vygotskienne, la théorie de l'objectivation qui s'ébauche ici part de présupposés différents. En opposition aux courants rationalistes et idéalistes, cette théorie plaide pour une conception non mentaliste de la pensée. Il s'agit d'une conception d'après laquelle la pensée est *sensible* et *historique*. Elle est *sensible* dans le sens où la pensée invoque de manière fondamentale nos sens dans la saisie de ses objets. De ce point de vue, les gestes, la perception, le corps, les signes et les artefacts sont considérés comme des parties constitutives de la pensée. Mais la pensée va au-delà du moi-qui-pense-avec-son-corps-et-ses-sens, car elle est une forme *sociale* de réflexion et d'action *historiquement* constituée, générée par la pratique sociale. C'est ainsi que nous dirons que la pensée est une *praxis cogitans*. On franchit ainsi le dualisme du paradigme traditionnel qui comprend la pensée comme vie intérieure privée.

Qu'en est-il de l'apprentissage dans ce contexte ? L'apprentissage consiste précisément dans l'acquisition par l'élève de ces formes culturelles de réflexion sensible et d'action instrumentale ou objectuelle que constitue la pensée. Un des défis auquel nous serons confrontés dans les pages qui suivent, c'est justement d'éviter de confondre acquisition et transmission. Quand nous dirons qu'apprendre, c'est acquérir un savoir culturel historiquement constitué, il ne s'agira donc pas de concevoir cette acquisition comme un acte passif de la part de l'élève. Pour trouver un nouveau sens à ce terme que la tradition a simplifié jusqu'à le confondre avec transmission, nous

[3] Par exemple, dans la traduction en français du Livre VIII, lignes 229-230, de l'*Iliade*, Homère dit : « "Honte à vous, Argiens, objet de mépris, en apparence [eidos] admirables ! » (Homère, 1956, p. 140). Pour une discussion récente sur l'eidos en tant qu'apparence, voir Fried, 2009. Je voudrais remercier Eva Firla pour l'aide qu'elle m'a apportée concernant l'étymologie du terme eidos.

[4] Une discussion sur la manière d'aboutir à cette transformation de la conception de la pensée dans les mathématiques de la renaissance se trouve dans Radford (2004).

procéderons à une étude étymologique qui nous permettra de comprendre l'apprentissage comme acquisition sous un nouvel angle. Une telle démarche exigera cependant un repositionnement tant de l'élève que de l'enseignant dans l'acte d'apprentissage-enseignement. Il nous faudra également forger une conception nouvelle de la subjectivité.

Évidemment, ces tâches ne sont pas faciles et le lecteur ne trouvera ici qu'une ébauche de la manière dont elles sont envisagées par la théorie de l'objectivation. Dans la section 1, on trouvera une présentation du concept de pensée prôné par la théorie et sa portée anthropologique. Dans la section 2 sont présentées les bases épistémologiques et ontologiques qui soutiennent la théorie. Dans les sections suivantes, l'attention portera sur le problème d'enseignement-apprentissage, en particulier à la lumière du concept fondamental du *je-communautaire* qui pose le problème de l'apprentissage comme un problème qui dépasse la sphère du Savoir pour s'imbriquer dans la sphère de l'Être. En effet, un des éléments qui distingue la théorie de l'objectivation des autres théorisations didactiques contemporaines est sa dimension éthique et le principe d'après lequel apprendre quelque chose est aussi devenir quelqu'un. Les mathématiques ne sont pas tout simplement vues sous l'angle de sa technicité : elles ne sont pas tout simplement un discours de vérité. Elles sont plutôt vues comme une forme de réflexion intersubjective d'où émane la rencontre de l'Autre.

1. Une conception non mentaliste de la pensée

Des anthropologues comme Clifford Geertz ont mis en évidence les limites de la conception des idées en tant que "choses de l'esprit" et de la pensée en tant que processus exclusivement intracérébral :

> L'idée communément acceptée selon laquelle le fonctionnement mental est un processus intracérébral qui peut seulement être assisté ou amplifié en second lieu par les divers dispositifs artificiels que le dit processus a permis à l'homme de créer, s'avère être complètement erronée. À l'opposé d'une définition adaptative impossible et complètement spécifique des processus neuronaux en termes de paramètres intrinsèques, le cerveau humain est entièrement dépendant de ressources culturelles pour sa propre activité ; et ces ressources ne sont pas, par conséquent [des ressources] complémentaires de l'activité mentale mais constitutives de celle-ci. (Geertz, 1973, p. 76)

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, la théorie de l'objectivation part d'une position non mentaliste de la pensée et de l'activité mentale : la pensée est une pratique sociale (Wartofsky, 1979) ou encore une *praxis cogitans*. De façon plus précise, la pensée est considérée comme *une réflexion médiatisée du monde en accord avec le mode de l'activité des individus*.

Cette conception de la pensée repose sur trois éléments interreliés : (1) il y a d'abord l'idée de pensée considérée comme une *réflexion* ; (2) cette réflexion est générée au cours d'une *activité* ;

enfin, l'activité à travers laquelle la pensée est générée est *médiatisée* à deux niveaux différents : premièrement, elle est médiatisée par le corps, des signes et des artefacts ; deuxièmement, elle est médiatisée par des signifiés culturels. Ces deux niveaux de médiatisation de l'activité laisse leur empreinte sur la forme et le contenu de la pensée elle-même. Les différents aspects de cette conception de la pensée seront discutés dans le reste de cette section.

1.1 *Médiation sémiotique*

Dans le sens du premier niveau de médiatisation, le caractère médiatisé de la pensée se réfère au rôle, dans le sens de Vygotski (1981a), qu'exercent les sens, le corps et les artefacts (objets, instruments, systèmes de signes, etc.) dans la réalisation de la pratique sociale [5]. Les artefacts, par exemple, ne sont pas de pures « aides » de la pensée (comme l'affirme la psychologie cognitive) ni de simples amplificateurs, mais *des parties constitutives de celle-ci* [6]. *On pense avec et à travers les artefacts culturels*, de sorte qu'il y a une réalisation d'un champ dynamique que, paraphrasant Voloshinov (1973), nous appellerons le *territoire des artefacts*. C'est dans ce champ que la subjectivité et l'objectivité culturelles s'imbriquent mutuellement et que la pensée rencontre son espace d'action et que l'esprit déborde l'individu (Wertsch, 1991).

Ainsi, la pensée des élèves Cristina et Miguel n'est alors pas quelque chose qui se passe seulement au plan cérébral. La pensée se produit aussi au plan social, dans le territoire de l'artefact. La règle de bois, la droite numérique, les signes mathématiques sur la feuille que tient Miguel pendant qu'il lit après Cristina, sont des artefacts qui *médiatisent et matérialisent* la pensée.

1.2 *La nature réflexive de la pensée*

La nature réflexive de la pensée signifie que la pensée de l'individu n'est pas une simple assimilation d'une réalité externe (comme le proposent les écoles empiristes), ni non plus une construction *ex-nihilo* (comme le propose le constructivisme). La pensée est une *ré-flexion*, c'est-à-dire un mouvement dialectique entre une réalité construite historiquement et culturellement et un individu qui la réfléchit (et la modifie) selon ses interprétations et ses sens subjectifs propres.

Dans l'exemple précédent, la pensée des élèves se développe au cours d'un processus complexe d'activité perceptuelle et d'actions sémiotiquement médiatisées selon l'interprétation et les sens subjectifs des élèves (par exemple, réinterpréter le problème sur la droite numérique, compter de

[5] Une discussion récente au sujet de la médiation sémiotique a été rapportée par Bartolini-Bussi et Mariotti (2008).

[6] On trouve une critique de la conception d'artefacts comme amplificateurs chez Cole et Griffin (1980).

deux en deux, etc.). En même temps, le problème sur lequel les élèves réfléchissent fait partie d'une réalité constituée historiquement. On trouve des problèmes sur des séquences de nombres (progressions arithmétiques) dans les mathématiques babyloniennes, problèmes qui furent théorisés plus tard par les pythagoriciens et par les différentes écoles numériques grecques (Robbins, 1921). Non seulement ladite réalité ne se présente pas de manière directe ou immédiate, comme le pensaient les empiristes, mais elle ne peut pas non plus être reconstruite à travers la seule expérience personnelle, car

> Aucune expérience personnelle, aussi riche soit-elle, ne peut parvenir à penser de manière logique, abstraite ou mathématique et établir individuellement un système d'idées. Pour cela, il faudrait non pas une vie mais des milliers. (Leontiev, 1968, p. 18)

Un des rôles de la culture (sur lequel nous allons nous arrêter au point suivant) est de mettre à la disposition des élèves des façons de percevoir la réalité et ses manifestations. Il s'agit de les faire accéder à des façons de *viser*, comme dirait Merleau-Ponty (1945), ou à des formes de recours à l'intuition, comme dirait Husserl (1931), une réalité à travers des systèmes de pensée qui habitent le monde.

En résumé, et dit de manière plus générale, la *ré-flexivité* de la pensée consiste en ce que, du point de vue phylogénétique, ce sont les individus qui créent la pensée et ses objets. Mais en même temps, du point de vue ontogénétique, dans l'acte de penser, n'importe quel individu concret est inséré dans sa réalité culturelle et dans l'histoire de la pensée humaine, lesquelles orientent sa propre pensée. « L'être social », dit Eagleton (1997, p. 12), « donne naissance à la pensée, mais en même temps est subsumé par celle-ci ».

1.3 *La dimension anthropologique de la pensée*

Il a été dit ci-dessus que la pensée est considérée comme une *ré-flexion* médiatisée du monde en accord avec *le mode de l'activité des individus*. Or, qu'est-ce que signifie que la *ré-flexion* qui constitue la pensée se réalise en accord avec le mode de l'activité des individus ? Ceci signifie que la manière avec laquelle nous arrivons à penser et à connaître les objets du savoir est *médiatisée* par des signifiés culturels qui vont au-delà du contenu même de l'activité à l'intérieur de laquelle se passe l'acte de penser. Il s'agit ici du deuxième niveau de médiatisation de l'activité dont nous avons parlé ci-dessus.

Comment cette médiatisation de deuxième ordre se manifeste-t-elle ? Elle se manifeste à travers son effet sur l'activité humaine et dont le produit est l'action réfléchie, c'est-à-dire la pensée. Pour comprendre ceci, notons que les signifiés culturels agissent comme des liaisons médiatisantes entre la pensée individuelle et la réalité culturelle. Ils se constituent en pré-requis et en conditions de possibilité de la pensée individuelle (Ilyenkov, 1977, p. 95). Les signifiés culturels font partie d'une structure symbolique, *orientent* l'activité et lui donnent une certaine *forme* affectant par là la pensée qui résulte de l'activité ainsi médiatisée. C'est pour cela que penser n'est pas tout simplement le résidu d'un schème et que penser n'est pas quelque chose que nous nous mettons simplement à faire. S'il est bien certain que l'activité sensible, médiatisée par les artefacts, entre dans les processus de la pensée et son contenu, la manière dont cela se passe est soumise aux signifiés culturels qui soutiennent l'activité.

Voici un exemple : la différence entre la pensée du scribe babylonien et du géomètre grec ne se réduit pas uniquement aux types de problèmes dont chacun d'eux s'est occupé, ni des artefacts utilisés pour penser mathématiquement, ni au fait que le premier réfléchissait dans un contexte lié à l'administration politique et économique, pendant que le second le faisait dans un contexte aristocratico-philosophique. La différence entre la pensée mathématique babylonienne et la pensée grecque est liée tant au mode des activités auxquelles toutes les deux se rapportent qu'à la *superstructure symbolique* qui, malgré son importance, n'a pas été prise en compte dans les théorisations contemporaines du concept d'activité. Cette superstructure symbolique, que dans d'autres travaux nous avons appelé *Systèmes Sémiotiques de Signification Culturelle (*Radford, 2003a), inclut des signifiés culturels tels que des conceptions autour des objets mathématiques (leur nature, leur mode d'existence, leur relation avec le monde concret, etc.) et des modèles sociaux de production de signifiés. La pensée du scribe babylonien est générée par un pragmatisme réaliste dans lequel les objets mathématiques « rectangle » « carré », etc., acquièrent une validité, objets que le géomètre grec du temps d'Euclide conçoit en termes de formes platoniciennes ou d'abstractions aristotéliciennes (voir la figure 3).

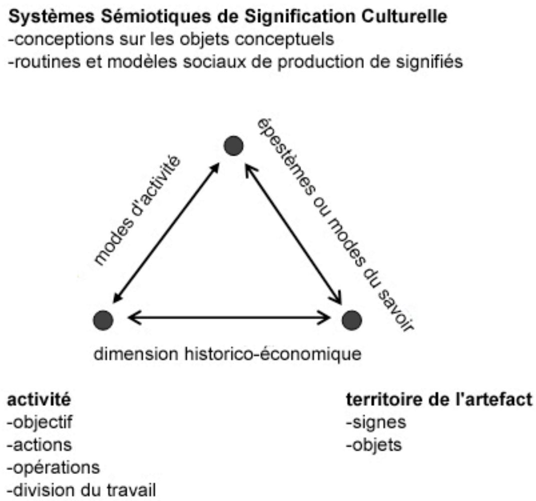


Figure 3. Les flèches montrent l'interaction entre les Systèmes Sémiotiques de Signification Culturelle avec l'activité et le territoire de l'artefact. Cette interaction génère les modes de l'activité et du savoir, modes qui, dans un mouvement dialectique, viennent à leur tour alimenter les sommets du triangle.

En interaction avec les activités (les objets, les actions, la distribution du travail, etc.) et avec la technologie de la médiation sémiotique (le territoire de l'artefact), les *Systèmes Sémiotiques de Signification Culturelle* donnent lieu, d'un côté, à des formes ou à des modes d'activités et, d'un autre côté, à des modes spécifiques du savoir ou *épistémés* (Foucault, 1966). Pendant que la première interaction donne lieu à des façons particulières dont les activités sont réalisées à un moment historico-économique, la seconde interaction donne lieu à des modes de savoir spécifiques qui permettent une identification des problèmes ou des situations « intéressantes » et délimitent les méthodes, les arguments, les évidences, etc., qui seront considérées valides dans la réflexion qui s'accomplit sur les problèmes et les situations dans une culture donnée[7]. C'est la complexité de l'activité et de la nature anthropologique diverse de celle-ci que le triangle de la figure 3 essaie d'illustrer.

Pour la théorie de l'objectivation, la diversité culturelle qui se manifeste dans les modes de l'activité humaine explique la diversité des formes que prend la pensée mathématique et que l'histoire nous illustre. Au lieu de voir ces formes historiques comme des versions « primitives » ou des états « imparfaits » d'une pensée qui se dirige vers la forme achevée que présente la pensée mathématique actuelle (ce qui n'est rien d'autre que la thèse de l'ethnocentrisme), la dimension anthropologique de la théorie de l'objectivation considère ces formes comme propres à des activités humaines contextuelles et renonce ainsi à privilégier la rationalité occidentale comme la rationalité *par excellence*.

Comme Spengler (1948, p. 68 et p. 70) l'a suggéré il y a de nombreuses années, les mathématiques d'une culture ne sont que la forme particulière avec laquelle l'homme perçoit son monde extérieur et contrairement à l'idée commune, l'« essence » de celles-ci n'est pas culturellement invariable. C'est précisément la diversité culturelle qui explique l'existence des univers de nombres aussi différents qu'irréductibles les uns des autres (ibid., p. 68).

La manière dont le scribe babylonien, le géomètre grec et l'abaquiste de la Renaissance arrivent à penser et à connaître les objets du savoir, la manière de poser leurs problèmes et de les considérer résolus, est encadrée par le mode même de l'activité et de l'épistémé culturelle correspondante (Radford, 1997, 2003a, 2003b).

En se rangeant dans la lignée des théorisations vygotskiennes, nous voyons donc que ce qui

[7] Ainsi, ce n'est pas seulement l'action du sujet qui constitue le schéma du concept (Piaget) ou sa marque ou son emblème (Kant), mais surtout le signifié de l'action en tant que moment de l'activité socio-culturelle même (une discussion plus détaillée a été rapportée par Radford, 2005).

prime dans la théorisation esquissée ici, ce n'est pas le *problème*, mais l'*activité* et son mode d'être. Cela aura, bien sûr, des répercussions dans la théorisation des phénomènes de la salle de classe. Nous y reviendrons.

2. Les bases épistémologiques et ontologiques de la théorie de l'objectivation

N'importe quelle théorie didactique doit à un moment ou à un autre (à moins de se limiter volontairement à une espèce de position naïve) clarifier sa position ontologique et épistémologique. La position *ontologique* consiste à préciser le sens dans lequel la théorie aborde la question de la nature des objets conceptuels (dans notre cas, la nature des objets mathématiques, ses formes d'existence, etc.). La position *épistémologique* consiste à préciser la manière dont, selon la théorie, ces objets peuvent (ou non) arriver à être connus.

Souvent, les théories didactiques contemporaines qui partent d'une application des mathématiques embrassent, même si ce n'est pas explicitement mentionné, une ontologie réaliste, et posent le problème épistémologique en termes d'abstraction. Bien sûr, la situation n'est pas aussi simple, comme Kant lui-même l'a reconnu.

Pour le réalisme, qui le plus souvent peut s'entendre comme la version platonicienne de la rationalité instrumentale (Weber, 1992) qui émerge à la Renaissance, l'existence des objets mathématiques précède l'activité des individus et est indépendante de celle-ci. Le platonicien, tout comme le réaliste, considère que les objets mathématiques sont indépendants de l'époque et de la culture. La différence est que, alors que les objets platoniciens ne se mélangent pas au monde des mortels, les objets du réaliste gouvernent notre monde. Selon l'ontologie réaliste, ceci explique le miracle de l'applicabilité des mathématiques à notre monde phénoménal (Colyvan, 2001). Naturellement, pour obtenir cela, le réalisme fait un acte de foi qui consiste à croire que la montée en abstraction jusqu'aux objets est certainement possible. La foi que Platon mettait dans le discours social raisonné (*logos*) et que Descartes mettait dans la cogitation avec soi-même, le réalisme la met dans l'expérience scientifique.

La position ontologique et épistémologique de la théorie de l'objectivation s'éloigne de l'ontologie platonicienne et réaliste, et de sa conception des objets mathématiques comme objets éternels, antérieurs à l'activité des individus. En s'éloignant de l'ontologie idéaliste, la théorie s'éloigne de l'idée que les objets sont des produits de l'esprit qui opère replié sur lui-même ou suivant les lois de la logique (ontologie rationaliste). La théorie de l'objectivation suggère que les objets mathématiques sont générés historiquement au cours de l'activité mathématique des individus. De manière plus précise, les objets mathématiques *sont des schèmes fixes d'activité* *réflexive (dans le sens qui a été expliqué auparavant) incrustés dans le monde en constant changement de la pratique sociale médiatisée par les artefacts.*

L'objet cercle et l'objet plan, par exemple, sont des schèmes d'activité dont les origines résultent non pas de la contemplation et abstraction intellectuelle des objets ronds ou des plans que les individus ont rencontrés autour d'eux, mais de l'activité sensorielle qui a permis à ces individus d'en prendre conscience et de les distinguer.

> Les hommes purent voir le Soleil rond seulement parce qu'ils arrondirent de l'argile avec leurs mains. Avec leurs mains ils donnèrent forme à la pierre, polirent ses contours, lui donnèrent un aspect plan (Mikhailov, 1980, p. 199).

Cette expérience de travail tactile reste fixée dans le langage, lequel incarne ainsi les signifiés originaux, de manière que

> le signifié du mot « bord », « plan », « ligne » ne vient pas d'une abstraction des aspects généraux des choses dans le processus de contemplation (Mikhailov, ibid.),

mais de l'activité qui se perd dans l'origine de l'humanité. Loin de se consacrer uniquement à nos sens, notre relation à la nature et au monde est filtrée par des catégories conceptuelles et des signifiés culturels qui font que

> l'homme moderne peut contempler la nature seulement au travers du prisme de toutes les habiletés sociales qui ont été accumulées par ses prédécesseurs. (Mikhailov, ibid.)

Nous terminons ce paragraphe par une observation générale sur l'évolution des objets mathématiques qui sera nécessaire pour notre discussion sur l'enseignement et l'apprentissage. Au cours du temps, l'activité dépose sa marque sur ses produits conceptuels (Leontiev, 1984). Comme tout objet mathématique, le concept de cercle, en tant que réflexion du monde dans la forme de l'activité des individus, a été exprimé par d'autres formes tout au long de l'histoire. Par exemple à travers une parole, un dessin, une formule, une table numérique. Chacune de ces expressions offre un signifié différent, qui s'ancre aux autres et vient constituer, comme dirait Husserl, des couches *noétiques* de l'objet. Comme c'est l'activité des individus qui forme la racine génétique de l'objet conceptuel, l'objet possède une dimension expressive variée qui va au-delà d'un simple contenu conceptuel « scientifique ». Cette dimension expressive renferme également des aspects rationnels, esthétiques et fonctionnels de sa culture.

3. Apprentissage comme objectivation culturelle du savoir

3.1 *Deux sources d'élaboration de signifiés*

Dans les paragraphes précédents nous avons vu que, du point de vue phylogénétique, l'activité humaine est génératrice d'objets conceptuels, lesquels se transforment en source de changements dans les activités elles-mêmes. Du point de vue ontogénétique, le problème central est d'expliquer comment se réalise l'acquisition du savoir déposé dans la culture : ceci est un problème fondamental de la didactique des mathématiques en particulier et de l'apprentissage en général.

Les théories classiques de la didactique des mathématiques posent le problème d'une construction ou reconstruction du savoir culturel de la part de l'élève[8]. L'idée de « construction » du savoir tire son origine de l'épistémologie de Kant au XVIII^e siècle. Pour Kant, l'individu n'est pas seulement un penseur absorbé que l'activité mentale, si elle est bien réalisée, conduira à de véritables mathématiques comme le soutenaient les rationalistes (Descartes, Leibniz, etc.) ; ce n'est pas non plus un individu passif qui reçoit des informations sensorielles pour former des idées, comme le proposaient les empiristes (Hume, Locke, etc.). Pour Kant, le penseur est un être en action ; l'individu est l'artisan de sa propre pensée (cette idée kantienne est analysée dans un article précédent ; voir Radford (2005)). En réalité, Kant exprime de façon cohérente et explicite le changement épistémologique qui était en train de s'opérer petit à petit lors de l'apparition d'une manufacture systématique et à plus grande échelle à la Renaissance, changement épistémologique qu'accompagne l'émergence du capitalisme et qu'Arendt (1958) résume de la façon suivante : l'ère moderne est marquée par un déplacement dans la conception de ce que signifie le savoir ; le problème central de la connaissance repose sur un déplacement qui va du *quoi* (l'objet du savoir) au *comment* (le processus), de sorte que, à la différence de l'homme du Moyen-Âge, l'homme moderne peut comprendre seulement ce que lui-même a fait.

Pour la théorie de l'objectivation, l'apprentissage ne consiste pas à construire ou reconstruire une connaissance. *Il s'agit* de l'acquisition par l'élève de formes culturelles de réflexion sensible et d'action sémiotique, instrumentale ou objectuelle. Mais nous devons faire attention aux sens des termes ici. En effet, le terme « acquisition » est généralement compris comme *possession*. Ce n'est

---

[8] Naturellement, il y a des nuances différentes selon la conception que la théorie se fait du sujet (c'est-à-dire de l'élève). Partant d'une position extrême, le constructivisme radical va plus loin que toutes les formes de constructivisme. Brousseau (2004) résume les difficultés auxquelles s'affronte cette théorie en affirmant « En didactique, le constructivisme radical est une absurdité », et adopte un constructivisme piagétien plus modéré, qui, néanmoins, conduit la théorie des situations à une série de paradoxes inévitables.

pas dans ce sens que nous le prenons ici. Nous le prenons dans son sens étymologique. Le nom « acquisition » vient du latin *adquaerere*, qui veut dire « chercher ». Acquisition désigne donc, dans son sens originel, une attitude, un processus d'ouverture. Nous le prenons comme mouvement d'ouverture sur le monde et sur les autres.

C'est au cours de l'acquisition des formes culturelles de réflexion que l'élève parvient à *donner du sens aux objets matériels et conceptuels qu'il rencontre dans sa culture*. L'acquisition du savoir est un processus d'élaboration active de signifiés. C'est ce que nous appellerons plus loin un processus d'*objectivation*. Pour le moment, ce qui nous intéresse, c'est de discuter de deux sources importantes d'élaboration de signifiés qui soutiennent l'acquisition du savoir.

Le savoir intégré dans les artefacts

Une des sources d'acquisition du savoir résulte de notre contact avec le monde matériel, le monde des artefacts culturels de notre environnement (objets, instruments, etc.) et dans lequel se trouve intégré le savoir de l'activité cognitive des générations passées. S'il est bien certain que certains animaux arrivent à utiliser des artefacts, il n'en demeure pas moins que ces artefacts n'acquièrent pas pour eux une signification. En effet, le bout de bois que le chimpanzé utilise pour atteindre un fruit perd sa signification après que l'action a été exécutée (Köhler, 1951). C'est pour cela que les animaux ne conservent pas d'artefacts[9]. De plus – et cela est un élément fondamental de la cognition humaine – à la différence des animaux, l'être humain est profondément affecté par l'artefact : au contact de celui-ci, l'être humain restructure ses actions (Baudrillard, 1968) et forme des capacités motrices et intellectuelles nouvelles, comme l'anticipation et la perception (Vygotsky et Luria, 1994).

Le monde des artefacts apparaît alors comme une source importante dans le processus d'apprentissage, mais ce n'est pas le seul. Les objets ne peuvent pas rendre claire l'intelligence historique qu'ils incarnent. Pour cela, on a besoin de la mettre en œuvre dans les activités partagées *et en contact avec d'autres personnes* sachant déchiffrer ces contenus intellectuels et nous aider à l'acquérir. Sinon le langage symbolico-algébrique resterait réduit à un ensemble de hiéroglyphes. L'intelligence dont est porteur ce langage ne pourrait pas être identifiée sans l'activité sociale réalisée à l'école. C'est dans cette dimension sociale que se constitue pour la théorie de l'objectivation la seconde source essentielle de l'apprentissage[10].

---

[9] À ma connaissance, la seule exception est celle des corbeaux de la Nouvelle Calédonie ; voir Bluff, Weir, Rutz, Wimpenny et Kacelnik (2007). Je remercie Michael Roth d'avoir attiré mon attention sur cet article.

[10] L'école historico-culturelle de Vygotsky a exprimé ce point de façon convaincante. Voir par exemple Léontiev, 1984 ; 1968 ; Vygotsky, 1981b.

L'interaction sociale

Bien que l'importance de la dimension sociale ait été soulignée par une infinité de travaux récents sur l'interaction dans la salle de classe, il y a des différences subtiles quant à son apport cognitif (Cobb et Yackel, 1996 ; Kidron, Lenfant, Bikner-Ahsbahs, Artigue et Dreyfus, 2008 ; Sierpinska, 1996 ; Steinbring, Bartolini Bussi et Sierpinska, 1998). Souvent, l'interaction est vue comme une négociation de signifiés ou comme une simple ambiance qui offre les stimulus d'adaptation que requiert le développement cognitif de l'élève. Le problème est que l'individu en général et l'élève en particulier ne trouvent pas seulement dans la société et dans la salle de classe une espèce de mur contre lequel ils se heurtent et se frottent pour s'adapter ; il ne s'agit pas seulement de conditions « externes » auxquelles le sujet doit accommoder son activité. Le point crucial est que les activités, les moyens matériels qui les médiatisent et ses objets sont imprégnés de valeurs scientifiques, esthétiques, éthiques, etc., que viennent recouvrir les actions que réalisent les individus et la réflexion que ces actions exigent. Comme nous l'avons vu dans la première partie de cet article, les actions que les individus réalisent sont immergées dans des modes culturels d'activité. C'est pour cela que la salle de classe ne peut être considérée comme un espace fermé, replié sur lui-même, dans lequel se négocient les normes du savoir, car ces normes ont toute une histoire culturelle et, comme telles, préexistent à l'interaction qui se produit dans la salle de classe. On ne peut pas non plus voir la salle de classe comme une espèce d'ambiance biologique dans laquelle l'individu agit selon ses mécanismes invariables d'adaptation générale.

Au lieu de remplir une fonction purement d'adaptation, de catalyseur ou de facilitateur, dans la perspective théorique que nous sommes en train d'ébaucher, l'interaction est consubstantielle de l'apprentissage.

Nous voyons alors qu'il y a deux éléments qui jouent un rôle basique dans l'acquisition du savoir que sont le monde matériel et la dimension sociale. Ces dimensions ont une importance psychologique profonde dans la mesure où l'acquisition du savoir est, à la fois, une prise de conscience de concepts culturels et un processus de formation des capacités spécifiques de l'individu. C'est pour cela que, à l'intérieur de notre perspective, apprendre n'est pas simplement s'approprier quelque chose. C'est plutôt le processus même dans lequel se forment nos capacités humaines.

3.2 *L'activité de l'apprentissage*

Un élément central dans le concept d'activité tel que nous le concevons ici est l'*objectif* de l'activité (Leontiev, 1984). L'objectif peut être, par exemple, que les élèves acquièrent une forme de pensée algébrique ou une forme de pensée géométrique, etc.. Or ces objectifs ne peuvent pas être atteints *in abstracto*. Ils ne peuvent être atteints que par la participation des élèves à des pratiques de pensée qui sont nouvelles pour eux. L'objectif général s'exprime alors par l'entremise d'une activité sollicitant des schèmes d'action réflexive. C'est dans ce contexte que, dans le projet didactique de la classe, pour que cet objectif puisse se réaliser, le professeur propose aux élèves une série de problèmes mathématiques. Résoudre ces problèmes se convertit en *buts* qui guident les actions des élèves. Ces problèmes – chargés dès le début d'un contenu culturel et conceptuel – forment des trajectoires potentielles pour atteindre l'objectif général.

Nous devons souligner que, depuis la perspective de la théorie de l'objectivation, faire des mathématiques ne se réduit pas à résoudre des problèmes. Sans enlever de mérite au problème dans la formation de la connaissance (voir par exemple Bachelard, 1986), pour nous, la résolution de problèmes n'est pas une fin en soi mais un moyen pour atteindre ce type de *praxis cogitans,* c'est-à-dire cette réflexion culturelle que nous appelons la pensée mathématique. Ainsi, derrière le but de la leçon, reste un objectif majeur et plus important, l'objectif général de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, qui est l'élaboration de la part de l'élève d'une réflexion définie comme relation *commune et active* avec sa réalité historico-culturelle.

Autrement dit, apprendre des mathématiques n'est pas simplement apprendre à *faire* des mathématiques (résoudre des problèmes) mais apprendre à *être* en mathématiques. La différence entre "faire" et "être en" est immense et, comme nous le verrons plus loin, a des conséquences importantes non seulement dans la conception des activités mais dans l'organisation même de la classe et le rôle qu'y jouent élèves et professeurs.

3.3 *L'objectivation du savoir*

De façon succincte, l'objectif majeur de l'enseignement des mathématiques est que l'élève parvienne à réfléchir et à agir en accord avec certaines formes mathématiques culturelles de pensée constituées historiquement, formes de pensée qui se distinguent d'autres formes de réflexion (par exemple littéraire ou musicale) dans la mesure où, dans la réflexion mathématique, la relation de l'individu au monde est centrée autour des idées de forme, de nombre, de temps d'espace, etc.. C'est cet accent particulier sur la forme, le nombre, le temps, l'espace, etc., qui distingue la pensée mathématique des autres formes de pensée.

Pour atteindre cet objectif, nous devons recourir à la *pratique*, pour la simple raison que nous ne disposons pas d'un langage qui puisse *décrire* la pensée mathématique. Il n'y a pas, en effet, une formulation linguistique possible de la pensée mathématique dont la lecture – pour attentive qu'elle soit – puisse amener à la compréhension de celle-ci. La pensée, nous l'avons déjà dit (Radford, 2003b), va au-delà du discours : c'est une *praxis cogitans*, quelque chose qui s'apprend en agissant.

La théorie de l'objectivation ne voit pas, cependant, cet apprentissage comme une simple imitation ou une participation à une pratique déjà établie, mais comme la fusion entre une subjectivité qui cherche à percevoir cette façon de réfléchir linguistiquement inarticulable et ce qui ne peut se montrer qu'à travers l'action.

Sans doute, il y a une relation étroite entre la pensée mathématique et ses objets dans le sens où ces objets ne peuvent être perçus qu'à travers une pensée qui leur est propre. Mais comment cela est-il possible ? Pour se constituer, la pensée semble supposer l'existence de l'objet. D'un autre côté, l'objet ne peut arriver à exister sans la pensée qui le produit.

Le mystère de cette relation se dissout si nous revenons à ce que nous avons dit dans la première partie de cet article. L'objet mathématique conçu comme *schème fixe d'activité réflexive incrusté dans le monde en constant changement de la pratique sociale, médiatisée par les artefacts* ne pourra pas être perçu autrement qu'à travers l'activité réflexive elle-même.

Comme c'est le cas de tous les objets conceptuels, pour arriver à connaître les objets mathématiques, il est nécessaire de réaliser à leur propos une *activité déterminée*, c'est-à-dire une activité qui dégage les traits essentiels des objets en question (Leontiev, 1968, p21 ; Bakhurst, 1988). Il s'agit de mettre l'objet et des activités qui lui sont corrélées en relation mutuelle.

On peut exprimer autrement ces idées : l'objet mathématique n'est pas un objet au sens ordinaire du terme. En fait, parler d'objet mathématique comme on parle des objets concrets n'est qu'une métaphore trompeuse : l'objet mathématique est un objet *intentionnel*. Il est *objet-intentionnel-d'activité*. C'est pour cela qu'il n'est pas exact de dire que l'accès à l'objet n'est possible que grâce aux représentations qu'on fait de celui-ci. Le problème de l'accès aux objets mathématiques n'est pas un problème de représentation. Son accès n'est possible que par l'activité sociale et médiatisée qui le sollicite [11].

Ainsi, l'enseignement consiste à mettre sur pied des activités contextuelles et à les maintenir en mouvement. Ce sont des activités situées dans l'espace et dans le temps, qui s'orientent vers un schème donné d'activité réflexive tissé dans la culture. Ce mouvement possède trois caractéristiques essentielles. Premièrement, l'objet (tel que défini ci-dessus) n'est pas un objet

[11] Cependant, la corrélation entre un objet mathématique et son activité ne doit pas être réduite au plan purement logique ou au plan de la relation sujet – objet. Parler d'activité dans une perspective vygotskienne ne veut pas dire l'activité du sujet autour d'une situation qui vise un objet, mais l'activité dont le sujet est participant avec d'autres sujets (élèves, professeur, …). Ce point deviendra plus clair dans la section qui suit.

monolithique ou homogène. C'est un objet composé de couches ou de stratifications de généralité (Radford, 2009a). Deuxièmement, du point de vue épistémologique, ces couches de généralité seront plus ou moins élevées en accord avec les caractéristiques des signifiés culturels du schème donné de l'activité en question (par exemple, le mouvement kinesthésique qui forme le cercle ; la formule symbolique qui l'exprime comme ensemble de points à égale distance de son centre, etc.). Troisièmement, du point de vue cognitif, ces couches de généralité sont perçues de façon progressive par l'élève. Le « ah, ah ! » qui est devenu si populaire en partie grâce à la théorie de la Gestalt n'est en somme que le point d'arrivée d'un long processus de prise de conscience.

L'apprentissage consiste à apprendre à reconnaître ou à percevoir ces couches de généralité. Comme l'apprentissage est *ré-flexion*, apprendre suppose un processus dialectique entre sujet et objet médiatisé par la culture, un processus dans lequel, à travers son action (sensorielle ou intellectuelle), le sujet vient prendre conscience de l'objet.

L'objectivation, c'est précisément ce processus social de prise de conscience progressive de l'*eidos* homérique, c'est-à-dire de quelque chose qui se dresse en face de nous, une figure, une forme, quelque chose dont nous percevons graduellement la généralité, en même temps que nous lui donnons un sens. Étymologiquement parlant, l'objectivation veut précisément dire la rencontre avec quelque chose qui existe devant nous et qui s'*objecte* ou se présente à nous petit à petit (Radford, 2002). L'objectivation, c'est ce perçu qui se dévoile dans le geste qui compte ou qui désigne, perçu qui se découvre dans l'intention qui s'exprime dans le signe ou dans le mouvement kinesthésique que médiatise l'artefact au cours de l'activité pratique sensorielle, quelque chose susceptible de se convertir en une action reproductible, dont le sens vise à ce schème eidétique culturel qui est l'objet conceptuel lui-même [12].

4. La salle de classe comme l'espace du je-communautaire

4.1 Un *être-avec-d'autres*

La salle de classe est l'espace social où l'élève élabore cette réflexion définie comme une relation commune et active avec sa réalité historico-culturelle [13]. C'est là où se passe la rencontre du sujet et de l'objet du savoir. L'objectivation qui permet cette rencontre est un processus qui n'est pas individuel mais social. La socialité du processus, néanmoins, ne doit pas être comprise comme

[12] Voir à ce sujet Radford, 2002, 2003c, 2004.

[13] Le terme « élaborer » doit être compris dans son sens médiéval (mais pas pour autant obsolète) de *labour*, c'est-à-dire de travail sensuel commun.

une simple interaction d'échanges, une espèce de jeu entre adversaires capitalistes dans lequel chacun investit des biens avec l'espoir de terminer avec plus. Cela signifie ici le processus de formation de la conscience, que Leontiev caractérisait comme *co-sapiencia*, c'est-à-dire savoir en commun ou savoir-avec-d'autres.

Naturellement, ces idées impliquent une reconceptualisation de l'élève et de son rôle dans l'acte d'apprentissage. Dans la mesure où les théories didactiques conceptualisent l'individu comme un sujet auto-régulé et auto-équilibrant, capable de réfléchir comme un scientifique et qui – comme le pointent Martin et ses collaborateurs – paraît porter d'une quelconque manière dans son propre intérieur les conditions de sa croissance, nécessitant seulement un entourage facilitateur pour atteindre, à travers l'expérience « personnelle », sa complète socialisation et son potentiel intellectuel [14], il n'y a vraiment pas lieu ni de penser autrement la sociabilité de l'élève ni de conceptualiser la salle de classe comme quelque chose d'autre que ce fameux espace individuel d'adaptation.

C'est que les théories contemporaines de la didactique des mathématiques se sont approprié le concept d'individu formulé par Kant et les autres philosophes du Siècle des Lumières. Dans ce contexte, l'éducation se justifie en tant qu'elle assure la formation d'un sujet autonome, compris dans le sens d'être capable de faire quelque chose par soi-même, sans l'aide des autres. L'autonomie est, en effet, un thème central de l'éducation moderne. Elle a servi de fondement aux théorisations du socio-constructivisme (voir, par exemple, Yackel et Cobb, 1996) et de la théorie des situations (Brousseau, 1986 ; Brousseau et Gibel, 2005, p. 22). Lié à cette conception de l'autonomie, se trouve un autre concept-clef kantien : celui de liberté. Il ne peut pas y avoir d'autonomie sans liberté, et la liberté signifie l'usage convenable de la Raison suivant ses propres principes, car « nous ne voyons pas les principes sinon à travers la raison » (Kant, 1803/1980, p. 119).

Comme le Siècle des Lumières n'a pas pu concevoir la possibilité d'une multiplicité de raisons et qu'il n'a pas pu faire mieux que de postuler la raison occidentale comme *la* Raison, la vie en communauté implique, pour cette philosophie et ses disciples, le respect d'un devoir qui, au fond, n'est qu'une manifestation de cette raison universelle, dont l'épitomé sont les mathématiques. C'est cette supposée universalité de la raison qui a amené Kant à fusionner les dimensions éthique, politique et épistémologique, et à affirmer que « faire quelque chose par devoir, c'est obéir à la raison. » (Kant, 1803/1980, p. 129)

---

[14] Martin (2004) ; Martin, Sugarman et Thompson (2003).

Or, pour la théorie de l'objectivation, l'individu n'est pas pensé comme étant seulement mû par des besoins biologiques auto-regulants et auto-équilibrants. Certes, l'individu est membre de l'espèce animale. Mais, justement, ce qui le distingue des autres espèces, c'est qu'il est un être *culturel*. C'est ainsi que le rôle de l'élève ne se limite pas à résoudre des problèmes selon des démarches guidées par des mécanismes d'adaptation. Son rôle consiste à vivre l'apprentissage dans un contexte où apprendre, c'est apprendre à être avec d'autres, à s'ouvrir à la compréhension d'autres voix et d'autres consciences, en un mot, à *être-avec-d'autres* (Radford, 2009b). Cette forme d'être constitue l'essence de ce que, dans la théorie, on appelle le *je communautaire* et dont le substrat éthique est celui de l'*engagement* envers autrui. La forme de socialité qui en découle non seulement laisse son empreinte dans le contenu conceptuel poursuivi, mais encore est consubstantielle de celui-ci.

Pour résumer les idées antérieures, nous soulignerons le fait que, pour la théorie de l'objectivation, l'autonomie n'est pas suffisante pour rendre compte de la façon *d'être en* mathématiques. L'élève qui résout avec succès des problèmes, mais qui est incapable de s'expliquer ou de comprendre ou de s'*intéresser* aux solutions des autres ou d'aider les autres à comprendre la sienne est à peine à mi-chemin de ce que nous entendons par réussite en mathématiques. C'est pour cela que le professeur dispose d'une série d'*actions d'inclusion* (c'est-à-dire d'actions visant à inclure chaque élève dans la communauté). Ces actions sont conçues de manière à ce que l'élève qui résout correctement des problèmes mathématiques sans pouvoir répondre à la dimension interpersonnelle de la communauté gagne peu à peu son espace dans celle-ci. L'idée d'autonomie comme auto-suffisance est remplacée par l'idée d'*être-avec-d'autres*. Au lieu de concevoir la salle de classe comme espace de négociation personnelle de signifiés ou comme milieu antagoniste, la classe collabore et coopère avec l'élève pour que celui-ci se transforme en élément du collectif.

4.2 *Le professeur*

On disait dans la section précédente que les principes de la théorie de l'objectivation renvoient à une reconceptualisation complète de l'élève et de son rôle dans l'acte d'apprentissage. Bien sûr, il en va de même du concept de professeur.

Pour les théories dont l'apprentissage est en fin de compte un acte privé, individuel, le professeur apparaît à la fois « familier » et « énigmatique » (j'emprunte ces adjectifs à un article de Chevallard, (1997)). Il est familier, car il est toujours là. Mais il est énigmatique, car on ne sait pas trop ce qu'il a à faire dans les affaires des autres ! Le professeur est en fait mis dans une situation paradoxale : il faut qu'il soit présent, mais pas trop… Ainsi, dans quelle mesure le professeur peut-il intervenir au cours de l'apprentissage de l'élève sans porter préjudice à son autonomie ? Le professeur, en donnant une réponse ou en proposant une idée lors de la résolution d'un problème, n'est-il pas en train d'imposer un point de vue personnel, d'empêcher l'élève de construire ses « propres » connaissances et, par là, de transgresser les limites du domaine de l'autonomie de l'apprenant ?

À l'intérieur des contraintes que lui impose la conception individualiste de l'apprentissage, le professeur est appelé à effectuer un itinéraire que certains considèrent comme impossible – une marche sur une sorte de terrain miné le long d'une enceinte infranchissable qui délimite l'espace de la collectivité et de l'individualité. « Nous marchons », disent deux socio-constructivistes, « sur le bord qui sépare la communauté et l'individuel. » (Fosnot et Dolk, 2001, p. 28)

Pour la théorie de l'objectivation, le rôle du professeur n'est pas de promouvoir l'idée individualiste d'autonomie de la philosophie rationaliste. La théorie prône une idée de subjectivité et du soi qui va au-delà de l'individualisme anti-historique du Siècle des Lumières. Elle cherche à promouvoir un concept de personne autonome qui est sensible à l'importance de l'histoire, au contexte, et aux autres. L'autonomie apparaît ainsi conçue tant comme un engagement social que comme une réalisation personnelle, car, dans cette perspective, la réalisation personnelle ne prend du sens qu'à l'intérieur d'un projet social. Dans ses travaux sur les cultures anciennes de la Grèce et de Rome, Hannah Arendt a montré qu'en opposition aux idées modernes d'autonomie comme étant quelque chose qui vient de l'intérieur – un attribut personnel et individuel – l'autonomie, pour le citoyen grec et romain, avait une connotation civico-sociale : l'autonomie était rattachée à l'action dans la sphère publique ; c'était la caractéristique de l'existence humaine dans le monde. Malheureusement, comme le mentionne Arendt (1993, p. 157), notre tradition philosophique est presque unanime à penser que la liberté commence quand les individus ont abandonné le royaume de la vie politique ; elle ne commence pas lors de notre association avec les autres. Au contraire, elle commence dans l'isolement avec soi-même.

C'est justement les idées du je communautaire et d'autonomie comme action publique d'engagement envers autrui que le professeur vise en classe. En fait, le professeur vise à promouvoir l'*activité* de classe comme une *forme de vie*. Cette idée de la classe de mathématiques en tant que forme de vie va à l'encontre de la conception instrumentale de la classe de mathématiques empruntée au mouvement d'efficacité de l'ingénierie industrielle et dont un des buts est de concevoir l'enseignement-apprentissage comme un phénomène de contrôle de variables.

Comme l'affirme l'éducateur canadien Ted Aoki, dans une telle perspective, un professeur compétent

> est quelqu'un qui a des compétences et techniques orientées vers le contrôle efficace. Une telle vue de l'implémentation du « savoir-comment-faire » est imbriquée dans un cadre conceptuel scientifique et technologique de l'action qui réduit la compétence humaine à la raison et à l'action instrumentale. Le professeur est vu ici comme un être orienté et gouverné par des règles à l'intérieur d'un ethos manipulatif. (Aoki, 2005 , p. 113)

L'activité de classe comme forme de vie ne peut pas être approchée par le biais de l'instrumentalisation ; elle offre, au contraire, des manières d'être et de connaître selon la manière dont les élèves s'engagent en groupe dans leur quête du avoir culturel visé.

5. Trois phases de l'activité en classe

Puisqu'il est hors de question d'illustrer ici par des exemples tous les concepts de la théorie analysés précédemment, dans cette section, nous présentons la structure générale d'une leçon en faisant référence à des passages clés d'une leçon sur le mouvement dans une classe de 10e année (15-16 ans). Le lecteur intéressé peut néanmoins consulter nos travaux expérimentaux (p. ex., Radford, 2000, 2003c, 2009a ; 2009c ; Radford, Bardini et Sabena, 2007 ; Radford et Demers, 2004 ; Radford, Demers et Miranda, 2009).

5.1 *Le travail en petits groupes*

En général, la classe commence par l'introduction du professeur qui présente ce qu'il faut faire, sans pour autant dire *comment* le faire. Un principe clé de l'activité d'enseignement-apprentissage consiste en fait à laisser aller les élèves aussi loin qu'ils le peuvent dans l'objectivation de la forme de pensée visée. Pour utiliser une terminologie de la théorie des situations didactiques, les élèves sont mis d'emblée dans une situation *adidactique*. Mais, en général, ce n'est pas lors de la situation adidactique que l'objectivation aura lieu. Car l'apprentissage implique l'arrivée à un nouveau niveau conceptuel qui se traduit par la possibilité de mobiliser des raisonnements tout à fait nouveaux, c'est-à-dire des raisonnements qui n'étaient pas à la portée de l'élève auparavant. La théorie des situations présuppose ici une prémisse constructiviste : ce mouvement vers la nouveauté doit provenir de l'élève *lui-même* dans son commerce avec la « situation fondamentale ». La construction de l'objet par l'élève est la réponse à la solution optimale qu'exigeait la situation. Dans la théorie de l'objectivation, le mouvement vers la nouveauté qui témoigne de l'apprentissage *peut* provenir de l'élève lui-même, mais *pas forcément*. En fait, la plupart du temps, ce qui déclenche l'apprentissage ne vient pas de l'élève lui-même. L'élément déclencheur vient de l'extérieur. Il passe par l'*intervention du professeur*.

En effet, l'apprentissage a lieu en général dans une *zone proximale de développement* dont la préparation est la phase adidactique. Rappelons que la zone proximale de développement, comme nous l'entendons ici, est constituée par les formes de raisonnement, de réflexion ou de résolution de problèmes qui deviennent accessibles à l'élève (ou au groupe d'élèves) grâce à l'*interaction* avec le professeur (ou avec d'autres personnes).

C'est donc avec cette conception de l'apprentissage que les élèves sont amenés à travailler en petits groupes dès le départ. Les prémisses de la théorie de l'objectivation au sujet de la nature sociale de la pensée rendent inutile une phase préalable de travail individuel. Lors de ce travail en petits groupes dont le but est d'aller aussi loin que possible, les élèves peuvent échanger des idées avec d'autres groupes. Par exemple, le professeur peut promouvoir un échange *entre* les groupes (p. ex., Groupe 1 et Groupe 2 échangent entre eux ; Groupe 3 et Groupe 4 échangent entre eux, etc.). Une copie des solutions et des raisonnements du Groupe 1 est envoyée au Groupe 2 et vice-versa. Après que les groupes ont eu l'occasion de lire et d'étudier le travail du groupe associé, les groupes en question se rencontrent face à face et discutent. Comme on le voit, l'implémentation des activités de classe ne se limite pas à la conception des problèmes mathématiques mais inclut une organisation assez sophistiquée de la salle de classe en accord avec les principes de la *classe* comme *collectif* et de l'*activité* comme *forme de vie*, ce que nous avons mentionné auparavant.

Dans chaque petit groupe, les élèves sont encouragés à travailler ensemble pour arriver à la solution des problèmes qu'on leur a donnés. Les élèves et le professeur sont conscients qu'il y a des différences individuelles qui amènent des formes différentes de participation. Les participations qui paraissent « moins profondes » (comme les participations périphériques, dans le sens de Lave et Wenger, 1991) ne sont pas à écarter, à condition que l'élève en question *soit-avec-son-groupe*, c'est-à-dire que l'élève soit attentif à ce que le groupe est en train de discuter, sollicite des explications qui lui permettent de suivre la discussion et les actions du moment, collabore avec son groupe, etc..

Lors du travail en petits groupes, le professeur circule et discute avec les élèves. Celui-ci va intervenir dans des moments où, par exemple, il croit que la discussion est en train de stagner ou que les élèves ne sont pas allés aussi loin qu'il l'espérait. Il va aussi poser des questions non seulement pour comprendre ce que font les élèves, mais parce que le langage joue un rôle crucial dans l'objectivation du savoir, dans la mesure où le langage permet une articulation profonde de la réflexion sensible que constitue la pensée.

Bien sûr, pour maintenir une réflexion soutenue entre les membres du groupe, avec le professeur et avec les autres groupes, les problèmes doivent être suffisamment complexes (Glaeser, 1999). Ils doivent faire apparaître les stratifications de généralité des objets mathématiques dont nous avons parlé précédemment. C'est ici que l'analyse *a priori* joue un rôle important (Artigue, 2009).

Pour illustrer ces idées, voyons un extrait d'une leçon sur l'interprétation du mouvement dans une classe de 10e (15-16 ans). La leçon incluait un artefact qui mesurait la distance à un objet au moyen de l'émission-réception des ondes (calculateur Based Ranger ou CBR ; voir fig. 4).

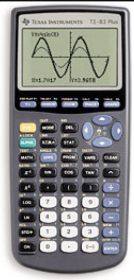
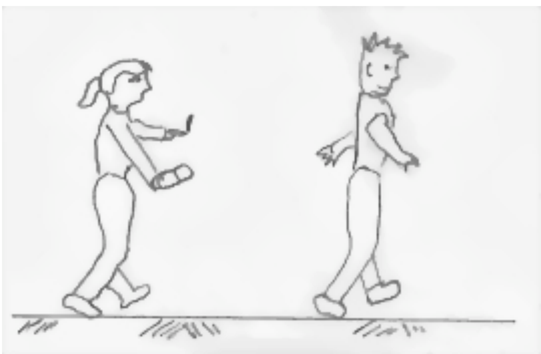
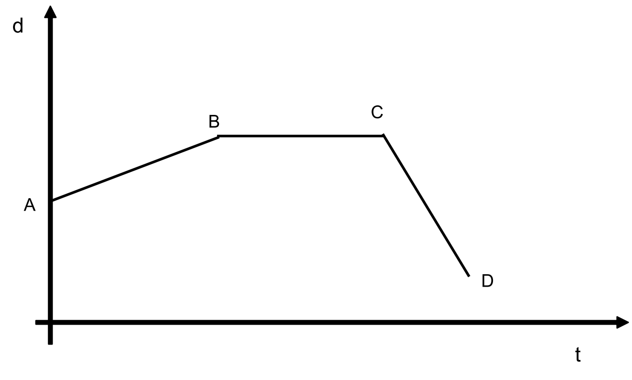


Figure 4. Le calculateur Based Ranger (à gauche) est un artefact conçu pour étudier les objets en mouvement : au moyen de l'émission d'ondes, le CBR rassemble les données de sa distance à l'objet en question. En se connectant à une calculatrice graphique (par exemple la TI83+, montrée sur la photo à droite), il est possible d'obtenir des graphiques espace-temps, vitesse-temps, etc.

Les élèves avaient commencé à utiliser le CBR l'année précédente. L'énoncé d'un des problèmes était le suivant :

Deux élèves, Pierre et Marthe, se mettent à une distance d'un mètre l'un de l'autre et commencent à marcher en ligne droite. Marthe, qui est derrière Pierre, porte une calculatrice connectée à un CBR. Le graphique obtenu est reproduit ci-dessous. Décrivez comment Pierre et Marthe ont pu faire pour obtenir ce graphique.





Dans cette démarche, le problème qui suivait demandait aux élèves de vérifier leurs hypothèses en effectuant la marche dans un couloir de l'école.

Comme d'habitude, les élèves ont travaillé en petits groupes de 3. Dans les problèmes antérieurs, ils avaient été confrontés à des situations de mouvement dans lesquelles soit le CBR soit la cible restait fixe. Dans le cas du problème discuté ici, le CBR et la cible étaient en mouvement. Il s'agit donc d'un problème de mouvement relatif. Comme nous l'espérions, les difficultés conceptuelles ont été importantes. En général, les élèves transformaient l'énoncé du problème de façon à ce qu'ils puissent le résoudre : les élèves supposaient que Marthe ne bougeait pas, ce qui est illustré par la discussion qu'ont eue Samuel, Carla et Jenny, discussion dont nous reproduisons quelques fragments ci-après :

1. Samuel : Ok, Pierre avance lentement de A à B... Il s'arrête quelques secondes (voir fig. 5, photo 1), ensuite il court à D (fig. 5, photo 2).
2. Carla : Ah, oui ! Il a marché, s'est arrêté, a couru.
3. Jenny : Mm-hmm…
4. Samuel :Attendez, attendez une seconde...[Pierre] est revenu vraiment vite.
5. Carla : C'est sûr. Il a commencé lentement, après (*inaudible*) ensuite il s'est arrêté puis il a couru.
6. Samuel : Oui, en arrière.
7. Jenny : (s'adressant à Carla) Oui, en arrière, parce que [le segment] descend (faisant un geste vers le bas avec la main ; voir fig. 5, photo 3)

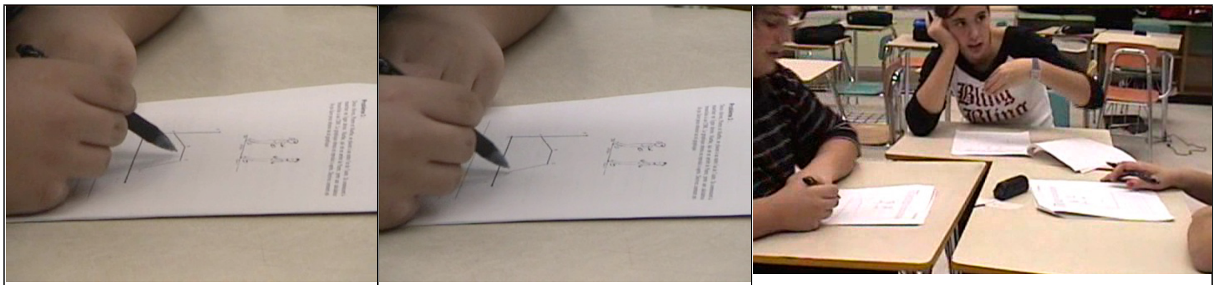


Figure 5. Photos 1 à 3. Quelques gestes faits par les élèves dans leur recherche de dotation de sens du graphique donné. Ces gestes ne sont pas considérés comme l'expression d'un processus de pensée interne, mais comme des parties constitutives de la pensée elle-même.

Notre intérêt ici n'est pas d'entrer dans une analyse d'erreurs, mais de faire apparaître des éléments du processus social d'objectivation du savoir. Il convient de noter, en ce sens, que les gestes effectués par les élèves ne sont pas considérés comme l'expression *externe* de processus mentaux. Ces gestes et le discours avec lequel ils s'articulent sont parties constitutives de la pensée. L'étude minutieuse que nous effectuons dans nos travaux expérimentaux sur les gestes, les actions et le discours que tiennent les élèves dans des situations comme celle-ci se justifie par le fait que c'est là, dans l'activité médiatisée par l'articulation de plusieurs systèmes sémiotiques — p. ex., le gestuel, le symbolique (le système graphique ici) et le linguistique — que l'objectivation du savoir peut être saisie. Elle se révèle dans la dotation de sens qu'opèrent les élèves lorsqu'ils font face à une situation au cours de laquelle ils sont amenés à mobiliser une forme mathématique culturelle de pensée afin de lire et de comprendre ces signes complexes que sont les graphiques cartésiens.

Le court extrait précédent nous amène ainsi à porter une attention particulière à la dimension gestuelle et discursive des élèves et à essayer de comprendre l'objectivation comme un processus fondamentalement social. Si nous partons de cette perspective, l'intervention de Carla à la ligne 2 n'apparaît pas comme une simple *répétition* ou *imitation* de la phrase énoncée par Samuel à la ligne 1. Carla *re-prend* l'interprétation qui lui est proposée par Samuel. Cette re-prise passe par une verbalisation que Carla reformule en plus bref (par exemple, il n'y a pas d'allusion aux lettres A, B, etc.). La phrase de Samuel et les gestes faits avec la plume sur le graphique sont pour Carla la matière première à partir de laquelle elle arrive à concevoir quelque chose qu'elle ne semblait pas avoir noté auparavant.

Si Samuel offre à Carla un accès à une première interprétation du problème (pour aussi rudimentaire qu'elle soit), la reformulation de Carla permet également à Samuel de se rendre compte qu'il y a quelque chose d'important auquel il n'avait pas prêté attention : c'est que pour prendre en compte la différence des inclinaisons des segments, dans l'histoire du problème, Pierre a dû revenir « vraiment vite » (ligne 4). Carla reformule de nouveau l'idée et, à la ligne 6, Samuel insiste sur le fait que Pierre a dû non seulement courir plus vite, mais encore prendre une certaine direction (« en arrière »). À la ligne 7, en faisant un geste de la main (voir fig. 5, photo 3), Jenny propose une preuve.

Par l'entremise du langage et des gestes, dans l'expérience du dialogue, la pensée des élèves se tourne vers l'extérieur et devient *une* pensée commune, bâtie sur un terrain commun. C'est cette expérience du dialogue que Merleau-Ponty exprimait quand il disait que

> Dans 1'expérience du dialogue, il se constitue entre autrui et moi un terrain commun, ma pensée et la sienne ne font qu'un seul tissu, mes propos et ceux de l'interlocuteur sont appelés par l'état de la discussion, ils s'insèrent dans une opération commune dont aucun de nous n'est le créateur. Il y a là un être à deux (…) nous sommes l'un pour l'autre collaborateurs dans une réciprocité parfaite, nos perspectives glissent l'une dans l'autre, nous coexistons à travers un même monde. Dans le dialogue présent, je suis libéré de moi-même, les pensées d'autrui sont bien des pensées siennes, ce n'est pas moi qui les forme, bien que je les saisisse aussitôt nées ou que je les devance, et même, l'objection que me fait l'interlocuteur m'arrache des pensées que je ne savais pas posséder, de sorte que si je lui prête des pensées, il me fait penser en retour. (Merleau-Ponty, 1945, p. 407)

La communauté de la pensée ne signifie pas toutefois l'identité de perspectives. C'est justement la non-identité de perspectives qui permet au dialogue de se poursuivre. Ainsi, les élèves continuent à discuter pendant un bon moment. L'interprétation obtenue ne convient ni à Carla ni à Jenny, car elle suppose que Marthe ne marche pas.

La discussion continue entre eux :

8. Jenny : Non ... heu... (les deux) doivent marcher !

9. Samuel : Si elle le faisait (c'est-à-dire marchait) exactement à la même distance [de Pierre]... si elle faisait cela (voir le geste sur la fig. 6), ce serait une ligne plate [c'est-à-dire horizontale] (...) par conséquent, elle doit rester immobile et lui doit bouger !

10. Jenny : Mais ça [l'énoncé du problème] dit que les deux marchent !

11. Samuel : (après un moment de silence) Peut-être qu'elle marche, mais lui, il marche un peu plus vite qu'elle.

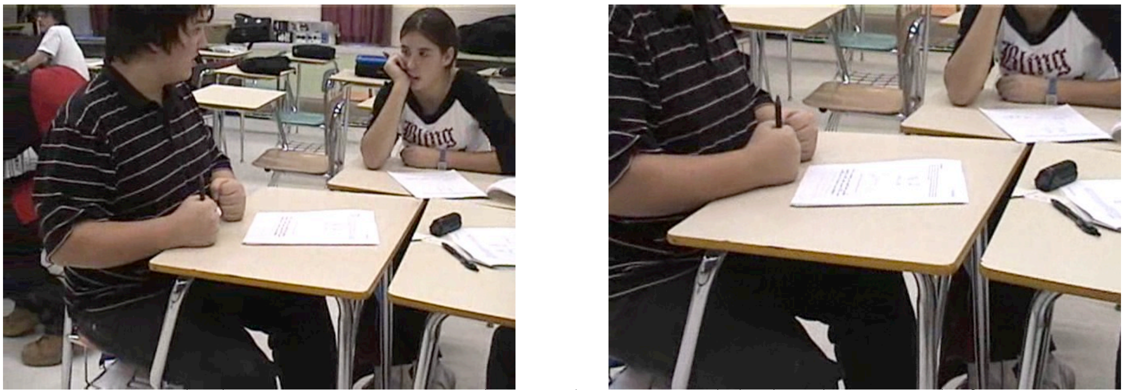


Figure 6. Pour simuler le cas où Pierre et Marthe marchent, Samuel déplace les mains de façon continue de droite à gauche, en les laissant à la même distance.

A la ligne 11, les élèves arrivent à une nouvelle compréhension du graphique. La description du mouvement n'est plus la description par rapport à un point fixe ; c'est le début, encore incertain comme le révèle le « peut-être » de Samuel à la ligne 11, d'une description du mouvement considéré maintenant comme un mouvement relatif. À travers cet échange, les élèves arrivent à s'approcher un peu plus de la démarche réflexive véhiculée par l'activité. Il sera nécessaire de faire appel aux dimensions corporelle, instrumentale (avec le CBR) et symbolique du mouvement (d'abord à travers l'expérience physique dans le couloir de l'école et ensuite en faisant le calcul des équations algébriques des segments) pour que les élèves atteignent une objectivation majeure.

5. 2 *Échanges entre petits groupes*

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les réflexions produites par les petits groupes sont souvent objet d'échange. Un groupe peut échanger ses solutions avec un autre groupe afin d'entendre d'autres points de vue et d'améliorer les siens. La figure 7 illustre la rencontre de deux groupes d'élèves sur le problème de Pierre et de Marthe. Les groupes sont parvenus à un point où un accord était impossible. Marc et son groupe posaient leur explication en termes de changement de vitesse. Au contraire, Dona et son groupe affirmaient que la vitesse de Pierre par rapport à celle de Marthe était constante. Devant l'impossibilité d'arriver à un consensus, les élèves ont décidé d'appeler la professeure. Sur la figure 7, Marc (à gauche) explique son raisonnement à la professeure (debout, derrière les élèves) :

1. Marc : Et si les deux commencent à la même vitesse, puis que lui commence à courir plus rapidement ? (Marc appuie son argument avec un geste des mains)
2. La professeure : Tu supposes que le garçon [Pierre] marche chaque fois plus vite ?
3. Dona : (s'opposant à l'idée) La vitesse est constante ! Il n'y a pas de courbes ! Ceci veut dire qu'il [Pierre] parcourt la même distance par seconde.

Figure 7. A gauche, la discussion entre les groupes. A droite, Marc explique la solution de son groupe à la professeure qui apparaît sur la photo entre Marc et Donna.

La professeure suggère aux élèves de penser à la situation de deux mobiles qui voyagent respectivement à 80 km/h et 100 km/h. Marc se rend compte que l'augmentation de la distance ne signifie pas nécessairement une augmentation de la vitesse. La professeure s'assure que les autres élèves du groupe de Marc comprennent la différence (elle dit, par exemple : « Toi Edgar, que penses-tu maintenant ? ») et profite des circonstances pour faire réfléchir les élèves à propos de l'effet sur les graphiques qu'aurait un mouvement dont la vitesse augmente, comme le proposait Marc à la ligne 1.

Dans ce cas, les élèves notent la différence entre arguments et interprétations. Cependant, de nombreuses fois, les élèves ne se rendent pas compte que les arguments présentés sont différents ou tendent à minimiser les différences. Une des difficultés dans l'acquisition de modes de réflexion mathématique est de percevoir les différences entre les arguments. Naturellement, dans un cas comme dans l'autre, le professeur joue un rôle crucial. Dans les deux cas, le professeur provoque comme une *zone proximale de développement* du groupe. Ce qui est important à remarquer, c'est que le professeur n'initialise pas une telle zone d'une manière neutre : il le fait avec un projet conceptuel précis.

5.3 *Discussions générales*

La discussion générale est une autre manière d'échanger des idées et de les discuter. C'est un autre moment dont dispose le professeur pour revenir sur des points qui requièrent un approfondissement en accord avec le programme d'études. Par exemple, pendant la discussion générale du problème de Pierre et de Marthe, la professeure souligne un point que tous les groupes n'avaient pas nécessairement noté, à savoir que la position du segment BC ne signifie pas forcément que Pierre et de Marthe sont arrêtés ou que la position du segment CD ne signifie pas forcément que Pierre marche en direction de Marthe. Une discussion sur ces idées est tout de suite entamée, puis illustrée par une simulation devant la classe (voir la figure 8). Cette figure illustre le moment où deux élèves exécutent la marche, pendant que Susan, la troisième élève de ce groupe (non visible sur la photo), explique à toute la classe :

Figure 8. Simulation de la marche de Pierre et de Marthe correspondant au segment CD. L'élève qui marche derrière se rapproche de l'autre élève.

1. Susan : Hem, la personne qui était en face marchait plus vite que celle qui était derrière, ceci donnait une distance plus grande entre le CBR et le point objectif. Ensuite... hem... aussitôt B et C dans notre diagramme [Pierre et Marthe] marchaient à la même vitesse, ainsi ils avaient la même distance entre eux. Ensuite.... Tu ?
2. La Professeure : Oui, continue !
3. Susan : Ensuite... hem... à la fin, la personne qui était derrière marche plus vite pour s'approcher de la personne qui était devant (voir figure 8).

Cet exemple montre, ne serait-ce que brièvement, quelques éléments du processus d'objectivation à travers lequel la classe arrive à prendre conscience d'une interprétation plus profonde du graphique. Cette prise de conscience est le résultat complexe des discussions à l'intérieur des groupes, de la vérification et de l'affinement de l'hypothèse à l'aide d'artefacts culturels porteurs d'une intelligence historiquement constituée, des échanges entre groupes, de l'intervention de l'enseignante et de la discussion générale.

Notons, pour terminer, qu'on pourrait se faire dire que la situation n'a pas été organisée afin de donner aux élèves le feedback nécessaire au sujet des interprétations fautives. Or, la théorie de l'objectivation n'adopte pas la prémisse épistémologique d'après laquelle le savoir mathématique serait le résultat de la recherche de solutions optimales par un sujet à certaines situations. Car, à moins de vouloir se cantonner dans une position rationaliste, il nous faut admettre que l'optimalité est un critère relatif et que ce qui peut paraître optimal à une époque historico-culturelle ne l'est pas forcément à une autre (on peut songer aux méthodes de résolution de problèmes de Diophante, des méthodes qui sont longues et pénibles aux yeux des Modernes, mais qui, comme le montre Lizcano (1993), sont tout à fait raisonnables quand on les considère dans leur propre contexte). Mais, plus important que le relativisme culturel de l'optimalité invoqué ici, c'est le fait que le savoir mathématique dépasse les besoins de sa dimension technique. Les mathématiques ne sont pas seulement un discours au sujet du vrai. Il y d'autres éléments qui entrent en jeu, comme des considérations esthétiques (fort présentes, par exemple dans le monde des formes, de leur représentation et de leur étude, ainsi que dans les récits qui sont à la base de maints problèmes arithmétiques et algébriques avant l'apparition de l'algèbre symbolique). Penser le savoir mathématique comme étant muni d'une logique d'optimalité interne qui commanderait le besoin d'émergence de ses objets au contact de certaines situations précises nous semble une hypothèse que nous ne sommes pas prêts à endosser. Une telle hypothèse comprend en fait beaucoup plus : elle suppose que les individus sont d'emblée situés dans un monde qui se donne « naturellement » à la classe de compréhension véhiculée par les mathématiques contemporaines. Puisque nous ne pouvons pas adhérer à des tels principes, nous formulons autrement nos situations. Celles-ci sont plutôt conçues comme l'occasion pour les élèves d'objectiver des formes culturelles mathématiques de pensée, cette objectivation étant rendue possible non seulement par le contact avec la situation mais par l'échange avec les autres et le professeur à l'intérieur de zones proximales de développement.

6. Synthèse

Certaines théories de la didactique des mathématiques ont exclu intentionnellement les aspects psychologiques de l'apprentissage et se sont occupées des situations mathématiques qui peuvent favoriser l'émergence de raisonnements mathématiques précis. Tel est le cas de la théorie des situations. Par contre, d'autres théories se sont arrêtées sur les mécanismes de négociation des signifiés dans la classe et sur la manière dont cette négociation explique la construction des représentations que se fait l'élève du monde. Tel est le cas du socio-constructivisme. La dette intellectuelle qu'a la théorie de l'objectivation envers ces autres théories est immense. Toute théorie doit autant à celles qu'elle continue qu'à celles avec lesquelles elle se trouve en désaccord sur certains points importants. C'est pour cela que nos références au constructivisme et à la théorie des situations ne doivent pas être considérées négativement. Ces deux théories apparaissent soutenues par des principes fondamentaux et opérationnels clairs qui leur confèrent une solidité irréprochable. Toutefois, la théorie de l'objectivation part d'autres principes. D'un côté, elle part de l'idée que la dimension psychologique doit être un objet d'étude de la didactique des mathématiques. De l'autre côté, elle suggère que les signifiés qui circulent dans la classe ne peuvent se limiter à la dimension interactive qui se produit dans la classe même ; ils doivent être conceptualisés dans le contexte de leur dimension historico-culturelle.

Dans ce sens, la théorie de l'objectivation propose une didactique ancrée dans des principes dans lesquels l'apprentissage est vu en tant qu'activité sociale (*praxis cogitans*) enracinée dans une tradition culturelle qui la précède. Ses principes fondamentaux s'articulent autour de cinq concepts reliés entre eux.

Le premier concept est d'ordre psychologique : le concept de pensée, élaboré en termes non mentalistes. Nous avons soutenu que la pensée est une forme de *ré-flexion* active sur le monde, médiatisée par des artefacts, le corps (à travers la perception, les gestes, les mouvements, etc.), le langage, les signes, etc. Ce concept de *ré-flexion* diffère du concept idéaliste et rationaliste selon lequel la réflexion « n'est pas autre chose qu'une attention à quelque chose que nous avons déjà en nous » (Leibniz, 1966, p. 36), et que la psychologie contemporaine appelle souvent méta-cognition. Pour la théorie de l'objectivation, la *ré-flexion* est un mouvement dialectique entre une réalité constituée historiquement et culturellement et un individu qui la réfracte (et la modifie) selon ses propres interprétations et sens subjectifs. Cette conception de la *ré-flexion* s'inscrit dans une

> forme particulière de cognition dans laquelle l'acte de connaissance perturbe ce qu'il cherche. Dès que j'essaie de me comprendre moi-même et ma condition, je ne peux jamais rester identique à moi-même, car le moi qui était en train de comprendre ainsi que le moi qui a compris sont maintenant différents de ce qu'ils étaient avant. Et si je voulais comprendre tout ceci, tout ce processus serait de nouveau mis en marche (...). Comme ce savoir pousse les gens à changer leurs conditions de manière pratique, ce savoir devient une espèce de force politique et sociale, une part de la situation sociale examinée et non une simple réflexion [contemplative], sur quelque chose. (Eagleton, 1997, p. 4)

Le second concept de la théorie est d'ordre socio-culturel. C'est le concept de l'apprentissage. L'apprentissage est vu comme l'activité à travers laquelle les individus entrent en relation non seulement avec le monde des objets culturels (au plan sujet-objets) mais avec d'autres individus (au plan sujet-sujets) et acquièrent, dans le suivi commun de l'objectif et dans l'usage social de signes et des artefacts, l'expérience humaine (Leontiev, 1984).

Ce concept socio-culturel s'imbrique immédiatement avec un autre – le troisième concept de la théorie – de nature épistémologique. Comme toute activité, l'apprentissage est encadré par des systèmes sémiotiques de signifiés culturels qui « normalisent » les modes de questionnement et d'investigation sur le monde. Aristote aurait probablement incité nos élèves à aborder et à étudier le problème de Pierre et Marthe en termes différents, étant donné que dans le cadre de référence aristotélicien, ce ne sont pas le temps et l'espace qui décrivent le mouvement mais plutôt le temps qui dérive du mouvement. Nos élèves appartiennent en effet à une culture où la mesure du temps est devenue omniprésente, mesurant non seulement le mouvement mais le travail humain, la croissance de l'argent (taux d'intérêt), etc. Nous tous appartenons à une culture dans laquelle

> La temporalité de l'expérience – cette notion du temps comme le cadre à l'intérieur duquel les formes de vie se trouvent immergées et manifestent son existence – est la caractéristique du monde moderne. (Bender et Wellbery, 1991, p. 1)

Les concepts précédents permettent de reformuler l'apprentissage des mathématiques d'une nouvelle manière. Il ne s'agit pas de demander à tous et à chacun des élèves de « construire ses propres connaissances ». Il s'agit plutôt de voir l'apprentissage comme l'acquisition, à travers la réflexion critique, l'innovation, l'engagement et la responsabilité, de formes de pensée historiquement constituées [15].

Et alors, comme l'apprentissage est toujours l'apprentissage *de* quelque chose, les concepts précédents sont complétés par un quatrième concept ontologique – celui des objets mathématiques que nous avons défini comme des *schèmes fixes d'activité ré-flexive incrustés dans le monde en constant changement de la pratique sociale médiatisée par les artefacts.*

Pour rendre opérationnelle la théorie dans son aspect ontogénétique, il a été nécessaire d'introduire un cinquième concept de nature sémiotico-cognitive – celui de l'objectivation ou de la prise de conscience subjective de l'objet culturel. Dans ce contexte, et à la lumière des concepts fondamentaux précédents, l'apprentissage se définit comme un processus social d'objectivation de ces modèles externes de l'action inscrits dans la culture.

Mais le concept de l'objectivation conduit à un autre concept – le sixième concept clé de la théorie – qui doit être vu comme son concept dual. Effectivement, tout processus d'objectivation entraîne, au sens dialectique du terme, un processus de *subjectivation*, c'est-à-dire un processus de

[15] Insistons encore une fois que l'acquisition du savoir ne renvoie pas à un processus de transmission de celui-ci. L'acquisition du savoir est un processus de production de sens projetés dans la compréhension que fait l'élève de l'objectivité devant lui et qui est, dans ce sens, pour utiliser le terme de Heidegger (1962), toujours un processus de « dévoilement » inédit.

formation du soi, car apprendre, nous l'avons dit, est aussi devenir. C'est la dialectique entre savoir et être qui a disparu de la scène éducative avec la massification de l'éducation et le triomphe de la rationalité instrumentale qui réduit l'autre à une chose. La subjectivation apparaît dans la théorie de l'objectivation en tant que projet éthique, d'engagement et de réponse (*answerability*) envers autrui au sens de Lévinas (1989, 2006) et de Bakthin (1990).

Du point de vue méthodologique, notre concept non mentaliste ni rationaliste de la pensée nous conduit à prêter attention aux moyens sémiotiques d'objectivation qu'utilise l'élève dans un effort qui est, à la fois, une élaboration de signifiés et une prise de conscience des objets conceptuels. Les photos que nous avons incluses n'ont pas pour fin "d'embellir le texte", mais précisément, de montrer quelques-uns de ces moyens sémiotiques de l'objectivation, comme les gestes, le langage, les symboles. Gestes, langage, symboles se convertissent ainsi en constituants mêmes de l'acte cognitif qui positionne l'objet conceptuel non pas à l'intérieur de la tête mais sur le plan social. Les courts exemples en salle de classe mentionnés au début et à la fin de l'article donnent une idée de la manière dont la théorie explore cette objectivation du savoir qui se déplace sur les plans de l'interaction et de l'action médiatisée (le territoire de l'artefact).

Finalement, notre position théorique par rapport à l'apprentissage implique une reconsidération du concept de l'individu qui apprend. Comme nous l'avons mentionné, le concept de l'individu de l'ère moderne qui apparaît avec l'émergence du capitalisme aux XV^{e} et XVI^{e} siècles est basé sur les concepts d'autonomie et de liberté. La théorie de l'objectivation part d'un autre niveau et propose un concept différent : l'individu est un individu en tant que *être-avec-d'autres*[16].

Bibliographie

Aoki, T. T. (2005). *Curriculum in a new kay. The collected works of Ted T. Aoki.* (Edited by W. F. Pinar & R. L. Irwin). Mahwah, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Arendt, H. (1958). *The Human Condition* : The University of Chicago Press.

Arendt, H. (1993). *Between past and future*. (Reprint of the 1968 ed. published by The Viking Press). New York : Penguin Books.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08*. Rotterdam : Sense Publishers.

[16] Une version précédente de cet article a paru dans la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, en 2006.

Bachelard, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Bakhtin, M. (1990). *Art and answerability*. Austin : University of Texas Press.

Bakhurst, D. (1988). Activity, Consciousness and Communication. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *10*(2), 31-39.

Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M., A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd Edition)* (pp. 746-783). New York : Routledge, Taylor and Francis.

Baudrillard, J. (1968). *Le système des objets*. Paris : Gallimard.

Bender, J. & Wellbery, D. E. (1991). *Chronotypes : The Construction of Time*. Palo Alto : Stanford University Press.

Bluff, L. A., Weir, A. A. S., Rutz, C., Wimpenny, J. H., & Kacelnik, A. (2007). Tool-related cognition in new Caledonian crows. *Comparative Cognition & Behavior Reviews*, 2 : 1–25.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2004). *Une modélisation de l'enseignement des mathématiques*. Conférence plénière, Convegno di didattica della matematica, 24-25 de Septiembre, Locarno, Suiza.

Brousseau, G. & P. Gibel (2005). Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 13-58.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 17*(3), 17-54.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996). Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist, 31*(3-4), 175-190.

Cole, M., & Griffin, P. (1980). Cultural amplifiers reconsidered. In D. R. Olson (Ed.), *The Social Foundations of Language and Thought, Essays in Honor of Jerome S. Bruner* (pp. 343-364). New York/London : W. W. Norton & Company.

Colyvan, M. (2001). The miracle of applied mathematics. *Synthese*, *127*, 265-277.

de Vega, M. (1986). *Introduccion a la psicologia cognitiva.* Mexico : Alianza Editorial Mexicana.

Eagleton, T. (1997). *Marx*. London, Phoenix.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work*. Portsmouth, NH : Heinemann.

Foucault, M. (1966). *Les mots et les choses.* Paris : Éditions Gallimard.

Fried, M. (2009). Similarity and Equality in Greek Mathematics : Semiotics, History of Mathematics, and Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 29*(1), 2-7.

Geertz, C. (1973). *The Interpretation of Cultures*. New York : Basic Books.

Glaeser, G. (1999). *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Heidegger, M. (1962). *Being and time*. (Translated by J. Macquarrie & E. Robinson). New York :

Harper.
Homère (1956). *L'Iliade*. (Traduction par E. Lasserre). Paris : Garnier-Flammarion.
Husserl, E. (1931). *Ideas. General Introduction to Pure Phenomenology.* London, New York : George Allen & Unwin.
Ilyenkov, E. (1977). The Concept of the Ideal. *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism* (pp. 71-99). Moscow : Progress Publishers.
Kant, I. (1803/1980). *Réflexions sur l'éducation*. Paris : Vrin.
Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M., & Dreyfus, T. (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40*, 247-264.
Köhler, W. (1951). *The Mentality of Apes*. New York : The Humanities Press / London : Routledge and Kegan Paul.
Lave, J. & E. Wenger (1991). *Situated learning; legitimate peripheral participation.* Cambridge : Cambridge University Press.
Leibniz, G. W. (1966). *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Paris : Garnier Flammarion.
Leontiev, A. N. (1968). El hombre y la cultura. In *El hombre y la cultura: problemas téoricos sobre educación* (pp. 9-48). México : Editorial Grijalbo.
Leontiev, A. N. (1984). *Activité, conscience, personnalité*. Moscou : Éditions du Progrès.
Levinas, E. (1989). *The Levinas reader*. Oxford : (Edited by Seán Hand.). Blackwell.
Lévinas, E. (2006). *Totalité et infini. Essai sur l'exteriorité*. Paris : Totalité et infini. Essai sur l'exteriorité.
Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática*. Barcelona : Editorial Gedisa.
Martin, J. (2004). The Educational Inadequacy of Conceptions of Self in Educational Psychology. *Interchange : A quarterly review of Education*, *35*, 185-208.
Martin, J., Sugarman, J. & Thompson, J. (2003). *Psychology and the Question of Agency*. New York : SUNY.
Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénomenologie de la perception*. Paris : Gallimard.
Mikhailov, F. T. (1980). *The Riddle of the Self.* Moscow : Progress Publishers.
Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1) : 26-33.
Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking : A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.
Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14-23.
Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S.

Zellweger & V. Cifarelli (eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis : From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa : Legas Publishing.

Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(2), 123-150.

Radford, L. (2003c). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities], *La Matematica e la sua didattic*a, 2004, no. 1, 4-23. [version en anglais disponible dans la rubrique des publications du site al inglés en: http://laurentian.ca/educ/lradford/]

Radford, L. (2005). The semiotics of the schema. Kant, Piaget, and the Calculator. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (eds.), *Activity and Sign. Grounding Mathematics Education* (pp. 137-152). New York : Springer.

Radford, L. (2009a). "No! He starts walking backwards!" : interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 41*, 467–480.

Radford, L. (2009b). L'altérité comme problème éducatif. In J. Boissonneault, R. Corbeil & A. Hien (Eds.), *Actes de la 15e journée Sciences et Savoirs* (pp. 11-27). Sudbury : Université Laurentienne.

Radford, L. (2009c). Signifying Relative Motion : Time, Space and the Semiotics of Cartesian Graphs. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical Representations at the Interface of the Body and Culture* (pp. 45-69). Charlotte, NC : Information Age Publishers.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general : The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 507-530.

Radford, L. & Demers, S. (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques*. Ottawa : Centre franco-ontarien des ressources pédagogiques.

Radford, L., Demers, S., & Miranda, I. (2009). *Processus d'abstraction en mathématiques*. Ottawa : Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Robbins, F. E. (1921). The Tradition of Greek Arithmology. *Classical Philology*, *16*(2), 97-123.

Sierpinska, A. (1996). Interactionnisme et théorie des situations : Format d'interaction et Contrat didactique. En D. Grenier (ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires 1996* (pp. 5-37). Grenoble : Université Joseph Fourier.

Spengler, O. (1948). *Le déclin de l'Occident*. Paris : Gallimard.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M. & Sierpinska, A. (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the Philosophy of Language.* Cambridge Massachusetts, London, England : Harvard University Press.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism : A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C : The Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1981a). The instrumental method in psychology. In J. V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, N. Y. : Sharpe.

Vygotsky, L. S. (1981b). The development of higher mental functions. In J. V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Armonk, N. Y. : Sharpe.

Vygotsky, L. S. & A. Luria (1994). Tool and symbol in child development. In R. van der Veer and J. Valsiner (eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Oxford : Blackwell.

Wartofsky, M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding.* Dordrecht : D. Reidel.

Weber, M. (1992). The Protestant Ethic and the Spirit of Capitalism. London : Routledge.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*. Cambridge, Ma : Harvard University Press.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Luis Radford
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Sudbury, Ontario
Canada, P3E 2C6
Lradford@laurentian.ca http://www.laurentian.ca/educ/lradford/

Groupe Premier Cycle

année scolaire 2010 - 2011

Annie BOURDIL

Miquela CATLLA

Florence LARUE

Françoise SAVIOZ

Yves CHASSIN (*responsable*)

Bertrand TOCQUEC

Bernard VIDAL

Membres associés

Karine DESCHAMPS-FOURNIÉ

Emmanuelle FAYEL

IREM de Toulouse

Université Paul Sabatier

Bâtiment 1 R 2

31062 TOULOUSE cedex 9

Titre **Éléments 1**

Auteurs **Groupe Premier Cycle de l'IREM de Toulouse**

Public Professeurs de collège et de lycée et professeurs des écoles

Date Février 2011

Mots clefs Vygotski, algèbre, calcul, calcul littéral, égalité, activité-classe, Pensée et Langage, lecture numérique, concepts quotidiens/ concepts scientifiques, ZPD, médiation sémiotique, théorie de l'objectivation, enseignement-apprentissage, apprentissage-développement.

Résumé « Éléments 0 » inaugurait une série de brochures « périodiques » (à périodicité variable) intitulées « Éléments n ». Voici donc « Éléments 1 ».
On y trouvera deux articles, l'un sur le calcul, l'autre sur l'introduction du calcul littéral en classe de cinquième, intimement liés à nos pratiques de classe. On pourra y lire quelques réflexions sur la notation dans un contexte qui relance ce débat déjà ancien. Et un article de Luis Radford sur la théorie de l'objectivation paru en espagnol et dont l'auteur a eu l'amabilité de relire notre traduction.Les publications de départ concerneront l'enseignement des nombres et de l'algèbre, puisque c'est dans ce domaine que porte l'essentiel de nos recherches. L'importance de cet enseignement, les difficultés qu'il soulève, ne sont plus à démontrer : il est déterminant pour la formation de l'esprit mathématique de l'élève et la maîtrise des concepts algébriques est indispensable pour la poursuite des études en mathématiques.

Brochure n° 181

N° ISBN : 978-2-918013-04-4
N° EAN : 9782918013044

Édition **IREM de Toulouse**
Université Paul Sabatier
Bâtiment 1 R 2
31062 TOULOUSE cedex 9
mél : *irem@cict.fr*