QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LE CALCUL

> « Les hommes ne communiquent les uns avec les autres par les significations qu'à proportion du développement des significations. »
> (A. N. Léontiev, *Le problème de la conscience. Note sur les thèses principales du rapport de L.S. Vygotski)*

Introduction

Depuis plusieurs années, notre groupe s'intéresse à l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège et à ses difficultés dont bon nombre se révèlent dans la pratique du calcul littéral. Depuis près de trente ans, de nombreux travaux ont été publiés sur le sujet, des études sur les erreurs des élèves parfois suivies de propositions ou de recommandations : ces études ont conduit leurs auteurs à une réflexion sur les différences entre arithmétique et algèbre, entre calculs numériques et littéraux. Brun, Conne et Lemoyne énumèrent certaines de ces différences à partir de publications diverses et de l'étude synthétique réalisée par Kieran (1989). Citons-les :

> « 1) l'essence de l'algèbre est la compréhension de la nature structurale des relations mathématiques et des procédures ;
>
> 2) l'arithmétique est procédurale ; en algèbre, les procédures font partie des objets (ex : $x^2 + 2x + 1$) ;
>
> 3) accepter en algèbre de suspendre l'évaluation des opérations constitue une rupture fondamentale avec l'arithmétique ;
>
> 4) pour résoudre des problèmes arithmétiques, les élèves ont recours à des méthodes différentes de celles qui sont attendues dans la résolution de problèmes d'algèbre. En arithmétique, l'élève effectue des comptages, des ajouts, des combinaisons de quantités, des traitements de nombres naturels, …, dans le but de produire une quantité, un nombre et ce produit obtenu ne porte pas de « mémoire de la manière dont il a été obtenu et est ainsi jugé indépendamment de sa production ». En algèbre, au contraire, produit et production doivent être liés et examinés : « Ainsi, si les élèves ne reconnaissent pas que le nombre total d'objets dans deux collections contenant 5 et 8 objets respectivement peut être écrit 5 + 8 (plutôt que 13), il est fortement improbable qu'ils sauront reconnaître que a + b représente le nombre total d'objets dans des collections contenant a et b objets. » (Kieran et al. 1990) ;
>
> 5) le signe = est interprété ainsi en arithmétique : « do something signal » ; ce qui entraîne le rejet d'identités et d'équations de types : a) 4 + 3 = 6 + 1 ; b) 2x + 3 = x + 4. » (J. Brun, F. Conne et G. Lemoyne, *Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre.*)

Nous ne commenterons pas en détails ces diverses affirmations qui rejoignent, dans la plupart des cas, nos observations en classe. Nous nous arrêterons seulement sur les deux derniers points

qui ont particulièrement nourri notre réflexion.

D'abord, il nous semble vrai de dire, comme nous l'avons constaté dans nos classes, que, lors d'une résolution de problèmes arithmétiques, le seul objectif que suivent souvent nos élèves, particulièrement en classe de sixième, c'est la production d'un « résultat ». Pour eux, tout calcul doit invariablement s'achever par la production d'un nombre écrit à l'aide de seuls chiffres et d'une virgule si nécessaire[1]. Même les formes fractionnaires des nombres sont la plupart du temps exclues : si l'on demande, par exemple, à des élèves de calculer $3{,}7 + \frac{9}{10}$, presque tous les élèves considéreront que la seule réponse légitime est 4,6 et refuseront la réponse $\frac{46}{10}$ ou $\frac{23}{5}$. Dans ces conditions, il n'y a pas à s'étonner que lors des premières activités de calcul littéral des élèves cherchent, désemparés, « un résultat », demandent « quand est-ce qu'on s'arrête de calculer ? » ou écrivent l'égalité « 3 + 2x = 5x », puisque tout « résultat » ne peut comporter de symbole d'opération.

Ensuite, il nous paraît évident que, pour la plupart des élèves, la signification de l'égalité n'est pas celle des mathématiciens. Elle est vue plutôt comme le « déclencheur » d'une action, souvent appelée calcul, sans la conscience explicite qu'elle est une relation entre deux formes d'un même nombre.

Ces quelques considérations, énoncées rapidement, nos lectures diverses, nos observations en classe, éclairées par la théorie de l'apprentissage dans laquelle nous nous plaçons, nous ont convaincus que les concepts de nombre, d'opération, d'égalité, de calcul, entre autres, et leurs développements, devaient être examinés en détail. En effet, ces concepts sont mobilisés tant en arithmétique qu'en algèbre, tant dans le calcul littéral que dans le calcul « d'avant le calcul littéral ». Pour plus de clarté, nous avons choisi d'appeler ce calcul « d'avant », abordé dès l'école primaire, qui ne s'effectue que sur des nombres écrits à l'aide de chiffres, le calcul chiffral[2], pour le distinguer du calcul littéral où certains nombres peuvent être écrits à l'aide de lettres. Cet article s'intéressera donc essentiellement au calcul, à l'articulation du calcul chiffral et du calcul littéral dans l'apprentissage en lien avec les concepts de nombre, d'opération et d'égalité desquels il ne peut être dissocié.

---

[1] Comme le souligne Chevallard (1985) : « En fait, le royaume du calcul est régi par la loi de simplification intériorisée en habitus, dont l'une des clauses est constituée par le principe d'achèvement des calculs. »

[2] Nous préférons employer l'adjectif « chiffral » plutôt que « numéral » que l'on rencontre parfois chez certains auteurs. Il nous semble qu'il exprime plus nettement que ce calcul ne porte que sur des nombres écrits en chiffres, alors que l'adjectif « numéral » renvoie à la notion de nombres sur lesquels portent à la fois le calcul chiffral et le calcul littéral.

I. Le cadre théorique

Notre réflexion sur le calcul chiffral et sur son articulation avec le calcul littéral s'inscrit dans une approche historico-socio-culturelle de l'apprentissage dont Vygotski est l'un des fondateurs essentiels[3]. Nous voudrions rappeler brièvement quelques idées-forces de cette approche qui ont particulièrement fondé notre pensée sur le problème de l'enseignement du calcul qu'il soit chiffral ou littéral :

a) les concepts[4] de l'algèbre sont des généralisations des préconcepts[5] de l'arithmétique, c'est-à-dire des généralisations des généralisations arithmétiques. Ils s'élaborent à partir de ce qui a été construit dans et par les activités antérieures, dans le domaine numérique, dès l'école primaire, sans révoquer ces constructions précédentes.

> « Un nouveau stade de généralisation ne peut apparaître que sur la base du précédent. Une nouvelle structure de généralisation a pour source non pas une nouvelle généralisation directe des objets à laquelle procéderait la pensée mais la généralisation des objets généralisés dans la structure précédente. Elle apparaît en tant que généralisation de généralisations et non pas simplement comme nouveau mode de généralisation d'objets singuliers. Le précédent travail de la pensée, qui s'est traduit dans les généralisations dominant au stade précédent, n'est pas annulé, n'est pas perdu mais s'intègre à titre de prémisse nécessaire dans le nouveau travail de la pensée.» (L.S. Vygotski, *Pensée & langage*, p. 391)

b) La pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale, le mot a un rôle décisif dans la formation d'un concept. Le mot permet à l'élève de diriger volontairement son attention sur certains traits distinctifs et en fait la synthèse, il symbolise en quelque sorte le concept en abstraction.

> « Le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale ; l'élément nouveau, l'élément central de tout ce processus, qu'on est fondé à considérer comme la cause productive de la maturation des concepts, est l'emploi spécifique du mot, l'utilisation fonctionnelle du signe comme moyen de formation des concepts. » (Ibid., p. 207)

c) Dans la conception vygotskienne des rapports entre pensée et langage, on pourrait dire que la pensée est en quelque sorte générée par l'activité et qu'elle se modifie par sa rencontre avec le langage et ce, à travers les significations verbales. Une signification verbale est l'unité indissociable d'une activité de pensée et de formes langagières ; mais c'est aussi un rapport entre activité de pensée et langage qui est variable au cours de l'histoire de l'élève et selon la nature de ses activités.

> « La signification du mot n'est pas immuable. Elle se modifie au cours du développement de l'enfant. Elle varie aussi avec les différents modes de fonctionnement de la pensée. C'est une formation plus dynamique que statique. » (Ibid., p. 427)

---

[3] Pour une présentation plus ample de l'œuvre de Vygotski, voir la brochure « Éléments 0 » et aussi les notes situées en dernière partie de l'article « Séquence d'introduction au calcul littéral » de cette présente brochure.

[4] Dans notre approche, un concept ne peut être isolé. Les concepts n'existent qu'intégrés dans des systèmes de concepts.

[5] Vygotski distingue les concepts des préconcepts. Les préconcepts se construisent par généralisation des choses, l'exemple typique étant les concepts arithmétiques de l'écolier. Les concepts, eux, se construisent par généralisation des objets antérieurement généralisés, l'exemple typique étant les concepts algébriques.

II. Une enquête

Notre approche théorique montre l'importance de la construction des concepts de nombre, d'opération, d'égalité et de calcul dans les activités arithmétiques, puisque c'est sur la « base » de ces constructions que pourront se développer ces concepts que l'activité algébrique mettra en jeu. Or nous avons souligné le rôle clé du mot dans la formation des concepts et son rapport dynamique avec l'idée avec laquelle il est lié, à travers des significations qui se modifient au cours de l'histoire de l'élève. C'est pourquoi il nous a semblé qu'une réflexion sur le calcul et son enseignement pouvait difficilement se passer d'une étude préalable pour tenter de cerner le niveau de développement de la signification du mot calcul ou du verbe calculer chez nos élèves. Pour cela, durant l'année scolaire 2009-2010, nous avons demandé à 172 élèves de deux collèges de l'académie de Toulouse, de répondre par écrit, sans contrainte de temps, à la question suivante : « En quelques phrases, pouvez-vous préciser ce que signifie pour vous calculer ? ». Au début d'une séance habituelle, sans qu'ils aient été prévenus, nous leur avons distribué une feuille pour qu'ils y écrivent leurs réponses. Cette expérience a été réalisé sur 99 élèves du collège Victor Hugo de Carmaux et sur 73 élèves du collège Émile Zola de Toulouse. Au total 48 élèves de sixième, 41 élèves de cinquième, 61 élèves de quatrième (dont 10 se trouvaient en quatrième aide et soutien) et 22 élèves de troisième d'insertion ont été interrogés. Nous récapitulons les différentes réponses des élèves dans le tableau ci-dessous :

Réponses des collégiens	**6e**		**5e**		**4e**		**3e**		**Total**	
	Effectif	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**
C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres (des chiffres). Faire une addition, une soustraction, multiplication, division.	22	53,6%	23	47,9%	25	41%	16	72,7%	86	50%
C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres pour trouver un résultat. Essayer de trouver un résultat.	8	19,5%	10	20,8%	19	31,1%	2	9,1%	39	22,7%
Compter.	2	4,9%	0	0%	5	8,2%	1	4,55%	8	4,7%
Résoudre un problème, trouver une solution.	4	9,8%	1	2,1%	1	1,7%	1	4,55%	7	4,1%
Il faut réfléchir.	2	4,9%	5	10,4%	2	3,3%	0	0%	9	5,2%
Réponses peu compréhensibles.	0	0%	2	4,2%	6	9,8%	1	4,55%	9	5,2%
Pas de réponse.	3	7,3%	7	14,6%	3	4,9%	1	4,55%	14	8,1%

Nous avons également posé la même question, dans les mêmes conditions, à 9 animateurs de l'IREM de Toulouse, à 9 professeurs de mathématiques chiliens du secondaire en stage à l'IREM de Toulouse et à 15 professeurs des écoles, profitant pour ces derniers d'un stage de formation continue. Il s'agissait dans ce cas d'essayer de déterminer, même grossièrement, si la signification du mot calcul (ou du verbe calculer) s'était développée pour ces personnes qui avaient continué à étudier les mathématiques pendant plusieurs années après le collège et d'apprécier dans quelle mesure la signification s'était modifiée.

Voici leurs réponses :

Réponses des professeurs de mathématiques	**Effectif**	**%**
Déterminer une valeur d'une expression (algébrique) en appliquant un algorithme, certaines règles…	6	33%
Réaliser, effectuer, faire des opérations, une suite d'opérations sur des nombres (des lettres, des objets mathématiques).	5	28 %
Réaliser, effectuer, faire des opérations pour trouver un résultat, une valeur numérique, résoudre un problème.	3	17 %
Procédé qui donne la réponse à un problème.	1	5,5 %
Utiliser les opérateurs +, –, ÷, × avec les réels.	1	5,5 %
C'est obtenir un résultat.	1	5,5 %
Mélange de nombres avec des opérations.	1	5,5 %

Réponses des professeurs des écoles	**Effectif**	**%**
Mettre en relation différents nombres (assembler des quantités) pour résoudre un problème.	6	40%
Utiliser différentes opérations pour résoudre un problème.	1	6,7%
Comprendre la relation possible entre des nombres.	1	6,7%
Manipulation de nombres.	1	6,7%
Donner un résultat.	1	6,7%
Calculer permet d'obtenir le résultat d'une opération.	1	6,7%
Réaliser des opérations.	1	6,7%
Permet de résoudre des problèmes.	1	6,7%
Confronter des nombres entre eux.	1	6,7%
Associer des nombres entre eux en fonction d'une opération donnée.	1	6,7%

III. Brève analyse et quelques commentaires

Commençons par une remarque. Comme l'écrit Vygotski :

> « Ainsi, dès l'origine, la pensée et le langage ne sont absolument pas taillés sur le même modèle. On peut dire en un certain sens qu'il existe entre eux une contradiction plutôt qu'une concordance. La structure du langage n'est pas le simple reflet, comme dans un miroir, de celle de la pensée. Aussi le langage ne peut-il revêtir la pensée comme une robe de confection. Il ne sert pas d'expression à une pensée toute faite. En se transformant en langage, la pensée se réorganise et se modifie. Elle ne s'exprime pas mais se réalise dans le mot. » (Ibid., p. 431)

Les réponses écrites que nous allons tenter d'analyser ne sont pour nous que des indices d'une pensée. Elles ne recouvrent pas entièrement la pensée des élèves ou des professeurs qu'il aurait sans doute fallu interroger plus finement, ce qui était impossible d'entreprendre dans le cadre de ce travail.

> « La pensée est un nuage d'où s'écoulent des gouttes de langage »
>
> (A. N. Léontiev, *Le problème de la conscience. Note sur les thèses principales du rapport de L.S. Vygotski.*)

III.1. Les élèves

Si nous observons les réponses des collégiens, nous constatons que la réponse majoritaire (50% des élèves) est que calculer « C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres. » Près d'un quart des collégiens (22,7 %) précisent que ces opérations « sont faites » en vue de trouver un « résultat ». Les autres réponses restent trop peu fréquentes pour vraiment pouvoir en tirer des conclusions.

Dans certaines classes, des élèves ont senti le besoin d'illustrer leurs essais de « définition » du verbe calculer. Ils ont demandé s'ils pouvaient donner des exemples de ce qu'ils considéraient comme des calculs. Ainsi 99 élèves (sur 172) ont écrits des exemples de calcul. Leurs exemples sont de deux ordres : les premiers sont du type « $10 - 5 = 5$ » ou « $4 + 3 = 7$ », certains calculs étant posés en colonnes. Ils représentent 85 % des exemples donnés. Les seconds sont du type « $3 + 4$ » ou « 2×4 » (non suivis du symbole d'égalité). Ils représentent 12 % des exemples donnés. Seulement 3 % des élèves écrivent un « calcul » où interviennent deux opérations comme « $3 \times 4 + 58 = 70$ ».

Il faut aussi relever que la réponse « calculer, c'est compter » a été donnée à 75 % par des élèves de classe de quatrième aide et soutien ou par un élève de troisième d'insertion.

Ces réponses appellent plusieurs brefs commentaires. D'abord on peut observer que les significations que donnent les élèves au verbe calculer ou au mot calcul ne se sont que peu

modifiées de la sixième à la quatrième (et même à la troisième, mais remarquons que nous parlons là d'élèves de troisième d'insertion). Nous pouvons noter que l'objectif d'un résultat est davantage signalé par les élèves de quatrième (31,1% en quatrième contre 19,5% en sixième). L'apprentissage du calcul littéral n'a, semble-t-il, guère changé le rapport au calcul des élèves de quatrième qui reste lié au seul calcul chiffral puisqu'aucun élève n'évoque le calcul littéral. Ensuite il est manifeste dans ces réponses que les significations de nombre, d'opération et de calcul sont encore peu discriminées chez les élèves. La notion de calcul est pensée par complexes[6] et la différenciation des traits distinctifs du calcul y est extrêmement limitée : en effet, lorsque qu'un élève écrit que « 3 + 4 » est un calcul, il tend à affirmer que, dans certains cas, calcul signifie nombre. De même, quand un élève dit que calculer « C'est additionner, soustraire, multiplier, diviser des nombres », il laisse entendre qu'opérer c'est calculer, qu'un calcul est une opération.

Il est à signaler qu'on peut retrouver ces mêmes « approximations » dans des manuels scolaires de mathématiques. Il arrive qu'on puisse lire sur une même page d'exercices les formulations suivantes[7] :

- « Calcule en ligne les opérations : a) 3 421 + 725 … » ,
- « Calcule mentalement les sommes : a) 34 + 12 + 16 + 15 … »,
- « Pose et effectue les opérations : a) 5 236 + 883 … ».

Cela laisse à penser au lecteur que somme et addition peuvent être synonymes, puisque l'opération en jeu dans le premier exemple est l'addition. La dernière formulation suggère que lorsqu'on écrit « 5 236 + 883 », l'opération n'est pas effectuée.

On peut aussi lire dans un autre manuel[8] : « Classer, sans poser aucune opération, ces calculs dans l'ordre croissant de leur résultat. A = 1 458 + 564 … ». Là encore, cela laisse entendre que l'on puisse classer des calculs dans un ordre croissant comme si ces calculs étaient des nombres.

De plus, dans dix manuels de sixième sur douze examinés, nous trouvons, dans la partie cours, concernant l'addition, le même exemple à quelque chose près :

$$\underset{\text{termes}}{\underset{\uparrow}{13{,}1} + \underset{\uparrow}{6{,}8}} = \underset{\text{somme}}{\underset{\uparrow}{19{,}9}}$$

La flèche indique que 19,9 est une somme, sans doute la somme de 13,1 et de 6,8. 19,9 est bien égal à la somme de 13, 1 et de 6,8 ou pour le dire comme Frege, 19,9 et 13,1 + 6,8 dénotent bien le même nombre, mais 19,9 ne peut être reconnu comme une somme puisque dans

[6] Voir note [C] située en dernière partie de l'article « Séquence d'introduction au calcul littéral » de cette présente brochure.

[7] Livre de mathématiques de sixième, Bréal, 2005, p. 37.

[8] Livre de mathématiques de sixième, collection Domino, Nathan, 2005, p. 56.

l'écriture 19,9 ne figure aucun signe particulier indiquant que ce nombre a été obtenu par addition (ni par soustraction d'ailleurs, ni par multiplication…). Par contre l'écriture 13,1 + 6,8 indique bien l'antériorité d'une opération dont on perçoit la « cicatrice »[9], le signe +. C'est la somme de 13,1 et de 6,8.

Dernière remarque : 14 élèves (8,1%) ne répondent pas à la question posée. Est-ce à dire qu'ils ne savent pas ce que c'est que calculer ? Pourtant, si nous leur demandions de calculer 137 + 246, tous sauraient ce qu'il y a à faire. Cette remarque peut être rapprochée de ce qu'écrit L. S. Vygotski :

> « La première chose qui mérite ici d'être notée, c'est la profonde *discordance, que l'expérimentation fait apparaître, entre la formation du concept et sa définition verbale.* Cette discordance se maintient non seulement chez l'adolescent mais aussi dans la pensée de l'adulte, parfois même dans la pensée au plus haut point développée. *La présence d'un concept et la conscience de ce concept ne coïncident ni dans le moment de leur apparition ni dans leur fonctionnement.* La première peut se manifester plus tôt et agir indépendamment de la seconde. L'analyse de la réalité à l'aide des concepts survient beaucoup plus tôt que l'analyse des concepts eux-mêmes. » (Ibid., p. 261)

III.2. Les professeurs du secondaire

Regardons maintenant les réponses des professeurs du secondaire. Elles diffèrent de celles des collégiens puisque la réponse majoritaire (33%) est « Déterminer une valeur (d'une expression) en appliquant un algorithme, certaines règles… ». 28% des professeurs répondent que calculer c'est « Réaliser, effectuer, faire des opérations, une suite d'opérations sur des nombres (des lettres, des objets mathématiques). » 17% précisent que ces opérations sont effectuées en vue d'un résultat, d'une valeur numérique, de résoudre un problème.

Il est à remarquer que la réponse majoritaire trouvée chez les collégiens ne se retrouve pas chez les professeurs. En effet aucun professeur n'écrit que calculer c'est additionner, soustraire, ou faire une addition, une soustraction. Les professeurs ne parlent que d'opérations, terme plus général.

Il est aussi à noter que quatre professeurs précisent qu'il peut s'agir de calcul algébrique, d'expression algébrique ou parlent de calcul sur des lettres[10] alors qu'aucun collégien n'a fait la moindre allusion au calcul littéral. Six d'entre eux parlent de valeur numérique (déterminer une valeur numérique d'une expression, effectuer une suite d'opérations pour arriver à une valeur numérique). Or l'expression « valeur numérique » apparaît dans les programmes de collège, entre

[9] Ce mot « cicatrice » qui indique qu'une opération a été réalisée, comme en chirurgie, peut permettre à des élèves de mieux distinguer les notions de nombre et d'opération. Il n'est pas rare d'entendre dans nos classes un élève reprendre un de ses camarades, lorsqu'il parle de multiplication pour 34 × 18 au lieu de nombre ou de produit : « Mais la multiplication est faite, tu ne vois pas la cicatrice ! ».

[10] On constatera que la notion de calcul sur des grandeurs n'a été évoquée ni par les élèves ni par les professeurs.

autres, en lien avec les équations (tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques) ou avec le calcul littéral (calculer la valeurs d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques). L'expression « valeur numérique » est donc manifestement liée au domaine de l'algèbre. En conséquence, on peut raisonnablement affirmer que dix professeurs (56%), font référence plus ou moins explicitement à l'algèbre dans leurs réponses. Pour eux la signification du concept de calcul a évolué, s'est développée.

> « …l'algèbre n'est pas une répétition de l'étude de l'arithmétique mais représente un plan nouveau et supérieur du développement de la pensée mathématique abstraite, laquelle réorganise et élève à un niveau supérieur la pensée arithmétique qui s'est élaborée antérieurement, … » (Ibid. p. 339)

On peut sans doute avancer l'idée que, pour les professeurs, la maîtrise des concepts algébriques a permis une réorganisation à un niveau supérieur de la pensée arithmétique : cette dernière s'est abstraite et généralisée. Le calcul littéral est évoqué, on parle de valeur d'une expression. Le calcul chiffral semble apparaître, pour la plupart, comme un cas particulier du calcul littéral.

III.3. Les professeurs des écoles

La même question posée à des professeurs des écoles donnent des réponses plus variées, même si la réponse « Mettre en relation différents nombres pour résoudre un problème » reste la plus fréquente (40 %). Il nous est donc plus difficile d'analyser ces réponses. Mais la réponse majoritaire suscite un commentaire : elle laisse entendre que pour ces professeurs des écoles, calculer s'apparente à opérer. En effet mettre en relation différents nombres, même dans cette expression vague puisque la relation n'est pas précisée, peut conduire à penser qu'il s'agit ici d'opérer car toute opération sur des nombres est bien une loi de composition interne sur un ensemble de nombres, du moins à l'école primaire ou au collège (à partir du lycée, on peut opérer sur d'autres objets comme les vecteurs, les fonctions, …).

IV. Vers une tentative de « définition »

Cette enquête, succinctement analysée, nous a à la fois permis de mieux évaluer le niveau de développement du concept de calcul chez les élèves et nous a confirmé ce que nous pressentions, à savoir que les traits distinctifs de ce concept n'étaient que peu différenciés chez eux, et qu'ils pensaient le calcul finalement comme un complexe. Or comme l'écrit Vygotski :

> « Le concept dans sa forme naturelle et développée suppose non seulement l'unification et la généralisation des éléments concrets de l'expérience mais encore leur différenciation, leur abstraction et

leur isolement et la capacité d'examiner ces éléments différenciés, abstraits, en dehors de la liaison concrète et empirique dans laquelle ils sont donnés. Sous ce rapport la pensée par complexes s'avère impuissante. Elle est toute entière marquée par une surabondance, une surproduction de liaisons et se distingue par une abstraction faiblement développée. Le processus de différenciation des traits distinctifs y est extrêmement limité. » (Ibid., p. 252)

S'est alors posé à nous le problème de savoir comment favoriser la différenciation et l'abstraction des traits distinctifs du concept de calcul dans notre enseignement. Il nous a semblé nécessaire de repenser en partie l'articulation calcul chiffral / calcul littéral puisque le mot calcul apparaissait dans les deux termes, et qu'il fallait analyser cette articulation non seulement en termes de ruptures ou de différences mais aussi en termes de continuité. Nous nous sommes donc interrogés sur les « traits communs » au calcul chiffral et au calcul littéral et avons tenté de les distinguer. Pour cela, plusieurs auteurs (parmi d'autres) ont particulièrement nourri notre pensée : Vygotski et sa loi d'équivalence des concepts, Frege et ses concepts de sens et de dénotation et Léontiev et sa théorie de l'activité.

Vygotski énonce son principe d'équivalence des concepts comme suit :

« C'est seulement aux stades supérieurs du développement des significations des mots et, par conséquent, des rapports de généralité qu'apparaît un phénomène d'une importance primordiale pour toute notre pensée et déterminé par la loi d'équivalence des concepts. La substance de cette loi est que *tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés*. » (Ibid, p. 385)

Il poursuit en disant qu'un exemple parfait de cette loi d'équivalence des concepts est donné par les concepts de nombres formés au cours de l'étude de l'arithmétique. Par exemple, écrit-il : 1 = 1 000 000 – 999 999 = n + 1 – n, quels que soit l'entier n.

1 peut donc s'écrire d'une infinité de façons comme différence de deux entiers consécutifs. Mais il peut aussi s'écrire comme somme (0,9 + 0,1) comme produit, comme quotient, comme somme d'un quotient et d'un produit … Il peut s'écrire d'une infinité de manières à l'aide des opérations et d'autres nombres. En conséquence, nous pouvons avancer que :

Tout nombre peut s'écrire d'une infinité de manières à l'aide d'autres nombres et des opérations.

Ou en prenant les termes de Frege : tout nombre peut être dénoté d'une infinité de manières à l'aide d'autres nombres et des opérations. 2 + 5 et 10 – 3 dénotent bien le même nombre même si le sens [11] (selon la définition de Frege) de ces deux écritures diffère.

« Or, il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères), outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler sens du signe, où est contenu le mode de donation de l'objet. » (G. Frege, *Sens et dénotation*)

Pour mieux saisir la théorie de l'activité de Léontiev, nous partirons d'un exemple. Soit le problème suivant posé à un élève de sixième : « Sur une étagère en bois de chêne de 80 cm de long, de 30 cm de large et de 2 cm d'épaisseur, on range 26 livres de 2,7 cm d'épaisseur chacun.

[11] Le mot « sens » a une toute autre signification chez Vygotski : le sens d'un mot représente l'ensemble de tous les faits psychologiques que ce mot fait apparaître dans notre conscience.

Peut-on ranger sur cette étagère 3 autres livres de même épaisseur que ceux déjà rangés ? » Supposons que ce problème soit posé en situation de classe à un élève A et lors d'un examen important pour un élève B. Ce que va inciter les deux élèves à se lancer dans la résolution du problème va sans doute différer : pour l'élève B, ce sera la réussite à son examen, pour l'élève A, ce pourra être de montrer à ses camarades qu'il raisonne vite, qu'il est le « meilleur » de la classe en mathématiques. Léontiev nomme ce qui, dans l'activité, fait fonction d'incitation, le motif [12] de l'activité.

Pour résoudre le problème, les deux élèves vont s'engager dans des actions orientées vers un but conscient : il est possible qu'ils dessinent l'étagère, schématisent la situation pour mieux la comprendre, opèrent sur certains nombres, calculent… Mais le but conscient de ces actions possibles ne coïncident pas strictement avec le motif : l'élève B ne calcule pas pour réussir son examen, mais pour exprimer un nombre qui pourrait lui permettre de répondre à la question.

Ces actions possèdent parallèlement un aspect opérationnel déterminé par les conditions concrètes de leur réalisation. Par exemple, l'élève A, pour aller plus vite calculera mentalement, il se contentera de gribouiller un schéma, accaparé par la volonté de répondre le plus rapidement possible à la question par oui ou par non, tandis que l'élève B dessinera avec application, posera les calculs… Léontiev appelle opération « le mode d'exécution d'une action » (Léontiev, 1976).

Il semble très probable que, même si ces deux élèves sont d'un niveau « équivalent », leurs productions écrites différeront quant à la qualité de l'expression, la clarté de la solution, leurs temps de réalisation, etc. ; la prise de conscience des actions et des opérations engagées sera sans doute plus grande chez l'élève B à cause de l'obligation qu'il ressentira de rédiger clairement. Mais pour tous les deux, le calcul, comme l'acte d'opérer sur certains nombres, ont été vécus comme des actions ou des opérations à but conscient (au sens de Léontiev), même si leurs degrés de conscience ont varié.

À la lumière de ces différents éclairages, on peut peut-être tenter une synthèse : tout nombre pouvant s'écrire sous une infinité de formes (loi d'équivalence des concepts), calculer un nombre consiste donc à l'écrire sous une forme souhaitée (une écriture qui dénote le même nombre dans le sens souhaité) et ce, que ce soit en calcul chiffral ou en calcul littéral. Pour cela, on va agir sur la forme du nombre (action ou opération consciente orientée vers un but), à l'aide des propriétés sur les nombres, dans le but de trouver la forme de ce nombre appropriée au problème posé.

Illustrons notre propos : si on demande à un élève de collège de calculer le nombre $A = 7 \times 137 + 7 \times 192$, sans autre précision, il comprend, par habitude, qu'on lui demande d'écrire le même nombre sous une autre forme, plus compacte, excluant tout symbole opératoire (exceptée la barre de fraction dans le calcul chiffral fractionnaire). C'est la plupart du temps la

[12] Certains auteurs préfèrent employer le terme de mobile à la place de motif.

forme qui nécessite le moins de caractères pour écrire le nombre, ce que les élèves appellent le « résultat ». En effet A sous la forme 7 × 137 + 7 × 192 requiert 11 caractères pour être écrit. Le calcul (ou une suite de calculs) va permettre d'écrire le nombre A à l'aide de 4 caractères seulement : 2303. Nous nommerons 2303 la « forme réduite » du nombre A pour la distinguer des autres formes, par analogie avec la forme réduite des polynômes. Mais tout calcul chiffral n'exige pas nécessairement la recherche de la « forme réduite » du nombre : imaginons, en effet, que l'on demande à ce même élève de collège si le nombre A est un multiple de 7. La recherche de la « forme réduite » du nombre A n'est plus judicieuse. Un autre calcul s'impose, c'est d'écrire A sous la forme 7 × (137 + 192) et de conclure. Dans les deux cas, les calculs sont bien des actions qui changent les formes du nombre A, mais ces formes dépendent du problème dans lequel le nombre apparaît.

Prenons maintenant un exemple dans le domaine du calcul littéral. Supposons que l'on propose à un élève de collège de développer l'expression $A(x) = (x + 1)(2x - 1) + 4(x + 1)$ où x est un nombre réel quelconque. Il va écrire : $A(x) = \ldots = 2x^2 + 5x + 3$. Si maintenant on lui demande de résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation $A(x) = 0$. Par calcul, cet élève devra écrire A(x) sous la forme $(x + 1)(2x + 3)$, puis résoudra l'équation produit. Là encore, comme dans le cas du calcul chiffral, les calculs sont des actions qui changent les formes du « nombre algébrique »[13] mais dépendantes du problème dans lequel ce nombre apparaît. Que ce soit dans le domaine du calcul chiffral ou dans celui du calcul littéral, calculer un nombre est une action dont le but est de trouver une forme du nombre adaptée au problème dans lequel il intervient.

On peut donc avancer que nous avons réussi à dégager des « traits communs » au calcul chiffral et au calcul littéral, ce qui nous permet de tenter de « définir » le calcul, non pas au sens mathématique (ce que nous serions bien incapables de faire[14]), mais d'en dessiner des contours suffisamment nets pour que l'élève puisse davantage prendre conscience de ce concept de calcul. Tentons cette « définition » :

Calculer un nombre, c'est écrire ce nombre sous une forme adaptée au problème dans lequel il intervient. Si le problème est seulement de calculer un nombre, calculer ce nombre c'est l'écrire sous sa « forme réduite », c'est-à-dire la forme qui nécessite le moins de signes possible pour l'écrire. [15]

V. Prolongements et perspectives

Cette réflexion sur la détermination de traits communs au calcul chiffral et au calcul littéral

[13] Nous reprenons l'expression de « nombre algébrique », malgré sa polysémie, définie dans l'article « Séquence d'introduction au calcul littéral » de cette brochure.

[14] La C.R.E.M. elle-même y renonce comme le note M. Artigue dans son article *L'intelligence du calcul.*

[15] Un élève de sixième a résumé à sa façon cette définition : « Alors calculer, c'est mettre le nombre sous la forme qui me plaît ! »

nous a permis de mieux cerner l'articulation entre ces deux calculs. Il a aussi rendu possible l'établissement d'une « définition » opérante du calcul qui puisse s'enseigner en classe pour permettre aux élèves de distinguer nettement le concept de calcul des autres concepts mis en jeu lors d'activités numériques et une meilleure prise de conscience de leurs actions et de leurs opérations (au sens de Léontiev). Ce travail de prise de conscience nous paraît essentiel pour favoriser le développement du concept de calcul[16] lorsqu'on abordera le calcul littéral. Il doit être accompagné d'un travail similaire sur les concepts d'opération, de nombre, d'égalité …, ces concepts étant liés dans un système de concepts. En particulier, il nous semble important que les élèves distinguent au moins deux temps dans l'activité de résolution de problèmes numériques : celui des opérations et celui du calcul. Et ce, pour faciliter la prise de conscience fondamentale entre opérer et calculer.

> « il arrive […] toujours, à quelque niveau que ce soit, et plus ou moins rapidement, un moment où il faut procéder à une élucidation essentielle au sens de tout le complexe numérique : celle de la différence entre une opération et un calcul. » (S. BARUK , *Si 7 = 0*)

C'est pourquoi, nous avons demandé que ces deux temps apparaissent explicitement et soient dégagés dans la rédaction des solutions de problèmes numériques. Nous leur avons prescrit de rédiger leur solution en trois parties : on opère, on calcule, on conclut.

Illustrons par un exemple ce que nous avons pu, entre autres, demander aux élèves de sixième. Considérons l'énoncé suivant : « Un coureur à pied a parcouru 5,5 km depuis le départ d'une course. Il se dit qu'une fois qu'il aura parcouru encore six fois cette distance, il lui restera à parcourir 3,695 km. Sans calcul, écrire la longueur totale de la course ? Calculer la longueur totale de la course. »

L'énoncé distingue bien les deux temps, celui de la détermination de la longueur totale de la course (sans calcul), qui est un temps où l'élève va être amené à opérer sur les nombres ou grandeurs donnés et celui du calcul de cette longueur. Il a aussi permis une discussion qui peut favoriser cette prise de conscience attendue. En effet, la plupart des élèves qui ont résolu le problème ont écrit : « On opère : sans calcul, la longueur totale de la course est 7 × 5,5 km + 3,695 km (nous passons sous silence ceux qui ont écrit 6 × 5,5 km + 3,695 km). Or, une question se pose sur le facteur 7 : comment a-t-il été obtenu ? 7 est obtenu par un calcul, 6 + 1 = 7. Donc on ne peut pas considérer que la proposition 7 × 5,5 km + 3,695 km a été produite sans calcul : elle en comporte un, puisque 7 n'apparaît pas dans l'énoncé. Cela les a amenés à comprendre que la réponse à cette première question était : « On opère : sans calcul, la longueur totale de la course est (6 + 1) × 5,5 km + 3,695 km. » Puis ils ont calculé en écrivant : « (6 + 1) × 5,5 km + 3,695 km = 7 × 5,5 km + 3,695 km = 38,5 km + 3,695 km = 42,195 km. »

Ces notions de nombre, d'opération, de calcul, d'égalité ont été travaillées tout au long de

[16] Rappelons qu'un concept de « plein exercice » est conscient et mobilisable à volonté.

l'année dans des activités diverses qui ne se restreignent pas à des recherches de problèmes numériques[17] . Il nous a semblé que l'ensemble de ce travail a rendu possible pour bon nombre d'élèves une meilleure prise de conscience de ces concepts. De plus, le travail de cinquième sur les enchaînements d'opérations a été facilité par cette approche. Le fait d'avoir eu à écrire durant l'année de sixième des expressions mobilisant plusieurs opérations comme (6 + 1) × 5,5 km + 3,695 km ou 80 cm – 26 × 2,7 cm les a familiarisés avec des expressions numériques que l'on rencontre en cinquième. Ainsi, lorsqu'on a demandé en cinquième la mesure (qui est un nombre) de ces grandeurs, en km ou en cm, ils ont écrit les nombres (6 + 1) × 5,5 + 3,695 ou 80 – 26 × 2,7 et les ont calculés comme ils avaient calculé les grandeurs (6 + 1) × 5,5 km + 3,695 km ou 80 cm – 26 × 2,7 cm, sans même hésiter pour beaucoup. Et ce lien entre grandeurs et mesures a permis de justifier les calculs de ces écritures numériques, sans avoir recours aux « priorités » dites opératoires qui posent tant de problèmes à enseigner[18].

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. (2005), « L'intelligence du calcul », *Le calcul sous toutes ses formes*, Actes de l'Université d'été de Saint-Flour.

BARUK, S. (2004), *Si 7 = 0*, Paris, Odile Jacob.

BEDNARZ, N., RADFORD, L., JANVIER, B., LEPAGE, A. (1992). *Arithmetical and Algebraic Thinking in Problem-Solving*, in W. Geeslin and K. Graham (eds.), Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-16), University of New Hampshire, USA, 1.

BENARD, D. (2002), « Nombres et calculs au collège : instituer une cohérence », *Repères-IREM*, n° 47.

BOOTH, L. (1985), « Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire », *Petit x*, n°5, IREM de Grenoble.

BOURDIER-SAVIOZ F. (2008), *L'erreur n'est pas une faute*, Paris, L'Harmattan.

BROSSARD, M. (2004), *VYGOTSKI. Lectures et perspectives de recherches en éducation*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.

BRUN, J., CONNE, F., LEMOYNE, G. (1993), « Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre », *RDM*, vol. 13/3, Grenoble, La pensée Sauvage.

[17] Ces notions doivent être également travaillées dans des activités théoriques.

[18] Ce point mériterait à lui seul un long développement que cette article ne peut contenir. Il sera abordé dans une prochaine publication.

CHEVALLARD, Y. (1985, 1989, 1990), « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège », *Petit x*, n°5, n° 19, n° 23, IREM de Grenoble.

CLOT, Y. (dir.) (2002), *Avec Vygotski*, Paris, La Dispute.

FREGE, G. (1971), Sens et dénotation, in *Écrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil.

KAHANE, J. P. (dir.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques*, C.R.E.M., Paris, Odile Jacob.

KIERAN, C. (1989), « A perspective on algebraic thinking », Actes de la 13e conférence internationale *Psychology of mathematics education*, 2.

KIERAN, C., BOOKER, G., FILLOY, E., VERGNAUD, G., WHEELER, D., (1990), *Cognitive Processes involved in learning school algebra,* in P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), ICME Studies, Cambridge University Press.

LÉONTIEV, A. (1976), *Le développement du psychisme*, Paris, Éditions Sociales.

LÉONTIEV, A. (2002), Le problème de la conscience. Note sur les thèses principales du rapport de L.S. Vygotski, in *Avec Vigotski*, Paris, La Dispute.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2006), *Le calcul numérique au collège*, Documents d'accompagnement des programmes de collège.

SCHNEUWLY, B. (2008), *Vygotski, l'école et l'écriture*, Genève, Les cahiers de la section des Sciences de l'Éducation, n° 118.

VYGOTSKI, L.S.(2003), *Conscience, inconscient, émotion*, Paris, La Dispute.

VYGOTSKI, L.S. (1997), *Pensée & langage*, Paris, La Dispute.