Des grandeurs aux nombres

(Activités en classe de sixième)

« Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie; et d'autre part cette mesure fournit le nombre, c'est à dire l'objet même de l'Analyse.
Aussi parle-t-on de la mesure des grandeurs dans les trois enseignements : primaire, secondaire, supérieur; le rapprochement de ce que l'on fait dans les trois ordres d'enseignement fournit un exemple de ces efforts de compréhension d'ensemble, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le fignolage de leçons isolées. »

Henri Lebesgue
La mesure des grandeurs, réédition
A.Blanchard

Cette séquence a été proposée à l'identique, à quelques détails près, à celle commentée ci-dessous, à trois classes de sixième lors de deux année scolaires.

Considérations générales

Cette séquence d'activités est élaborée à partir d'une approche historico-socioculturelle de l'enseignement, d'inspiration vygotskienne.
Sa conception s'articule plus particulièrement autour de la notion de *praxis*, la praxis de l'élève en situation, de la *mise en relation dialectique* des concepts quotidiens et des concepts scientifiques et du *dialogisme* tout en s'appuyant sur l'ensemble des idées-clé de cette approche que sont celles de ZPD, de médiation sémiotique, de médiation de l'enseignant, d'objectivation… dont nous pensons qu'elles fournissent les fondements nécessaires à l'élaboration de situations didactiques et d'activités en classe [A] [1] . Premièrement, la praxis sera prise dans l'acception de Castoriadis, c'est à

[1] Pour faciliter la tâche du lecteur et éviter de multiplier les notes de bas de page, des notes, de nature plutôt théoriques, sont reportées à la fin de l'article. On peut donc lire le texte de manière linéaire et se reporter ensuite sur ces notes.

dire «un faire dans lequel l'autre ou les autres sont visés comme êtres autonomes et considérés comme l'agent essentiel du développement de sa propre autonomie» [B].

Deuxièmement, la mise en relation dialectique des Concepts Scientifiques et des Concepts Quotidiens [C] est un levier d'enseignement destiné entre autres à éviter que l'apprentissage de l'élève ne débouche que sur une capacité d'abstraction empirique qui ne permettrait au mieux qu'une pensée par complexe et à éviter que l'enseignement soit uniquement du *verbalisme*, fort justement signalé par Vygotski comme un écueil possible de la pratique enseignante.

La dialectique dont il est question ici est vue comme inscrivant l'agir humain dans un monde qui le conditionne mais qu'il façonne en retour. En s'inspirant de Merleau-Ponty[2] on peut affirmer que la pensée dialectique est par essence porteuse d'historicité, elle est développement, enchâssement de ce qui était avant elle, conservatrice de tous les processus qui ont conduit aux conclusions qu'elle permet, conclusions elles-mêmes non bornées, en évolution permanente.

Praxis et pensée dialectique sont intimement liées dans la perspective qui est la nôtre; ce qui entraîne que cette approche signifie refuser des séparations artificielles entre sujet et objet, pratique et connaissance théorique et au contraire profiter de leur enrichissement mutuel.

Troisièmement, la conception de cette séquence repose sur la notion de dialogisme à partir des travaux de Voloshinov/Bakhtine. Pour éviter de rentrer dans une réflexion qui déborderait le cadre de cet article, nous limiterons notre «emprunt» au dialogisme aux prolongements possibles en classe décrits par des auteurs comme Bronckart, Schneuwly, Brossard… L'analyse des échanges langagiers se déroulant en classe entre élèves et sa pertinence en termes de genres du discours a des effets fructueux pour rendre la médiation de l'enseignant plus efficace de notre point de vue.

De manière très générale et très schématique, lorsque deux ou plusieurs individus échangent oralement, les propos sont formulés dans une langue commune et relativement spontanée qui nécessite souvent peu de rigueur, peu de structuration langagière, la présence physique de l'autre (interpellations brèves, réponses, gestes…) suffit à établir un niveau d'intercompréhension, de communication localement suffisant. Les significations partagées sont alors plutôt vagues et floues. On peut dire que ce type d'échange est du genre premier. Reprenons ce qu'en dit Bronckart :

> A la suite de Bakhtine, on peut distinguer des textes premiers (ou libres), qui entretiendraient un rapport « immédiat » avec les situations dans lesquelles ils sont produits, et des textes seconds (standardisés) qui entretiendraient un rapport « médiat » avec leur situation de production. Alors que les discours premiers seraient ainsi « structurés à l'action », les discours seconds (narration, discours théorique, etc.) s'en détacheraient et seraient soumis à un structurant propre, conventionnel de nature spécifiquement langagière ; ils seraient, eux, « structurés en action » » (p. 76),
>
> Bronckart, Aspects génériques, typiques et singuliers de l'organisation textuelle, 1994

[2] Maurice Merleau-Ponty, Cours au Collège de France

Lorsque les significations partagées, les significations individuelles, intériorisées doivent être plus opérantes comme dans un travail de conceptualisation, de résolution de problèmes… «l'élévation» du genre du discours à un niveau second s'impose. Ce genre second peut être oral mais le plus souvent il sera sous forme écrite. Ce passage du genre premier au genre second permet de circonscrire plus nettement les significations partagées et donc l'intériorisation des significations, les rendant plus opérantes, permettant ainsi un développement de concepts qui en découlent.
Ce travail de changement du genre du discours qui s'effectue au travers d'activités langagières (parole puis écriture) peut être vu comme une brique servant à construire un pont entre niveaux de généralité, les structures de généralisation [D] définies par Vygotski, lors du développement de concepts.

La séquence présentée a plusieurs objectifs :

• en ce qui concerne l'aspect disciplinaire

Le travail de recherche de notre groupe orienté sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire a montré la nécessité d'une structuration forte du concept de nombre avant l'introduction en classe du calcul littéral [3]. D'aiguille en fil, nous sommes arrivés à la conclusion que l'abord du nombre par les élèves, de ses écritures, des opérations, de la compréhension du *calcul*[4] ne pouvait faire sens qu'en s'enracinant dans les *grandeurs mesurables*. La raison principale en est que les grandeurs mesurables sont des notions très «ancrées» dans la vie quotidienne : tous les élèves à l'arrivée au collège ont «entendu parler» de longueur, d'aire, de durée… Par contre, une rapide évaluation fait apparaître, comme on pouvait s'y attendre, que ces notions sont peu structurées, peu articulées entre elles et qu'ils n'existent pas de lien véritable avec les *objets mathématiques* qui en sont en quelque sorte les supports comme le segment, la surface…Pour employer la terminologie vygotskienne, on dira qu'à ce stade là, la pensée des élèves est encore une *pensée par complexes*.
Comme nous voulons que la notion de grandeur mesurable serve de terreau à celui de nombre, cela implique qu'il faut placer le élèves dans des situations propices à déclencher une montée en généralité de l'idée de grandeur puis de grandeur mesurable, c'est principalement la fonction de l'activité 1. Cette dernière est également le point de départ d'une *mise en système* des différents notions : objets géométriques - grandeur mesurable - mesures - nombres - opérations - calcul… Un des rôles primordiaux du professeur sera alors de faire focaliser les élèves sur cette mise en système, de leur en faire prendre conscience.

[3] Séquence d'introduction au calcul littéral *in* Éléments 1 - IREM de Toulouse

[4] Quelques réflexions sur le calcul *in* Éléments 1 - IREM de Toulouse

Un des autres objectifs importants est la poursuite du travail d'appropriation de la relation d'égalité, de l'idée même de relation et de la relation du tout et des parties du tout, pierres angulaires de l'activité mathématique consciente future de chaque élève.

L'utilisation d'une «même unité de comptage» pour comprendre le comptage et donc la mesure comme rapport (dans les deux sens, celui de relation et celui de quotient particulier), l'importance de savoir «en quoi on compte», le savoir «opérer» pour résoudre un problème, la réflexion sur comment répondre à «est-ce calculable ?»… sont par conséquent les autres objectifs de cette séquence.

Ces objectifs doivent conduire les élèves à une compréhension du nombre et des concepts systématiquement associés comme ceux d'opération, de calcul, d'égalité…

Nous devons ici faire remarquer qu'il serait impropre et faux, voire contreproductif, de concevoir cette compréhension comme aboutie et définitive, un concept étant toujours en développement; l'idée de structure de généralisation prenant ici toute sa pertinence.

• en ce qui concerne l'aspect apprentissage/enseignement [5] de manière non spécifiquement disciplinaire

- La poursuite du travail de verbalisation (orale et écrite) comme facteur incontournable du développement de la pensée des élèves à travers des activités langagières est une tâche permanente qu'il s'agit d'anticiper le plus possible au moment de la conception des activités.
- La poursuite de *l'institution de l'apprenant comme élève*, c'est à dire, sommairement, faire advenir l'apprenant comme sujet le plus autonome possible au sein d'une communauté éducative en vue de sa construction/constitution comme citoyen «de plein exercice» [6] (dans une acception aristotélicienne du terme).

C'est en particulier par le biais de l'activité dialogique que peut s'établir un rapport conscient et mutuel entre l'élève dans sa singularité et son appartenance à un collectif «d'autres lui-même».

La mise en évidence pour l'élève que la connaissance se construit par lui-même dans l'interaction avec les autres et ainsi montrer la nécessité de son implication en classe.

[5] Le terme apprentissage nous parait trop réducteur tel qu'il est connoté actuellement pour exprimer ce qu'il se passe en classe; dans la plupart des textes il renvoie à une vision centrée sur l'élève, cet apprentissage étant considéré comme un processus extérieur à l'élève. L'expression apprentissage/enseignement (empruntée à B.Schneuwly) nous parait plus représentative de notre conception.

[6] Il est peut-être intéressant d'insister ici sur ce qui transparait derrière l'approche dont nous nous réclamons : l'éducation scolaire doit avoir pour partie importante de ses finalités l'émancipation de l'individu et sa construction comme citoyen. «C'est la cité qui éduque l'homme» disait déjà Simonide.
Cette conception de l'éducation s'oppose à une visée utilitariste de l'enseignement. Nous retrouvons l'idée grecque de «paideia» chère à Castoriadis.
Il est d'autre part intéressant de remarquer que le terme de paidologie utilisé par Vygotski reprend la même racine dans Analyse paidologique du processus pédagogique (page 141 et suivantes) in Vygotski, une théorie du développement et de l'éducation, 2012.

Le développement de *l'attention volontaire* car, comme l'affirme Michel Brossard «Les régulations internes sont l'application à soi-même des contrôles initialement exercés par autrui, de même que l'attention est d'abord, dans l'ordre de la psychogenèse, attention conjointe». Attention volontaire qui est une des fonctions psychiques supérieures incontournables pour rendre l'autonomie effective.

Activité 1

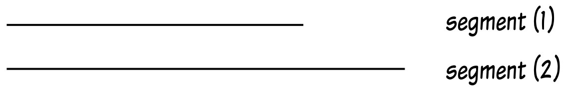
Voici une liste «de choses» : sac à dos ; mi-temps ; boule de pétanque ; parfum ; affiche ; ficelle ; air ; peinture ; train ; trousse ; récréation ; ballon ; camion ; champ ; table ; repas ; spaghetti ; route ; vacances ; classe ; électricité.

• On dira que **deux** «choses» choisies dans la liste sont **comparables** si la question « ***laquelle de ces deux choses est la plus grande ?*** » a un sens.
Parmi ces choses, en trouver qui sont comparables ? **En quoi** sont-elles comparables ?
[*on fera une phrase à chaque fois pour exprimer cette comparaison*].

[*Activité librement inspirée par un article de Marc Picot publié dans la brochure «Des mathématiques en Sixième» de la Commission Inter-IREM Premier Cycle - 1996*].

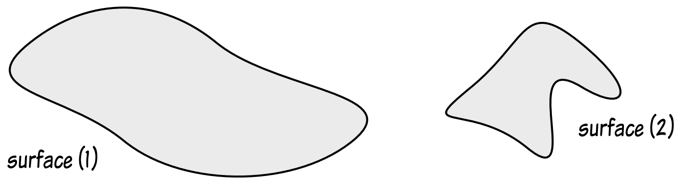
Activité 2 [*on fera une phrase à chaque fois pour exprimer la réponse*].

Voici deux segments :



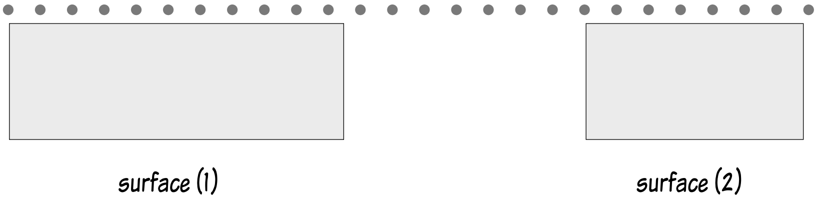
• Quel est le plus long ?

Voici deux surfaces :
• Quelle est la plus étendue ?



Activité 3 [*on fera une phrase à chaque fois pour exprimer la réponse*]

Voici deux surfaces



➔ comparer les aires de ces deux surfaces
➔ comment obtenir l'aire de la surface (2) à partir de l'aire de la surface (1) ?
➔ faire une phrase pour exprimer l'aire de cette troisième surface
➔ comment obtenir l'aire de la surface (1) à partir de la surface (2) ?
➔ quelle remarque peut-on faire sur ces deux réponses ?
➔ que peut-on dire de l'aire (1) par rapport à l'aire (2) et à l'aire (3) ?

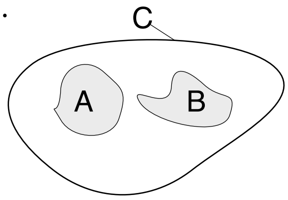
Activité 4

On veut comparer deux segments mais ces deux segments sont dessinés sur deux feuilles qui ne sont pas dans la même pièce.

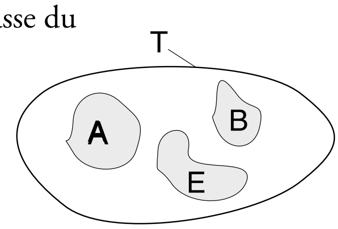
• Que peut-on «faire» pour comparer leur longueur ?

Activité 5

• Un sac (sans masse) contient deux «choses», la chose A et la chose B.
➔ quelle est la masse de C qui est le sac rempli ?
➔ exprimer la masse de la chose A par rapport aux deux autres masses.
Pour les deux questions, faire une phrase en «français» puis une phrase «plus mathématique».



• Un autre sac est rempli de 3 «choses». On désigne par a la masse de la chose A, par b celle de B, par e la masse de E et par t la masse du sac rempli.
en utilisant une écriture «mathématique»
➔ exprimer la masse de T par rapport aux 3 autres masses
➔ exprimer la masse de B.

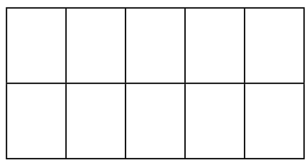


Activité 6

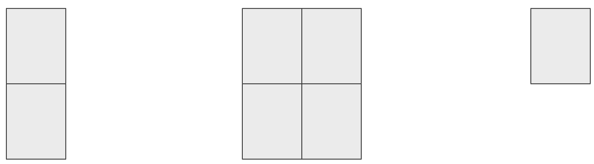
On donne la surface (1) ci-contre.

On veut évaluer son aire.

Pour cela, voici trois «aires-étalon»



aire-étalon u aire-étalon x aire-étalon y



• Exprimer l'aire de la surface (1) pour chacune des aires-étalon.

• Quelle remarque peut-on faire ?

Activité 7

✳ Version 1

Dans une baguette de bois de longueur 300 cm , on coupe un morceau de 85 cm et deux autres de 70 cm chacun.

• Sans procéder à aucun calcul, écrire la longueur de la baguette restante.

Calculer cette longueur.

✳ Version 2

Dans une baguette de bois de longueur a , on coupe un morceau de longueur x et deux autres de longueur t chacun.

Écrire la longueur de la baguette restante.

✳ Version 3

Dans une baguette de bois, on coupe un morceau de longueur x et deux autres de longueur z chacun. La longueur de la baguette restante est k.

Écrire la longueur de la baguette du départ.

Activité 8

Soit la longueur 4m + 3m x 2.

Écrire le texte d'un problème où cette longueur serait solution du problème posé.

➔ exprimer la masse de T par rapport aux 3 autres masses

➔ exprimer la masse de B.

Activité 9

Sur un camion vide ayant une masse de 3,2 t, on charge 81 caisses de 40 kg chacune.

• Sans procéder à un calcul, écrire la <u>masse totale</u> du camion chargé.

• Sans procéder à un calcul, écrire <u>la mesure de la masse</u> en tonnes du camion chargé.

• <u>Calculer</u> cette mesure.

Commentaires sur les activités

En tenant compte des considérations générales qui constituent le fil directeur de l'élaboration de cette suite d'activités, nous préciserons pour chacune les éléments mathématiques en jeu et nous commenterons quelques passages des échanges; nous signalerons également les moments et les contenus de la médiation de l'enseignant pour au moins deux raisons : ce sont des facteurs très importants dans l'approche qui est la nôtre (différente en cela d'autres conceptions telle le constructivisme interactionniste dans lequel les mêmes termes peuvent être utilisés) et cela peut indiquer le rythme du déroulement de l'activité.

Activité 1

Tout d'abord l'utilisation du mot «choses» répond à deux considérations : premièrement, donner aux élèves des éléments, sur lesquels le travail va porter, qui font partie de la vie courante et qui à première vue n'ont pas de point commun et deuxièmement, en anticipant ce qui sera une première montée en généralisation, ne pas employer le mot «objet» qui sera gardé pour ce qui sera construit à partir de cette première généralisation. Ce mot n'est pas choisi par hasard puisqu'il reprend grosso modo la définition donnée par Aristote [7] et qui correspond bien à la première phase de l'activité qui est de passer du «voir» au «lire», de la «chose» à «l'objet».
L'utilisation de deux mots différents, à ce stade là de la réflexion conjointe en train de se réaliser, nous semble devoir faciliter le travail de différenciation/discrimination exigé de l'élève, en posant une forme langagière explicite, un vocabulaire singulier.

Il faut se garder de tomber dans le piège qui consiste à croire que le «voir» serait *naturellement* un «voir comme», qu'il y a derrière chaque perception une activité conceptuelle *innée*, alors qu'en réalité c'est le rôle de l'apprentissage/enseignement que d'amener chaque individu à construire une pensée conceptuelle; c'est ce que nous entendons quand nous disons que l'activité doit/va guider l'élève dans cette évolution.
Comme l'affirme Sandra Laugier commentant les écrits de Ludwig Wittgeinstein

> «… comme si l'idée même de voir était toujours liée à une mythologie du sujet transcendental, à qui le monde serait donné, tandis que regarder serait conçu comme une activité descriptive, une perception active du sens qui ne serait pas un jugement.»[8]

On s'attend à ce que le début de l'activité soit assez chaotique, que les énonciations des élèves partent dans de nombreuses directions, que des doutes vont se fassent jour… en effet, que peuvent avoir de «commun» parfum et trousse…?

---

[7] La chose en tant que partie du réél est ce qui présente les caractéristiques suivantes : tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple, indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres «choses» (citée par Bruno D'Amore - Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques).

[8] Sandra Laugier - Ludwig Wittgeinstein, le sens de l'usage, page 95.

La mise en questionnement est difficile pour les élèves, l'amorçage implique l'intervention de l'enseignant qui peut reprendre des propos d'élèves et demander à les repréciser, les reformuler ou bien il peut poser des questions complémentaires.
Les premiers appariements de «choses» qui sont énoncés font apparaître une «lecture» basée uniquement sur une forme/ressemblance comme par exemple ballon-boule… «parce que c'est rond», camion-train… «parce que les deux roulent».
La question «en quoi sont-elles comparables?» va entrainer les élèves à essayer, à tâtonner.
À partir de ce magma d'»idées volantes et floues», formulées ou pas, elle va provoquer petit à petit une première organisation/catégorisation qui à son tour fait résonner les mots «lourd», «long», «léger»… Cette classification nécessite l'élaboration de moyens psychologiques permettant une analyse particulière, c'est à dire un autre niveau de «lecture» en quelque sorte, supérieur au premier. Dans cette phase, les acteurs sont en train de passer d'une perception à une lecture, ce qui correspond à une généralisation. Ils commencent à discriminer, à lire différentes caractéristiques pour une même chose que l'on peut retrouver pour certaines dans une autre chose et ainsi de suite.
Les échanges intersubjectifs, les désaccords qui s'affichent, les négociations qui s'effectuent, balisées par l'enseignant, mettent à jour les différences/ressemblances concernant les «choses» à comparer, des traits communs émergent. Ces différences, une fois mises à jour, jouent un rôle important pour la co-construction des significations partagées, toujours par l'apport régulateur de l'enseignant. Sans le dialogue, la discussion instituée en classe, ces différences resteraient souterraines, subjectives. Il faut donc les faire apparaître…

> «Comment une telle différence peut-elle apparaître ? Il faut qu'elle puisse apparaître aux intéressés eux-mêmes dans une discussion entre eux, par la voie dialogique. Cela n'est concevable que dans le contexte d'institutions communes qui permettent d'assigner le sens.» (Vincent Descombes, Les institutions du sens, page 94)

On peut donner un exemple d'un moment d'abstraction : pour les élèves qui ont apparié ficelle et affiche, a commencé de s'imposer la *lecture* de la ficelle comme une ligne droite… presque comme un «segment», quitte pour certains à joindre le geste à la parole, alors que la ficelle «de la vie courante» apparait souvent repliée, de forme confuse.
En ce qui concerne l'enseignant, son intervention peut consister à attraper deux choses, un stylo et une trousse par exemple, à rapprocher les deux et poser la question «le stylo rentre-t-il dans la trousse?», pour renforcer l'idée que là, ce sont deux «segments» que l'on observe et non plus deux choses, que c'est un attribut commun construit sur lequel on focalise et non plus sur la totalité des deux choses.
Il est important de comprendre ici que la médiation de l'enseignant ne se limite pas à cette intervention, qui pourrait prendre une autre forme et intervenir à un autre moment dans une classe

différente; elle doit être pensée en amont comme un champ de possibles lors de l'élaboration des activités, elle doit être en capacité de faire rebondir les échanges «en cours», autrement dit l'enseignant doit être prêt à une grande partie d'imprévisible avec comme préoccupation principale que sa médiation soit le catalyseur permettant que chaque élève et que le groupe-classe «soient en» Zone de Proche Développement.

Le fait de reprendre également une phrase où la comparaison n'a pas de sens (à ne pas confondre avec une phrase fausse comme «le spaghetti est plus long que la route» - puisque pour faire sens, il faut savoir juger du vrai et du faux) participe à donner plus de force à ce que c'est que d'avoir du sens, justement en n'éliminant pas le non-sens de la discussion mais en s'en servant pour borner la signification partagée, à la rendre plus opérante.
En effet, une autre erreur serait de croire que la signification est quelque chose de totalement déterminée, d'abouti, de définitif. Pour reprendre Castoriadis «Nous ne pouvons la décrire [la signification] que comme un faisceau indéfini de renvois interminables à *autre chose que*.» Ce qui signifie que pour qu'il y ait intercompréhension, signification partagée entre individus, il est nécessaire de chercher à baliser suffisamment ce faisceau, ce qui ne veut pas dire en tracer une frontière ce que l'on sait impossible, mais tenter de faire repérer dans ce magma les points nodaux, les cristallisations; c'est à ce niveau que le travail sur le non-sens prend sa pertinence.

En complément des échanges oraux, de la formulation orale des phrases, intervient l'écriture de ces phrases. Cette tâche est incontournable pour un développement durable de la pensée, du fait du rôle majeur du langage écrit, comme l'affirme Vygotski :

> «C'est pourquoi le langage écrit est la forme la plus prolixe, la plus précise et la plus développée»… «Le langage écrit… est lié dès le début à l'intervention de la conscience et à la présence d'une intention.» … «Il va de soi que le langage écrit est l'opposé polaire du langage oral» (Lev Vygotski, Pensée et langage 1997, page 471 et suivantes).

L'écriture a pour rôle la représentation, la mise en forme des savoirs. On l'utilise ici pour sa fonction réflexive à la fois spécifique et complémentaire de celle de l'activité orale. Elle va marquer une forme de concrétisation du passage d'un genre premier à un genre second du discours. Contrairement à l'oral, plus volatile, elle est la trace de l'avancé de la réflexion collective et des significations en train de se constituer. Elle sert de témoin de l'historicité de la construction des connaissances.

L'étape suivante consiste à faire se recentrer l'attention des élèves en sélectionnant quelques unes des phrases précédemment écrites :

le camion est plus lourd que la trousse

l'affiche est plus courte que la table

le train est plus long que le camion…

et à les regrouper par catégorie en s'appuyant sur les adjectifs, *long*, *lourd*, *vaste*…

À ce niveau, le *concept potentiel* de grandeur est présent, en attente, portant en lui les déclinaisons de longueur, masse, durée… À ce point, que l'on pourrait appeler «point de collision» reprenant en cela une expression de Bernard Prot, commence un double développement : celui des concepts quotidiens des élèves «vers le haut» (montée en généralité, changement de structure de généralisation) et celui des concepts scientifiques qui s'étendent «vers le bas», naissant et/ou s'enrichissant dans la conscience de l'apprenant par leur lien avec l'expérience.

Dans Pensée et Langage (page 255), Vygotski précise la définition :

> «Ces concepts sont potentiels, premièrement, par leur *référence pratique à un cercle déterminé d'objets* et en second lieu, par le processus d'*abstraction isolante* qui en constitue la base. Ce sont des concepts en puissance qui n'ont pas encore réalisé cette potentialité.»

L'enseignant va *faire venir* le mot (ou l'expression) qui va désigner le concept, en s'aidant de la verbalisation de phrases synonymes aux premières comme par exemple

le camion est plus lourd que la trousse… qui devient

la masse du camion est plus *grande* que la masse de la trousse

En prenant prétexte que l'adjectif *grand* se retrouve dans le vocabulaire utilisé, le mot *grandeur*[9] est introduit. Nous avons suivi en cela la démarche logique de Vygotski :

> «Le point essentiel de cette opération [au cours de laquelle adviennent les concepts] est l'utilisation fonctionnelle de la parole comme moyen d'orientation volontaire de l'attention, pour l'abstraction, pour la distinction d'attributs séparés et leur synthèse, et pour leur symbolisation à travers les signes»

La suite est constituée par le remplissage du tableau (autre élément de la médiation sémiotique) qui par son côté synoptique fait ressortir la mise en système des différents concepts en train de se construire et de se développer mutuellement, assurant ainsi une augmentation de structuration de la pensée des élèves.

Comme il ne s'agit pas d'évoquer exhaustivement l'ensemble des grandeurs qui peuvent exister, la colonne de droite laisse la porte ouverte à l'élaboration d'autres types de grandeurs; l'attention des élèves attirée sur ce point concourt à entretenir l'idée d'une pratique principielle en mathématiques, à savoir qu'une même démarche sera réutilisée «au besoin», par la mise en pratique d'un *principe d'extension* en quelque sorte.

Une re-focalisation sur les trois grandeurs plus «mathématiques» que sont longueur, aire, volume et le lien avec les objets mathématiques correspondants, segment, surface, solide va alors être guidée par le professeur.

Une remarque s'impose ici : sont intervenues au cours des échanges du début de l'activité d'autres caractéristiques des «choses» comme la couleur. Rapidement, les élèves ont bien perçu que cette caractéristique-là ne pouvait pas s'établir comme comparable en termes «de plus grand

[9] Sera ensuite travailler l'évolution entre grandeur et grandeur mesurable, sans mention de grandeur repérable.

que». Cela a permis à l'enseignant de commencer à évoquer le fait que certaines comparaisons relèveront du domaine scientifique, d'autres non [10].

Pour revenir au tableau, certaines «choses» se retrouvent dans plusieurs colonnes. Ce point est crucial. Faire insister les élèves sur cette observation participe à l'abstraction instancielle. En effet, non seulement l'abstraction est une activité par laquelle un individu devient conscient de similitudes, mais aussi, pour le dire comme Ilenkov, l'abstraction est un *appauvrissement délibéré* de la réalité. C'est ce que l'on va faire pointer par les élèves en reprenant le fait que si «trousse» se retrouvant dans plusieurs colonnes, quand on lit «trousse» dans la colonne «longueur» c'est que la trousse est, ici et maintenant, «*lue comme*» un segment.

Nous reviendrons sur l'abstraction comme participant à la construction/formation des concepts scientifiques plus loin pour distinguer *abstraction empirique* et *abstraction théorique*[11] [E], distinction capitale si l'on veut comprendre le potentiel éducatif de l'approche historico-socio-culturelle.

On peut d'ores et déjà affirmer que l'idée de travailler en contexte est essentielle pour toute activité humaine significative. Les concepts scientifiques à enseigner (ceux connus de l'enseignant, c'est à dire ceux qui font partie de la culture humaine, socialement et scientifiquement constituée) sont ici contextualisés comme éléments d'un *donner à voir*, piloté par l'activité; ce *donner à voir* (que l'on pourrait qualifier de théorie dans sa première acception) fonde «la» signification particulière des objets en cours de construction.

Le fait de mettre en correspondance un mot (un signe) avec une des caractéristiques des «choses» implique que l'objet visé, ici la grandeur, a été constitué comme objet à part, qu'il y a eu objectivation de la grandeur. Pour reprendre les propos de Castoriadis «il faut pouvoir poser ces objets comme définis au sens d'une définition décisoire-pratique, et distincts».

Deux citations de Ignace Meyerson éclairent également cette étape de l'objectivation :

> «Précisons ce que l'on peut entendre pat objectivation. C'est d'abord une direction vers autre chose que le pur état mental. Dès que nous pensons, nous pensons à, il y a un contenu de notre pensée et notre pensée est la relation à ce contenu. Notre pensée est intentionnelle. Ce n'est pas de ses propres opérations qu'elle est consciente d'abord, mais de ses produits.» (Les fonctions psychologiques et les œuvres - page 31)
>
> «Le langage nous montre un double aspect de l'objectivation : création d'êtres doués de pouvoir, création d'objets dotés de propriétés.» (Les fonctions psychologiques et les œuvres - page 33)[12]

---

[10] Il n'est évidemment pas question ici de discuter le fait qu'ultérieurement la couleur considérée comme longueur d'onde pourra donner lieu à comparaison.

[11] Nous reprenons ici cette terminologie, utilisée dans plusieurs articles dans la littérature étrangère, pour ne pas créer une nouvelle expression bien qu'elle ne nous semble pas la plus adaptée.

[12] Nous renvoyons également à l'article de Luis Radford, Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation - Éléments 1 - IREM de Toulouse.

L'enseignant commence par faire écrire que la grandeur est une caractéristique d'une «chose» ou d'un «objet mathématique» et ensuite que longueur, masse … sont des grandeurs. Là aussi, le texte écrit a pour rôle de matérialiser ce qui a été dit, discuté, partagé par les apprenants.

Il reste un problème important si l'on veut que le concept que l'on vient de co-construire prenne toute sa capacité opérante, c'est à dire qu'à son tour il devienne «concept-outil» pour résoudre des problèmes, ce qui implique qu'il puisse être efficacement contextualisé ailleurs, se projeter dans de nouveaux contextes pour employer une expression de Wittgeinstein.

En réalité, ce problème est double : d'abord, tout au long de l'activité, les élèves ont travaillé pour aboutir au concept de grandeur à partir de ses déclinaisons, masse, longueur… et la définition donnée porte sur la *grandeur* en général et deuxièmement, il n'existe pas vraiment de définition normative de grandeur (et de grandeur mesurable). Comme il évident que cette seule activité ne peut suffire à faire du concept de grandeur un concept de «plein exercice», nous pensons qu'une définition des différentes grandeurs doit être donnée aux élèves, même si le texte n'est pas scientifiquement parfait (ce qu'il ne pourra jamais être d'ailleurs). Nous pensons que c'est à ce prix que la mise en système pourra se développer pour chaque élève. Cette étape peut être vue comme poser un élément stabilisateur (ce qui ne veut pas dire immuable) au cours de la médiation sémiotique, une référence pour les élèves.

Nous voyons dans cette définition, «La longueur est la quantité de place occupée par un segment sur une droite», plusieurs avantages :

- la part d'implicite laissée à l'élève est réduite (nos travaux sur l'analyse des erreurs[13] des élèves depuis plusieurs années nous ont conduit à la constatation que lorsqu'on laisse trop d'implicite aux élèves, ils cherchent «logiquement» à le combler, à leur manière, ce qui va entraîner des incompréhensions difficiles ensuite à corriger). Nous avons déjà écrit que la signification n'était pas totalement délimitable et qu'elle ne pouvait l'être sous peine d'empêcher toute vie du langage. Réduire la part d'implicite signifie donc ne pas la supprimer et si nous prenons une image on pourrait dire que le rapport implicite/explicite correspond au «jeu» entre deux pièces mécaniques : trop de jeu implique que le mécanisme ne peut fonctionner, pas assez de jeu conduit à ce que les deux pièces grippent.
- la mise en évidence du lien avec l'idée de quantité (que l'on retrouve dans *nombres-de*)
- la focalisation engendrée par cette définition sur l'idée de *principe directeur* dans la pratique mathématique. À partir d'elle, suivant le même principe donc, on pourra donner des définitions des autres grandeurs, qui pourront reprendre la même démarche et globalement la même syntaxe de la phrase (l'aire est la quantité de place occupée par une surface dans le plan…). D'insister sur cette idée que les mathématiques fonctionnent suivant des principes est un point important à

[13] Voir l'article Des erreurs dans Éléments 0 - IREM de Toulouse.

saisir pour les élèves et il est bon de le faire remarquer le plus souvent possible. Deux principes forts sont au cœur de la pensée mathématique : celui de cohérence et celui d'extension.

Les deux sont par exemple à l'œuvre au niveau de la somme. Une fois que l'on a compris que «5 dm + 4 cm» est une longueur (cohérence) et que cette somme n'est calculable que si les deux termes ont la même unité de comptage, on peut passer à $\frac{4}{3}+\frac{2}{7}$ (extension) sans être amené à introduire une nouvelle «routine de calcul» pour les élèves, ce qui peut être dévastateur. Sans cette base conceptuelle, en effet, l'élève risque d'être perdu, en attente d'une «technique miracle», chaque fois qu'il va rencontrer un nouvel ensemble de nombre. Un des apports possibles de cette séquence est justement sa contribution à la mise en avant de ce travail par principe. Nous reviendrons plus loin avec plus d'insistance sur cet aspect là.

- la mise en relation de la grandeur et de l'objet mathématique correspondant, renforçant ainsi l'idée de mise en systèmes de concepts
- l'approche de la notion de grandeur en dehors de tout activité de mesurage
- l'accentuation du rôle de la trace écrite, de cette nécessité du texte qui est peu évidente encore pour beaucoup d'élèves car comme le dit Laugier «le texte a une fonction qui est la matérialisation de ce qui a été dit pour ceux qui étaient présents.»

Poser cette définition est aussi jeter un pont vers une autre idée forte de la pratique mathématique, l'idée de relation. Dans la phrase, la copule «est» intervient ici comme signifiant l'existence, celle du concept de longueur. Elle va intervenir ailleurs comme signifiant l'égalité.

Sa «lecture» est un facteur important de compréhension mathématique, en particulier dans le domaine numérique : entre la verbalisation en langue naturelle (échanges oraux notamment) et la sémiotisation des relations avec des signes graphiques (symboles) spécifiquement mathématiques, mais également par exemple, lors de la modélisation d'un problème par le passage d'un énoncé textuel à une équation ou une inéquation.

Faire écrire cette définition est aussi un artefact impliquant l'idée de représentation, primordiale en mathématiques, étant donné qu'il n'y a pas «quelque chose» à exhiber à la place d'un objet mathématique, qu'il ne peut y avoir un autre accès. C'est un début de prise de conscience par l'élève de l'importance de la représentation, de sa *lecture totale*, d'autant plus qu'il y a rarement ressemblance visuelle entre l'objet et sa représentation (et pour cause). Cette relation entre l'objet et le signe graphique est uniquement fourni par une définition que l'on peut qualifier de fonctionnelle.

Cette focalisation, ici, est un pas supplémentaire dans la prise de conscience de la spécificité de l'activité mathématique, du fait que justement il n'y a rien à exhiber : apprendre aux élèves à ne pas confondre les objets/concepts avec leur représentation sémiotique, puis à être capable pour le même objet de changer de représentant sans que l'objet, lui, en soit modifié.[14] C'est également ce qu'affirme Luis Radford «Dans le cas des objets conceptuels, le perçu et en fait non perceptible, de sorte qu'il n'est accessible qu'indirectement, à travers les moyens sémiotiques d'objectivation.» (Luis Radford - La généralisation mathématique, page 13)

Pour clore les commentaires sur cette activité 1, quelques considérations plus générales qui s'appliquent à l'ensemble de la séquence.

Nous avons employé l'expression «concepts quotidiens» (que nous préférons à celle de concepts spontanés également employée dans la littérature) au moment où débute l'activité. Nous entendons par là les notions et la façon dont elles sont structurées. Il est clair que, i) tous les élèves ne disposent pas des mêmes concepts quotidiens, c'est à dire en réalité la même manière d'aborder le problème posé - d'où l'importance des échanges langagiers du début et la mise en situation d'interaction, ii) les concepts quotidiens évoluent, se restructurent - justement par le développement des concepts scientifiques.

L'activité et le langage (qui reprend les énonciations, toutes les formulations langagières rencontrées) fusionnent, aidant l'élève à s'affranchir du domaine de la perception simple pour arriver à celui de la lecture. On pourrait dire qu'à ce niveau, l'élève est davantage théoricien que [voyeur] et manipulateur.

Pour reprendre ce que dit Veresov, la force motrice du développement est donnée par le passage de la «forme réelle» à la «forme idéale» au cours des échanges, qui se traduit par le passage de discours du genre premier au discours du genre second. La forme idéale, par exemple le concept de grandeur et sa définition, n'est pas donné a priori aux élèves, elle est découverte/élaborée en coopération avec l'enseignant. Les relations sociales entre apprenants vont se transformer en fonctions psychiques supérieures et l'intériorisation est rendue possible.

Concernant la forme que prennent les interventions de l'enseignant, il s'agit souvent d'une question : Pourquoi dis-tu cela ? Pourquoi écris-tu cela ? Qu'en penses-tu ? Que penses-tu de ce qu'a écrit Pierre ? … Mais nous devons préciser qu'il ne s'agit pas ici d'une logique : question - réponse - validation. La demande de l'enseignant consiste à faire verbaliser, à faire préciser… de façon à faire atteindre «asymptotiquement» la «forme idéale» dont il est question ci-dessus, soit directement par un élève, soit par l'intermédiaire d'un enchainement de réponses émanant de plusieurs individus.

L'avancée dans le travail de développement des concepts est guidé par ce que Vygotski appelle la loi d'équivalence des concepts «… tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés.» (Pensée et Langage, page 385) et «La loi d'équivalence des

---

[14] On peut renvoyer utilement et de manière complémentaire aux travaux de Raymond Duval sur les cadres et les changements de registres.

concepts joue différemment et de manière spécifique à chaque stade de développement de la généralisation.» (Pensée et Langage, page 388).

Activité 2

Il s'agit d'une activité de transition, destinée à mettre en œuvre les concepts construits dans l'activité 1 et à préparer les activités suivantes. C'est aussi un changement de monde : on est de plein pied dans le monde mathématique puisque le travail porte directement sur des segments. Ce passage dans ce cadre mathématique permet de faire agir les concepts (qui de potentiels, tout en se projetant dans de nouveaux contextes, vont gagner en *opérance*), de les mettre en usage. Cette mise en action favorise le développement de leur fonction effective. Cette activité, loin d'être anodine, créé aussi les conditions de mettre un maximum d'apprenants au même niveau, le plus possible, de conceptualisation, en particulier par les échanges verbaux; c'est en quelque sorte une manière de laisser le temps à l'intériorisation (pour chaque acteur) de s'enrichir, de se solidifier; c'est un palier de régulation.
L'énonciation et la rédaction de phrases correctes concourt à concrétiser cela.

L'autre versant, que l'on peut considérer comme une porte ouverte pour la suite, sous l'impulsion de l'enseignant, va consister à faire remarquer qu'il n'est peut-être pas toujours facile de comparer, en particulier ici les deux aires, que la forme des surfaces va prendre une grande importance et donc qu'il faudra trouver des moyens autres que la simple vision pour fournir une réponse.

Activité 3

Ciblée sur les aires, cette activité concourt à un travail sur le «continu» alors que très souvent les élèves sont aux prises avec du «discret», avec l'utilisation d'une règle graduée par exemple ou lors de placement de points sur un axe qui implique que cela «tombe juste». D'autre part, les élèves n'ont pas d'étalon d'aire à leur disposition et le passage par l'idée de mesure est évitée.
Comme les deux aires sont données côte à côte, le premier temps de la comparaison est perceptif «l'aire 1 est plus grande que l'aire 2» qui sous-tend la mobilisation cognitive de la définition de l'aire. La deuxième question doit provoquer la mise en évidence de la «différence» et sa caractérisation comme aire. On passe de phrases comme «ces deux aires sont différentes» à «l'aire 1 est plus grande que l'aire 2».

Professeur : comment fait-on ?

Élève : si on découpe… [comme tous les élèves ne sont pas nécessairement à ce même stade, des discussions/confrontations émergent]

P : faites le… [les élèves ayant à leur disposition des photocopies, ils peuvent placer les surfaces côte à côte, les découper…]

La manipulation effectuée par les élèves - découpage, superposition…- conduit à «il faut ajouter un petit bout à la surface 2» puis sous la médiation de l'enseignant «il faut ajouter une petite aire à l'aire 2 pour obtenir l'aire 1»…

P : [en indiquant le «petit bout»] on l'appelle surface 3 d'aire 3… pour que tout le monde parle de la même chose…

Une association / dissociation entre le découpage de surfaces et la soustraction d'aires est en train de s'opérer.

Le professeur demande alors aux élèves de faire une phrase et ils aboutissent à «l'aire 3 est l'aire qu'il faut ajouter à l'aire 2 pour obtenir l'aire 1» puis «l'aire 3 est la différence de l'aire 1 et de l'aire 2». Pendant tous ces échanges, l'intervention de l'enseignant est primordiale pour amener le plus grand nombre d'élèves, par des incitations, des encouragements, en suggérant aux uns de regarder ce que font les autres, à un questionnement intérieur et à un auto-questionnement. Ce dernier prend naissance à partir des influences que les apprenants exercent les uns sur les autres; ils doivent en quelque sorte synchroniser leur comportements individuels, l'enseignant assurant une forme de régulation qui doit être à la fois souple et orientée.

On aborde la deuxième possibilité de signification du signe «égale», compris ici comme indiquant une relation d'égalité, c'est à dire que les deux membres sont à la fois de même nature et de même valeur. Ce jeu à 3 aires donne la possibilité d'écrire des histoires, suivant que l'on choisit telle ou telle aire comme sujet de la phrase :

l'aire 1 est la somme de l'aire 2 et de l'aire 3

l'aire 3 est la différence de l'aire 1 et de l'aire 2…

De la manipulation et de sa verbalisation associée, les élèves sont passés à un discours plus élaboré faisant intervenir des objets mathématiques. La relation d'égalité [15] (dont nous pensons que c'est un concept central dans le système conceptuel des mathématiques), étant une relation, «fait lien», «fait lire», met en évidence le tout et les parties du tout. Elle fédère un certain nombre de concepts comme grandeur ici, nombre ailleurs, opérations, calcul…

Activité 4

Cette activité peut se dérouler en situation réelle, c'est à dire en plaçant un ou deux élèves dans le couloir avec par exemple une chose fournie servant de support matériel au segment inter-

[15] On ne peut pas s'étendre sur cette idée ici mais elle devrait ultérieurement faire l'objet d'un article, en particulier parce que la notion vygotskienne de pseudo-concept éclaire les difficultés de compréhension du «=» des élèves. Connaissant ces difficultés, il nous semble chaque fois que possible important de faire travailler les élèves sur sa conceptualisation.

venant dans la comparaison ou bien en laissant faire le travail d'imagination avec tous les élèves en classe.
L'important étant que la perception seule ne suffise plus à comparer.
On peut assister à des échanges nombreux et fournis, de multiples possibilités sont évoquées puis on commence à discerner l'idée de référence même si le mot en lui-même n'est pas prononcé. L'enseignant demandant des précisions, c'est bien l'intervention d'une troisième chose qui est en jeu, qui serait «commune « aux deux parties. Progressivement, les élèves s'approprient cette idée.
Une nouvelle question apparait : quoi choisir ? À ce niveau les échanges sont vifs, jusqu'à ce que les élèves conviennent que la référence choisie n'a pas d'importance, du moment que c'est «la même». Tout ce passage est une manifestation d'abstraction et en même temps des occasions de projeter les concepts de segment et de longueur dans cette nouvelle situation. Ce moment fait de confrontations, de négociations, d'argumentation est d'une grande importance pour arriver à construire la signification d'étalon (comme objet) qui pourra être tout segment.
Une fois, un étalon-chose choisi, la question de l'enseignant est de demander «maintenant, comment faire pour savoir quel est le segment le plus long ?».
Nouvelles discussions. L'idée de report de l'étalon émerge finalement (on est encore là pour beaucoup d'élèves dans une forme de manipulation; certains même mimant l'action).
Mais il est facile de déceler que la notion de quantité de place (donc de la définition de la longueur) augmente en *opérance*[16]; en effet, même formulée à leur manière, elle est très présente dans les échanges, en particulier quand il s'est agi de trouver l'étalon : un des critères de choix a été que la longueur de l'étalon soit plus petite que la longueur a évaluer… mais comme les deux segments, à cet instant, n'étaient toujours pas comparés, comment savoir.
La phase d'écriture va prendre ici toute son importance quand il va falloir «traduire» tout cela en «mots».

L'autre intérêt de cette activité, et non des moindres, est de faire appréhender l'idée de comptage qui se dégage après le report. Ce n'est pas comme cela que les élèves ont l'habitude de faire lorsqu'ils sont en situation de mesurage utilisant une règle «déjà» graduée. Généralement, ils plaquent la règle sur le segment et ils associent la deuxième extrémité avec le nombre en regard. Ici, ils sont tenus de compter en nombres-de fois où la longueur-étalon rentre dans la longueur à déterminer… Le concept de grandeur-mesurable commence à se construire, relié à une longueur-étalon, au nombre (nombres-de dans un premier temps). Se mettent à jour deux points de vue convergents et par là-même signifiants : la longueur à déterminer peut-être lue à la fois comme la somme de tant de longueurs-étalon et comme «le produit» de la longueur-étalon par un nombre. Ce nouveau concept se construit à partir d'un système d'autres concepts. Encore une mise au jour

[16] Niveau d'opérance : plus un concept monte en généralité (sa structure de généralisation) plus il permet d'embrasser un champ de problèmes grand et donc est plus à même d'être concept-outil dans la résolution de problèmes.

du point-clé qu'«un concept isolé n'a pas de sens». Le fait de posséder l'étalon (nous dirons ensuite l'unité de comptage) entraîne de pouvoir utiliser le nombre via l'idée de mesure. Le comptage prend un aspect différent.

Le fait de faire se centrer les élèves sur cette idée d'étalon va être déterminante pour le passage à l'écriture d'une longueur sous forme mathématique comme par exemple «8 cm» pour ne pas qu'elle soit lue (ou plutôt vue) comme «un nombre suivi d'une unité» (une simple concaténation). Intervention de l'enseignant : «que se passe-t-il si on prend un autre étalon?». Cette question peut-être immédiatement suivie de l'expérience consistant à prendre la longueur de la brosse à tableau et la longueur d'un cahier pour évaluer la longueur du tableau. Alors que la longueur du tableau se conserve, le nombre-de fois dans les deux cas n'est pas le même.

Ce qui est intéressant à remarquer ici est la richesse des propositions des élèves : par exemple, de commencer avec une longueur-étalon et si le nombre-de fois n'est pas un nombre entier, de continuer, de compléter avec une deuxième longueur-étalon, plus petite, ce qui se traduira peu de temps après par une écriture quasi-mathématique symbolique : $longueur = u \times 5 + z \times 3$.

On est très proche de la compréhension de l'écriture décimale et de l'idée de valeur de position.

Activité 5

Le travail sur la relation entre le tout et les parties, commencée dans les activités précédentes, est poursuivi ici. Mais aucun étalon, pas de mesurage possible. L'objectif est une réflexion plus conceptuelle mettant au centre la relation d'égalité et le principe de décomposition.

Très souvent dans une égalité qui exprime un problème comme celui-ci : Paul a deux billes, il en gagne trois, quel est le nombre de billes dont il dispose ?» On écrit 2 billes + 3 billes = 5 billes. Dans de genre d'égalité, une fois que l'on a écrit 5 billes, il y a comme une disparition des deux parties initiales, celle de 2 billes et celle de 3 billes. Si l'on n'y prend garde, cette manière de lire crée une oblitération de ce qu'il y a à gauche du «=» et induit, nolens volens, une habitude et finit par imposer un «sens» de lecture. On sait que cela est préjudiciable à toute conceptualisation du calcul et est une entrave à la compréhension de l'activité algébrique ultérieure (on peut se référer à toute la littérature sur ce sujet qui existe depuis une trentaine d'année). Nous pensons que l'activité, s'appuyant sur la grandeur mesurable en jeu, établit les conditions d'une appropriation de la signification *mathématique* de l'égalité (réflexivité, symétrie, transitivité). En effet, quand l'élève va écrire t = a + b + e … il n'y a pas disparition d'un des deux membres. D'autre part, le fait d'imposer le «sujet» de la phrase, formulée en premier en «français», mène à une certaine focalisation de la lecture. Si on complète cette tâche, comme cela est demandé par la suite, par d'autres phrases racontant la même histoire mais en changeant de sujet, s'active le changement de point de vue et la mobilité langagière [17]. Apprendre à changer de point de vue et faire un choix dans tous ceux possibles est une étape obligée, au vu des répercussions que cela a dans tout ce qui touche au calcul. La tâche demandée aux élèves concourt à la déconstruction de l'habitude du «sens unique» évoqué plus haut.

Activité 6

Retour sur l'idée d'étalon. Les élèves ont déjà été conscientisés à la nécessité de choisir un étalon pour comparer deux segments. La réflexion collective a débouché sur la notion de mesure. La contextualisation va demander une mise en œuvre des concepts de grandeur, mesure… Ce travail sera poursuivi par l'écriture symbolique et la discussion du «=».

Avec chaque étalon, les élèves vont «reporter» mentalement et arriver à écrire

$$aire(1) = u \times 5 = x \times 2{,}5 = y \times 10$$

En reprenant par exemple $aire(1) = u \times 5$, l'idée que la surface 1 occupe «cinq fois plus de place» que la «surface étalon» est validée en lien avec la définition. La cohérence est mise en avant en focalisant sur les deux membres de l'égalité qui sont de même nature et donc que 5 est ici la mesure quand l'unité de comptage est u et que 5 est un nombre.

En reprenant $aire(1) = u \times 5 = x \times 2{,}5 = y \times 10$ on insiste sur le fait qu'il s'agit de la même aire mais qu'elle est exprimée de plusieurs manières. Cela conduit à exprimer que la mesure dépend de l'unité de comptage choisie.

Nous en sommes ici aussi avec les élèves à un point d'inflexion où, grâce aux actions langagières conjointes qui se déroulent depuis l'activité 1, l'on peut passer, plus franchement et plus rigoureusement, d'une activité d'observation à un système d'écriture symbolique et par conséquent s'écarter (sans la nier) de la connaissance «uniquement» sensible.

C'est à ce moment là que l'enseignant peut introduire, en continuité logique et cohérente, une réflexion sur une écriture comme «AB = 8 cm» :

- d'abord en rattachant le signe «AB» au segment [AB] et en formulant «AB est la longueur du segment [AB]» où on retrouve bien à la fois le lien et la séparation entre l'objet mathématique «segment» et sa longueur, grandeur mesurable associée.
- à la *relation d'égalité* qui dit ici ce qu'est AB *et* ce qu'elle vaut
- enfin, à la lecture de 8 cm comme 1 cm x 8.

[17] Pour cet aspect, nous renvoyons plus particulièrement aux travaux de Savioz F., De la mobilité langagière en classe, avec l'exemple de l'apprentissage des mathématiques.

Activité 7

La contextualisation (la projection) d'un concept (ici, il s'agit davantage d'un champ de concepts) dans un problème participe à ce que l'on pourrait appeler «le principe de complétude ou de consistance», c'est à dire que cela fait naître un autre jeu de possibles dans la lecture du concept et provoque une extension et une solidification de sa sphère de significations. Ces contextualisations multiples concourent à la structuration d'un «concept de plein exercice».

Ces trois activités vont être aussi le lieu d'une préparation du passage du cadre des grandeurs au cadre numérique : profitant de la cohérence induite par la lecture des grandeurs, on peut passer aux mesures, puis aux nombres et ainsi faire «lire» des nombres (en écriture composée, pas sous forme réduite) en revenant chaque fois que nécessaire aux grandeurs «nourricières». Cette préparation est matérialisée par l'activité 7.

Le «sans-calculer» déroute la quasi-totalité de élèves de prime abord et c'est là un effet recherché pour continuer à mettre en œuvre la distinction, fondamentale de notre point de vue, entre opérer et calculer.

Les deux premières versions de l'activité 7 entraînent les apprenants à écrire des histoires qui ont en quelque sorte le même sujet, la longueur de la baguette restante. Nous sommes persuadés que de ne pas donner de valeurs chiffrales dans la version 2 accentue le soulignement entre opérer et calculer : opérer s'entendant comme choisir logiquement et intentionnellement les opérations perçues ici comme des abstractions de couper et ajouter, qui sont reliables comme des gestes imaginables de celui qui agit physiquement sur la baguette. On reste ici très proche de l'activité manipulatoire que l'on peut mobiliser à tout instant pour faire sens ou pour «justifier» la vérité de l'histoire écrite.

In fine, on aboutit à l'écriture de *ce qu'est* le longueur de la baguette, c'est donc bien une longueur que l'on écrit et pas une «opération» qui resterait à faire.

Calculer la longueur va entraîner la question «quelle forme prendra la réponse?». Ce travail se poursuivra au cours de l'année avec une séquence *Nombres - Opérations - Calcul* avec la donnée de la définition d'une opération numérique puis de celle de calcul[18].

On peut recenser les écritures des élèves

$$\begin{aligned}\textit{longueur de la baguette restante} &= 300cm - 85cm - 70cm - 70cm \\ &= 300cm - 85cm - 70cm \times 2 \\ &= 75cm\end{aligned}$$

[18] Pour toute la partie concernant *opérer et calculer* voir l'article Quelques réflexions sur le calcul, *Éléments 1*, IREM de Toulouse, pp. 4-18.

Plusieurs choses à remarquer

- avec *70cm - 70 cm* et *70cm* x *2* on retrouve la réflexion de l'activité 4 : à la fois les deux choses (morceaux de baguettes) sont physiquement discernables et ont la même longueur (attribut identique) et cela *revient à* enlever deux fois la même longueur; revenir à cette réflexion concourt à augmenter la «circulation de la pensée» entre deux structures de généralisation, à accentuer le travail de montée en abstraction entre le passage de deux choses distinctes mais ayant un attribut commun égal à l'idée d'identique puis à celle d'unité.
- ce produit *70cm* x *2* ne pouvant se lire que comme une grandeur implique que 2 est un nombre.
- il peut sembler positif de faire pointer aux élèves que la première phrase (le premier = pris comme dire ce que c'est) raconte l'histoire de la baguette exactement, on retrouve donc par la lecture le déroulement de l'action.
- la forme *75cm* fait perdre toutes ces informations (on ne peut plus raconter d'histoire ou bien plusieurs).

La version 3 complète avec insistance le travail précédent.

À travers cette activité, continuent à être visée la signification de l'égalité et la déconstruction d'une habitude instituée que «toute résolution de problème est calcul» sans anticiper sur «est-ce calculable en l'état ?» ou «calculer, mais pour quoi ?»

Activité 8

Afin que lors du passage au cadre numérique, les opérations et les nombres (au niveau de leur écriture composée) gardent du sens, nous pensons qu'une activité de cette nature est pertinente pour plusieurs raisons :

• en donnant la solution du problème, tout en imposant une *forme non réduite*, c'est l'imagination de l'élève qui est sollicitée, mais bornée par la *structure de l'écriture* de la grandeur fournie comme réponse.

• la lecture de la grandeur conditionne une *histoire* et fait s'établir un lien logique / dialectique avec des concepts quotidiens, eux-mêmes en développement.

La mise en commun des énoncés et leur critique est certainement la phase la plus importante : les échanges langagiers vont porter sur le sens, la pertinence des textes proposés. Au cours de la discussion le niveau du discours et son genre vont nécessairement évoluer. Le fait que tous les énoncés se retrouvent en quelque sorte *condensés* dans la même solution *4m + 3m* x *2* ne peut que favoriser l'incontournable travail d'abstraction.

Activité 9

L'introduction d'unités de comptage (ou unités de mesure mais on fera remarquer que cette expression recèle une ambiguité sur le mot mesure) différentes va permettre d'affiner la réflexion sur opérer et calculer. La masse totale pouvant s'exprimer comme *3,2t + 40kg* x *81*, le passage à la mesure nécessite de choisir une même unité de comptage d'où un calcul. Il s'agit bien d'un choix et donc on touche là à ce que d'aucuns appellent l'intelligence du calcul.

On pourra orienter les élèves sur la question suivante «Écrire une égalité comme 3,2t = 3200kg relève-t-elle du calcul ou pas ?». On pourra aussi insister, en fonction du niveau des échanges, sur le fait que calculer cette mesure induit un passage dans le cadre numérique qui va donner le nombre de *en-quoi-on-compte*.

Cette séquence porte en germe tout ce qu'un élève va rencontrer dans sa scolarité concernant les nombres. En créant les conditions d'enracinement des concepts scientifiques dans les concepts quotidiens, elle pourra permettre de garder du sens lorsque les notions de calcul, de priorités opératoires, de calcul littéral… seront traitées. Elle permettra également, et c'est là un point qui nous semble crucial, de ne pas faire appel à des règles ou routines mais au contraire de travailler par extension et par cohérence, ce qui devrait grandement faciliter la compréhension du domaine des nombres par les élèves et les rendre plus autonome face aux problèmes rencontrés.

Tableau donné en fin d'activité 1…

Nom de la grandeur	*Longueur*			*Durée*		*autres ??*
adjectifs	long, court	étendu, vaste	volumineux, spacieux	long, court	lourd, léger	
exemples						
« objet mathématique »	segment de droite					

[A]

(*Nous rappelons et explicitons dans cette partie quelques unes des idées-forces de l'approche historico-socio-culturelle*)

L'approche historico-socio-culturelle prend ses sources dans les travaux de différents auteurs au premier rang desquels LevVygotski mais également Henri Wallon. Il n'est pas ici le lieu de développer ces travaux tellement ils sont riches en prolongements possibles pour l'éducation. Nous reprendrons seulement quelques idées-forces sur lesquelles s'appuie la séquence proposée. Il est également nécessaire de préciser que toutes ces idées forment un tout, qu'il n'est pas possible de les lire de manière disjointe (ce serait d'ailleurs en perdre tout l'intérêt). Nous nous contenterons d'exposer quelques points et comme la lecture que nous faisons de ces idées-forces est forcément réductrice nous renverrons le lecteur pour une étude plus approfondie aux œuvres fondatrices suivantes

Pensée et langage de Lev Vigotski qui constitue l'ossature de cette conception,

De l'acte à la pensée de Henri Wallon

On peut ajouter également Avec Vygotski, sous la direction de Yves Clot, qui a l'avantage de faire le lien entre des auteurs comme Vygotski, Wallon, Bakhtine…

D'une manière générale, pour l'approche historico-socio-culturelle (AHSC), le développement des fonctions psychiques supérieures (extension de la pensée et de la conscience) est sociale et découle de modifications des fonctions psychiques à partir de l'appropriation/intériorisation des différents types «d'outils» culturels construits par les générations précédentes. Il s'ensuit que l'enseignement-apprentissage doit précéder le développement (c'est un des points qui différencient cette approche des autres conceptions d'éducation).

Pour citer Bernard Schneuwly : «Le développement à l'âge scolaire n'est possible que grâce à l'enseignement». L'enseignement, étant conçu sur une base disciplinaire, doit être systématique. Il doit susciter la réflexion, la prise de conscience et le contrôle dirigé de sa propre activité psychique.»

Un point capital de l'AHSC est le concept de médiation : par les «instruments psychologiques» qui modifient radicalement la relation de l'homme à lui-même et à son environnement social, par la médiation sémiotique qui permet un développement conjoint de la pensée et du langage, par la médiation humaine (entre élèves ou entre élève et enseignant).

L'extension/développement des fonctions psychiques supérieures (attention, volonté, mémoire, formation de systèmes de concepts, langages écrits…) procède de la différenciation des fonctions antérieurement indifférenciées. L'intégration de «signes» re-structure leur fonctionnement et leur forme. De ce fait, les «instruments psychologiques» ne sont pas seulement des prothèses (avec une seule fonction d'aide) mais sont des «transformateurs» de l'individu.

Le langage comme outil de construction et de maîtrise de la pensée

Les interactions entre élèves et entre élève et professeur provoquent des réorganisations mentales. L'édification de la «pensée» se fait de manière interpersonnelle puis intrapersonnelle.

Quand on est conscient de l'existence ce processus, il n'est pas rare de le rencontrer en classe : lors de débats, il arrive qu'un élève s'approprie l'idée d'un autre et que l'on entende « toi, tu dis ça [phrase] mais……» et en même temps on constate la transformation de la pensée du locuteur… en une sorte de réflexion «par contradiction».

La notion de Zone de Proche Développement (ZPD) est certainement celle la plus utilisée parmi toutes celles contenus dans les travaux de Vygotski mais également celle qui a le plus grand nombre d'interprétations.

Revenons au texte : «La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un est précisément le symptôme le plus notable qui caractérise la dynamique de son développement et de la réussite de son activité intellectuelle. Elle coïncide entièrement avec sa ZPD.» (Pensée et langage - page 353)

Pour nous, elle n'est pas une «zone» dans un sens géographique. Citons Françoise Savioz : «sous la locution zone de proche développement, est souvent entendu un aspect morphologique du développement intellectuel, voire quasi topologique ; ceci peut découler de sa traduction par «zone proximale de développement», formulation qui fait porter l'accent logique sur le mot "zone" (une étendue), plutôt que sur le mot «développement» (une dynamique) ; mais peut-être aussi, cette acception s'adapte-t-elle au flou qui entoure la notion d'âge mental».

Elle n'indique pas qu'il y aurait des situations d'enseignement «parfaites».

Elle ne signifie pas non plus qu'il y aurait pour chaque élève un «potentiel», vu comme «caractéristique intrinsèque à apprendre» qu'il suffirait de déclencher (cette conception est proche du modèle biologique avec la métaphore «du germe à la plante» et de l'enseignant comme jardinier).

En accord avec le modèle de développement d'un individu exposé par Vygotski, la ZPD concourt à révéler les fonctions psychologiques en cours de maturation, à en connaître leur état et à trouver les médiations qui vont favoriser leurs extensions et transformations.

La ZPD peut être vue comme espace-temps d'une tension entre l'extérieur et l'intérieur d'un élève, «croisement entre deux logiques, l'une d'enseignement, l'autre de développement» pour reprendre les propos de B.Schneuwly.

[B]

Autonomie

Ce terme est tellement utilisé qu'il nous parait nécessaire de donner la manière dont nous l'entendons, en droite ligne de Castoriadis et de Vygotski.

L'individu n'est pas «naturellement» autonome comme le laisse à penser certaines conceptions. Comme a dit Érasme, «on ne nait pas humain, on le devient». ce qui signifie que cette autonomie se construit justement au contact des autres, mais pas de manière automatique, où il suffirait de laisser immerger un jeune enfant dans un groupe/la société, et linéairement, de par sa propre évolution, il se transformerait en sujet autonome. Autonomie doit être entendue ici comme autonomie intellectuelle. Individu autonome comme se dirigeant lui-même, consciente de lui-même, de ses buts et de ses moyens et des Autres. C'est à ce niveau qu'intervient, de façon cruciale, l'école, par son vecteur, l'enseignant, non pas comme «maître tout puissant», ni comme «maître accoucheur». Mais comme celui, qui en connaissance de cette idée d'autonomie va créer les conditions (situations, problèmes posés, questionnement…) pour rendre cette construction de l'autonomie possible. D'où, encore une fois, l'importance de la médiation de l'enseignant.

Lev Vygotski conçoit le développement de l'enfant comme un processus d'appropriation de l'expérience sociale accumulée. Et l'apprentissage doit donc devancer le développement présent.

[C]

La formation des concepts

Vygotski distingue les concepts quotidiens («appris sur le tas» - ils ont une portée locale - ils sont contextualisés - ils sont relativement isolés les uns des autres) et les concepts scientifiques (ils ont une portée générale - ils forment des systèmes - ils se créent avec le concours essentiel du langage).

Autrement dit : les concepts spontanés/quotidiens peuvent être compris comme une forme de généralisation, quasi-exclusivement empirique, des expériences quotidiennes, sans enseignement systématique alors que les concepts scientifiques doivent être entendus comme généralisation de l'expérience de l'ensemble de l'humanité - les sciences au sens large embrassant toutes les connaissances humaines.

L'école est le lieu où les concepts scientifiques sont en cours d'appropriation / de constitution. Bien évidement l'appui sur les autres concepts est incontournable.

Pour faire suite à ce qui est écrit précédemment, certains traits distinctifs prennent plus de force. Parmi les objets une différenciation s'opère, une «première» généralisation a lieu puis l'abstraction. On peut dire que le concept est une synthèse de «pensées».

L'idée d'un concept «isolé» n'a pas de sens. Les concepts sont toujours en perpétuel développement chez chaque individu, insérés dans un système de concepts. Le développement de cette «structure de concepts» modifie la nature de la pensée de l'élève qui en retour accroît le développement de sa «structure de concepts». Ceci permet d'expliquer pourquoi l'enseignement de notions isolées n'a pas de sens.

[D]

Structure de généralisation

À elle toute seule cette idée-force de Vygotski mériterait un article. Comme ce n'est le lieu ici, nous citerons quelques passages fondamentaux de Pensée et Langage.

« […] les concepts scientifiques de type supérieur ne peuvent naître dans l'esprit de l'enfant qu'à partir des types de généralisation plus élémentaires et inférieurs qui existaient auparavant, et ne peuvent nullement être apportés de l'extérieur dans la conscience de l'enfant. » (pp. 290-291)

« Si la prise de conscience d'un concept équivaut à une généralisation, il est alors parfaitement évident que la généralisation, à son tour, ne signifie rien d'autre que la formation d'un concept supérieur qui inclut dans son système de généralisation le concept donné en tant que particulier. Et, s'il apparaît derrière le concept donné un concept supérieur, celui-ci implique nécessairement l'existence non pas d'un mais d'une série de concepts subordonnés, avec lesquels le concept donné a des rapports déterminés par le système du concept supérieur – sans quoi le concept supérieur ne serait pas supérieur au concept donné. Mais ce concept supérieur suppose en même temps une systématisation hiérarchique des concepts inférieurs au concept donné, qui lui sont subordonnés, et auxquels il est de son côté lié par un système tout à fait déterminé de rapports. Ainsi la généralisation d'un concept a pour conséquence que celui-ci est placé dans un système déterminé de rapports de généralité, qui représentent les liaisons les plus fondamentales, les plus naturelles et les plus importantes entre les concepts. La généralisation signifie donc à la fois prise de conscience et systématisation des concepts. » (p.319)

« Nous avons tout d'abord réussi à découvrir que la généralité (la différence de généralité) ne coïncide pas avec la structure de généralisation et ses différents stades tes que nous les avons dégagés dans l'étude expérimentale de la formation des concepts : images syncrétiques, complexes, préconcepts et concepts.

Premièrement, des concepts de généralité différente sont possibles dans une même structure de généralisation : ainsi, dans la structure des concept-complexes, « fleur » et « rose » sont également possibles. Nous devons, il est vrai, faire d'emblée une réserve : le rapport de généralité « fleur-rose » ne sera néanmoins pas le même dans chaque structure de généralisation, par exemple dans la structure des complexes et dans celle des préconcepts.

Deuxièmement, il peut y avoir des concepts de même généralité dans des structures de généralisation différentes. Ainsi « fleur » peut, dans la structure des complexes comme dans celle des concepts, être également la signification pour toutes les sortes de fleurs et se rapporter à toutes les fleurs. Ici encore, il est vrai, une réserve s'impose : cette généralité ne s'avérera identique dans des structures de généralisation différentes qu'au sens logique et concret et non au sens psychologique, c'est-à-dire que le rapport de généralité « fleur-rose » ne sera pas le même dans la structure des complexes et dans celle des concepts. Chez un enfant de deux ans ce rapport est plus concret ; le concept plus général coexiste en quelque sorte avec le concept plus particulier, il le remplace, alors que chez l'enfant de huit ans l'un est au-dessus de l'autre, le plus général inclut le plus particulier. (p. 382-383)

« […] : *à chaque structure de généralisation* (formation syncrétique, complexe, préconcept, concept) *correspond un système spécifique de généralité et de rapports de généralité entre les concepts généraux et particuliers*, une mesure propre d'unité du concret et de l'abstrait, mesure qui détermine la forme concrète d'un mouvement donné de concepts, d'une opération donnée de la pensée à tel ou tel stade de développement des significations de mots. » (pp. 383-384)

« … *chaque structure de généralisation détermine l'équivalence des concepts qui est possible dans sa sphère.* » (p. 388)

« Si l'on étudie le rapport de généralité d'un concept quelconque, sa mesure de généralité, on obtient le critère le plus sûr pour déterminer la structure de généralisation des concepts réels. Être porteur de signification équivaut à avoir certain rapports de généralité avec d'autres significations, c'est-à-dire à avoir une mesure spécifique de généralité. Ainsi c'est dans ses rapports spécifiques avec les autres concepts que se manifeste le plus complètement la nature d'un concept – formation syncrétique, complexe, préconcept. » (pp. 388-389)

« La nouvelle étude montre que le passage s'effectue autrement : l'enfant forme une nouvelle structure de généralisation d'abord avec quelques concepts, le plus souvent fraîchement acquis, par exemple dans le processus d'apprentissage ; il suffit qu'il ait maîtrisé cette nouvelle structure pour qu'il réorganise, transforme aussi la structure de tous les concepts précédents. Ainsi le travail antérieur de la pensée n'est pas perdu, les concepts ne sont pas réélaborés à chaque nouveau stade, chaque signification n'a pas à refaire tout le travail d'organisation de la structure. Grâce à la maîtrise du nouveau principe, cela s'opère, comme d'ailleurs toutes les opérations structurales de la pensée, sur quelques concepts qui sont ensuite étendus et transférés en vertu des lois de la structure à toute la sphère des concepts dans son ensemble.

Nous avons vu que la nouvelle structure de généralisation, à laquelle accède l'enfant au cours de l'apprentissage scolaire, permet à sa pensée de passer à un plan nouveau et plus élevé d'opérations logiques. Les anciens concepts, entraînés dans ces opérations mentales d'un type supérieur au précédent, se modifient eux-mêmes dans leur structure. » (p. 395)

[E]

Abstraction empirique et abstraction théorique

On peut parler d'abstraction empirique lorsque s'opèrent des classements, des regroupements. Qu'est-ce qui distingue alors cette abstraction de ce que nous appelons abstraction théorique ? C'est le fait notamment, qu'à tout moment, l'intervention de l'enseignant va orienter, alimenter, documenter cette abstraction en relation avec d'autres concepts. En quelque sorte, fournir un coup de pouce aux élèves dans la montée en généralité à laquelle ils procèdent, par cette mise en lien et par l'expression de cette montée en généralité au moyen d'autres concepts (l'enseignant est acteur de la construction du sujet et de la construction du sujet en lien avec le savoir). C'est ne pas laisser les élèves seuls dans cette phase, prendre garde que des relations logiques s'établissent. C'est amener les apprenants à une intériorisation plus grande, en poussant les instruments psychologiques à leur plus haut niveau d'opérance, à chaque moment, en fonction de l'analyse de la situation en train de se dérouler, par des questionnements, par de nouvelles demandes de re-formulation, voire par le blocage des négociations des significations. C'est être vigilant à l'établissement d'une relation/tension entre les concepts qui émergent, ici et maintenant, et les objets de savoir «fondés».

Vygotski dit que l'appropriation des concepts scientifiques évolue «à la condition d'une coopération systématique entre l'enfant et le professeur». Il nous semble que le «systématiquement» doit être compris dans les deux acceptions i) sans relâche, interpeller les élèves de manière permanente ii) par la mis en système des notions abordées.

Une «simple» abstraction empirique, du fait de cette non-systématicité, empêche, ou en tout cas contrarie, toute possibilité d'évolution du concept potentiel en concept de plein exercice.

L'abstraction théorique n'est plus un appauvrissement de la réalité en extrayant seulement une ressemblance mais permet un enrichissement par l'adjonction d'un attribut à l'objet dans notre manière de penser.

Plus les concepts en construction ont une base d'action grande (opérance), plus d'équivalence est possible… plus ils constituent une base conceptuelle solide, plus cette base est porteuse de plus grande potentialité à développer la compréhension d'autres concepts (comme l'exemple déjà cité de la somme de deux grandeurs et de la somme de deux fractions).

Ce processus n'est pas déterminé à l'avance, il comporte une grande part d'indéterminité. D'où l'importance de concevoir une séquence d'activités, permettant par le choix le plus riche possible un plus grand champ de possibles, ceci s'opposant à l'idée d'une seule activité-miracle. la succession d'activités complémentaires concourt par la mobilité langagière à faire naviguer les élèves entre les structures de généralisation et à l'intérieur d'une même structure, travailler les rapports de généralité.

Une autre manière d'aborder la compréhension de cette idée d'abstraction théorique est d'examiner deux exemples (certes un peu caricaturaux) de situations en classe :

- donner aux élèves une situation-problème, les laisser seuls au prise avec le problème, en regardant leur découverte de la solution (sans trop intervenir), puis finalement synthétiser et institutionnaliser. Nous pouvons penser que nous ne sommes pas loin d'une conception platonicienne.
- écrire une leçon, présenter le concept que l'on veut étudier, puis demander quelques applications. Nous sommes typiquement là en présence de ce que Vygotski dénonce comme verbalisme et au lieu de passer de l'objet au signe, pour reprendre Meyerson, nous en sommes à faire passser du signe à l'objet. L'enseignement dans ce cas conduit au seul développement de compétences.

Exemples caricaturaux puisque dans le premier cas, on sait pertinemment que l'enseignant ne peut pas rester sans réagir tout au long de l'activité et dans le deuxième cas, des questions d'élèves vont apparaître.

Ce processus est aussi création de la part de chaque élève au moment de l'intériorisation, non pas création ex nihilo, mais par re-structuration des fonctions psychiques supérieures. Création d'un monde nouveau, monde vu sous le rapport d'avoir plus de manières de le voir. C'est cette part de création qui donne d'autres potentialités à chaque individu tout en lui permettant de réaliser qu'il est parmi les Autres.

Bibliographie

Bronckart JP., *Les genres de textes et leur contribution au développement psychologique*, Langages, n° 153, 2004

Bronckart JP., *Interactions, discours, significations*, Langue française n° 74, 1987

Brossard M., *Espace discursif et activités cognitives : un apport de la théorie vygotskienne*, Enfance - Tome 42, 1989

Brossard M., *Vygotski. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Presses Universitaires du Septentrion, 2004

Castoriadis C., *L'institution imaginaire de la société*, Seuil / Collection Essais, 1975

Chevallard Y. Bosch M., *Les grandeurs en mathématiques au collège*, «Petit x» n°55 et n°59

Clot Y. (ouvrage collectif dirigé par), *Avec Vygotski*, Éditions La Dispute, 2002

Condillac, *La langue des calculs*, Presses Universitaires de Lille, 1981

D'Amore B., *Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques,* Scientia Paedagogica Experimentalis, 2001

Descombes V., *Les institutions du sens*, Les Éditions de Minuit, 1996

ÉduScol - MEN, *Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques - Grandeurs et mesures*, 2007

ÉduScol- MEN, *Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques - Les nombres au collège*, 2006

ÉduScol - MEN, *Document d'accompagnement des programmes de mathématiques - Du numérique au littéral*, 2006

ÉduScol - MEN, *Programmes d'enseignement des Mathématiques - Collège*, 2008

Friedrich J., *L'idée d'instrument psychologique chez Vygotski*, RIFL (vol.6), 2012

Laugier S., *Wittgeinstein Les sens de l'usage*, Vrin, 2009

Lebesgue H., *Sur la mesure des grandeurs,* L'enseignement mathématique - Vol.31, 1932

Lebesgue H., *Grandeurs mesurables,* L'enseignement mathématique - Vol.33, 1934

Meyerson I., *Les fonctions psychologiques et les œuvres*, Albin Michel, 1995

Radford L., *Théorie de l'objectivation,* Éléments 1 - IREM de Toulouse, 2011

Radford L., *La généralisation mathématique comme processus sémiotique*, 2004

Savioz F., *De la mobilité langagière en classe, avec l'exemple de l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de doctorat, 2007, Université de Toulouse 2

Schneuwly B., *Vygotski, l'école et l'écriture*, Cahier de la section des sciences de l'éducation n°118, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation

Van Oers B., *The Recontextualization of Inscriptions: an Activity-Theoretical Approach to the Transferability of Abstractions*, Paper for the Invited Symposium Rethinking Abstraction and Decontextualization in Relationship to the «Transfer Dilemma» San Diego, 2004

Veresov N., *Introducing cultural historical theory: main concepts and principles of genetic research methodology,* 2010

Vygotski L., *Pensée et langage*, La Dispute, 1997

Whitney H., *The mathematics of physical quantities (Part I : Mathematical models for measurement)*, American Mathematical Monthly, 1968

Yvon F. et Zinchenko Y., (sous la direction de), *Vygotsky, une théorie du développement et de l'éducation*, Université d'État de Moscou / Université de Montréal, 2012

MEN - Groupe National d'Équipes de Recherche en Didactique des Mathématiques, *Algèbre et fonctions*, 1998 ?