LE CONCEPT D'ÉGALITE : CLEF OU VERROU ?

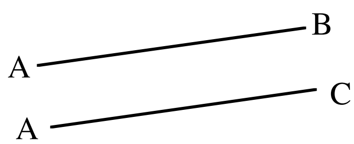
(Article original publié dans le n° 35 de la revue "*petit x*"
2è version, revue et augmentée)

Francis REYNES
Commission inter-IREM 1er cycle

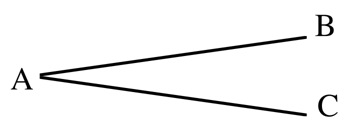
Certains concepts nous sont tellement familiers que nous avons beaucoup de mal à imaginer qu'ils puissent poser des problèmes à nos élèves. Tel est le cas, au premier chef, du concept d'égalité, "élémentaire" s'il en est. Élémentaire et primordial, assurément, mais pour autant pas aussi évident qu'il en a l'air ! Nous tenterons ici de montrer l'importance fondamentale de ce concept, sa spécificité, l'éventail de ses utilisations et la nécessité de clarifier son emploi par l'explicitation de son sens.

Faites, dans n'importe quelle classe, l'expérience suivante (lors du premier cours de l'année c'est encore mieux) : écrivez au tableau un bel " = ", retournez-vous en souriant, et demandez à vos élèves : " qu'est-ce que ça veut dire ?" Avec un bel ensemble enthousiaste, ils vous clameront : "égale ! ". Alors, jouant les naïfs, vous reprendrez : "je ne vous demande pas comment ça se **dit**, je sais bien que vous savez lire, mais je vous demande **comment ça se pense**, autrement dit ce que cela **signifie**". Devant l'éventail des mimiques et des réponses, vous comprendrez vite que vous tenez là l'exemple canonique des difficultés spécifiques que soulève l'emploi d'un langage scientifique et, qui plus est, formalisé. Pourtant, à leur entrée en 6è, les élèves l'utilisent depuis plusieurs années déjà, et même avec une certaine aisance apparente. De là à en extrapoler qu'ils savent vraiment de quoi il s'agit, il y a un grand pas qu'il faut absolument se garder de faire. En effet, l'emploi qu'ils en faisaient était limité au domaine numérique, **arithmétique**, alors qu'ils vont désormais avoir à l'utiliser dans un contexte **algébrique**, voire même géométrique. Or ce "***passage de l'arithmétique à l'algèbre***" est loin d'être évident, comme l'a très bien montré Y. Chevallard (*petit x* n°s 5,19, 23).

L'algèbre demande une prise de distance vis-à-vis de l'écriture du nombre, la géométrie, tout autant mais sur un autre mode, un recul par rapport au dessin. Lorsqu'on demande en 6è —et même bien plus tard ! — d'expliquer ce que signifie "4x3 = 5 + 7", on entend : "ils ont la même valeur" ou "c'est le même résultat". Il y a une idée juste, assurément, qui s'exprime par l'emploi de "même" ; mais on n'entend jamais : "c'est le même nombre", car la distinction essentielle n'est pas faite entre un nombre et son écriture (**ses** écriture**s**), ce qui est normal à ce niveau. Et lorsque j'ai demandé, en 6è :
"Dessinez deux segments [A B] et [A C]",
tous mes élèves ont produit un dessin du genre suivant :
(avec, dans la majorité des cas, AB = AC,
car... on n'est jamais trop prudent !)

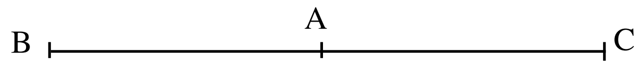


En 4e encore quelques élèves donnent cette réponse,
mais la plupart font un dessin du genre ci-contre ;
parfois les segments sont perpendiculaires, mais on a



toujours AB = AC.

J'ai aussi trouvé, mais plus rarement :



Mais le plus remarquable est que j'ai retrouvé cette variété de réponses en 4e lorsque j'ai demandé : " faites un dessin qui traduise l'information : [A B] = [A C]".

L'emploi du mot "même" est très ambigu, car tiré de l'emploi usuel où l'on dit par exemple, "il *a le même livre que moi*" alors qu'il s'agit de **deux** livres, ou "*elle a la même robe que moi*" alors qu'il y a évidemment **deux** robes. Il y a beaucoup de sous-entendu dans ce "même", plus précisément une relation d'équivalence quasiment jamais explicitée : c'est le même modèle, la même édition, etc. Le langage mathématique exige que ces implicites soient levés.
Au Collège, progressivement, les élèves apprennent à se détacher de l'emprise du concret, à se libérer de ses contraintes et de ses limites. Le concept d'égalité doit alors bénéficier d'un nouveau statut, d'une nouvelle extension et d'une nouvelle compréhension. Or il se trouve que l'on a ici la chance de pouvoir accéder à une définition parfaitement correcte et rigoureuse :

1) Tout élève de 6è sait bien que la photo d'un chat n'est pas le "vrai" chat.

2) Il comprend sans mal que, pour pouvoir parler d'un "objet" ou d'un "être" quelconque, il faut pouvoir le nommer, ce qui présuppose que cet objet ait un **nom**.

3) Il convient tout aussi aisément qu'il vaut mieux éviter de donner le même nom à deux objets, sans quoi on en arriverait vite à ne plus savoir de quoi on parle.

4) Il sait d'expérience que l'**on peut donner plusieurs noms à la même "chose"**.

Ces quatre préalables, tous "évidents", sont pourtant loin d'être un luxe inutile ; **fonder leur évidence** constitue au contraire une assise indispensable à l'élaboration future. Pour s'en convaincre il suffit de poser la question suivante (dans n'importe quelle classe...) : *Lorsque j'écris :* (AB) = (AE), *je parle de combien de droites ?* Réponse quasi unanime : deux !...

Les "objets mathématiques" ne sont pas des objets physiques, matériels, appréhensibles par les sens, et il importe de pointer cette différence de nature, ce changement d'univers, cette rupture lourde de conséquences : ce sont des "concepts", des idées, des fruits de l'imagination humaine. Personne n'a jamais vu et ne verra jamais le nombre "douze" ! (Les élèves sont un peu choqués lorsqu'on leur dit que, de la même façon, personne n'a jamais vu un cercle, tant est installée la prégnance de la perception et mal défini le "statut de la figure", mais l'essence du problème n'en reste pas moins la même : le dessin d'un cercle n'est pas plus un cercle que l'image d'une pomme n'est une "vraie" pomme, cf. "La trahison des images" de Magritte).

Il est pourtant possible d'appréhender et de manipuler ces "objets idéels", à condition de disposer de quoi les **représenter**, les **nommer**. Ce point est crucial et il est indispensable d'amener peu à peu les élèves à réaliser que les Mathématiques fonctionnent uniquement par l'intermédiaire des représentations, des désignations, des dénominations, des **noms**, car "*le but des mots est de pouvoir s'occuper d'autres objets que les mots*" (A. SCHAFF). En mathématiques, on a même la liberté de donner un nom à un objet inconnu, voire inexistant !

En tant que relation entre objets mathématiques, l'égalité traduit l'identité, la pérennité de l'objet : "4x3 = 5 + 7" ne dit alors pas autre chose que "douze est douze".

Mais c'est en tant que relation entre les <u>dénominations</u> d'objets que le concept d'égalité se révèle riche, fondamental et indispensable.

Pour bien saisir l'essence du concept d'égalité, sa portée, et le contexte dans lequel il doit être appréhendé, celui du **langage**, je citerai un court extrait de l'article "Notation mathématique" de l'Encyclopaedia Universalis : "*Un même objet peut avoir des noms divers, ainsi "Paris" et "la capitale de la France" désignent le même objet ; le nombre* 9 *peut être désigné par une infinité d'expressions, telles que* 2 + 7, 10 – 1, 32, 9x1*, etc.* ***Dans cette interprétation, le signe d'égalité n'est pas un signe mathématique, mais un signe sémantique, exprimant que deux termes signifient la même chose.*****"** J'ai mis en gras ce qui me paraît essentiel : la référence à la signification du langage, car c'est elle qui conditionne la mise en évidence et la prise de conscience du sens.
Tout élève de 6è est capable de comprendre que les **deux noms** "Paris" et "la capitale de la France" désignent **<u>la même</u> ville**. Alors il sera tout aussi capable de comprendre que les **deux écritures** "4 x 3" et "5 + 7" désignent **<u>le même</u> nombre**, douze, autrement dit que ce sont **deux dénominations d'UN SEUL "objet".** Cette information **se traduit** en langage mathématique en disant que **ces deux dénominations sont *égales*** et en écrivant : **4** x **3 = 5 + 7**.

D'une manière analogue et générale, la phrase *"truc = machin"* signifie que les deux écritures *truc* et *machin* sont deux dénominations d'UN SEUL et même objet, deux noms pour la même chose.

"=" doit donc être traduit, pensé : "désigne le même objet mathématique **que".**

C'est tout. Et... "*C'est beaucoup ; ce n'est pas trop.*" (Boby LAPOINTE). Car l'expérience prouve qu'il n'est pas facile de **penser autre chose que ce qu'on** (se) **dit** quand on lit "égale".

Dans son article "Sens et dénotation" [á] (publié en 1892), G. FREGE analyse extraordinairement bien ce qui est associé à un signe. En voici quelques extraits :

Si l'on voulait voir dans l'égalité une relation entre ce que dénotent respectivement les noms «a» et «b» , a = b ne pourrait pas, semble-t-il, différer de a = a, à supposer que la proposition a = b soit vraie. On aurait là l'expression d'une relation entre une chose et elle-même, relation que toute chose entretient avec elle-même, mais qui n'est jamais vérifiée entre deux choses différentes. D'autre part, il semble que par a = b, on veuille dire que les signes «a» et «b» dénotent la même chose et, dans ce cas, la proposition porterait sur les signes ; on affirmerait l'existence d'une relation entre ces signes. (...)

En conséquence, la proposition $a = b$ ne concernerait plus la chose elle-même, mais la manière dont nous la désignons ; nous n'y exprimerions aucune connaissance proprement dite. Telle est bien cependant le plus souvent notre intention. Si l'on admet que le signe «a» se distingue du signe «b» en tant qu'objet seulement (ici, par la seule forme) et non en tant que signe, en tant qu'il désigne quelque chose, alors la valeur de connaissance de $a = a$ serait essentiellement identique à celle de $a = b$, à supposer que la proposition $a = b$ soit vraie. On ne saurait les distinguer que si la différence des signes correspond à une différence dans la manière dont l'objet désigné est donné.
Or, il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères), outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler le sens du signe, où est contenu le mode de donation de l'objet.
(...)
Le lien régulier entre le signe, son sens, et sa dénotation, est tel qu'au signe correspond un sens déterminé et au sens une dénotation déterminée tandis qu'une seule dénotation (un seul objet) est susceptible de plus d'un signe. (...) A vrai dire, ce rapport régulier admet des exceptions. (...) L'expression "la suite qui converge le moins rapidement" a un sens mais on démontre qu'elle n'a pas de dénotation. (...) On peut donc concevoir un sens sans avoir pour autant avec certitude une dénotation.
(...)
Si nous estimons que, dans le cas général, «a = a» et «a = b» ont une valeur différente pour la connaissance, la raison en est que, eu égard au gain de connaissance, le sens de ces propositions, c'est-à-dire la pensée qu'elles expriment, entre en compte autant que la dénotation, laquelle est la valeur de vérité de ces propositions. Si $a = b$ la dénotation de b est bien la même que celle de a, et la valeur de vérité de $a = b$ est aussi la même que celle de $a = a$. Toutefois, le sens de b peut être différent du sens de a et par là la pensée exprimée dans $a = b$ peut être différente de celle exprimée dans $a = a$. Dans ce cas, les deux propositions n'ont pas non plus la même valeur pour la connaissance.
Ainsi, et pour reprendre la terminologie de Frege, les signes «4x3» et «5 + 7» ont, en tant que signes et non en tant qu'objets, la même dénotation (le nombre douze) et deux sens différents puisque leur "mode de donation" du nombre douze n'est pas le même. L'égalité "$4 \times 3 = 5 + 7$" contient donc une connaissance effective, apporte un gain de connaissance par rapport à $4 \times 3 = 4 \times 3$.

Puisque l'égalité est appréhendée ainsi comme une traduction mathématique d'une propriété linguistique "élémentaire" (**un signifié** peut admettre **plusieurs signifiants**), il semble logique et raisonnable de commencer par s'exercer à ces traductions. Cela aura de plus l'avantage d'habituer peu à peu à considérer des écritures telles que 4×3 ou $5 + 7$ comme des dénominations d'**un seul** nombre. Par exemple, traduire "douze est le double de six" oblige à analyser la phrase et à la structurer en trois composants (sujet, verbe, attribut) dont les traductions vont faire émerger le sens : puisque "douze" s'écrira 12 et "le double de six" 2×6, "est" se traduira forcément et naturellement par "=". Cette traduction du verbe être, fréquente et fondamentale, est à distinguer de celle qui intervient dans des phrases telles que "douze est un nombre pair" : cette distinction ne peut s'effectuer que par l'analyse du sens et de la fonction : "un", article indéfini, interdit d'attribuer à l'expression "un nombre pair" le statut de dénomination d'objet, donc le "est" ne signifie pas ici "est la même chose que" et ne peut donc pas être traduit par "=".

L'expérience prouve que **l'unicité de l'objet désigné**, fondement même du concept d'égalité, est le plus souvent "oubliée"! Du coup persiste aussi la **confusion entre un objet (idéel) et l'une de ses représentations (matérielle)**, avec tous les "dérapages" que cela implique, particulièrement pernicieux en géométrie ("on voit sur la figure"). Aussi ne faut-il pas manquer la moindre occasion de rappeler cette unicité **et de s'en servir**, nous allons voir comment.

Dans un dictionnaire de mathématique paru en 1973 on trouve la définition suivante : "**Egalité :** deux objets mathématiques a et b sont égaux si a et b sont deux représentations du *même* objet. L'égalité mathématique est, en fait, l'<u>identité</u>." Nous sommes ici en pleine confusion mentale...

Du temps des "maths modernes", la brochure "MOTS" de l'A.P.M.E.P., parue en 1974, insistait bien sur la distinction à faire entre objet et dénomination de cet objet : « La notion d'égalité suppose que, *pour l'activité considérée*, la distinction entre objets d'une part et symboles (ou noms) d'autre part est exempte de toute ambiguïté. L'information apportée peut alors s'interpréter soit au niveau de l'objet comme une identité, soit au niveau des symboles comme une synonymie. A cet égard, on doit être conscient que l'énonciation "a et b sont égaux", quoique courante, ne résiste pas à une analyse serrée : en effet, s'il s'agit des noms a et b, elle est fausse puisqu'ils sont *différents,* et s'il s'agit de l'objet unique nommé a ou b, le pluriel "*égaux*" est injustifiable.»

Après l'énoncé (incontournable à l'époque) des trois propriétés d'une relation d'équivalence, il était ajouté :

«4. L'intérêt essentiel de la notion d'égalité est le suivant :
Si a = b, on peut, dans toute phrase mathématique, remplacer indifféremment "a" par "b" et "b" par "a" sans modifier le sens de la phrase.»

Mais pas le moindre exemple de cet "intérêt essentiel" n'était donné...

Dans les manuels actuels, on trouve parfois une définition de l'égalité, plus souvent des "**règles de calcul**" du genre *"Si $x = y$, alors $x + z = y + z$",* ou une liste de "propriétés".

J'avoue ne pas comprendre pourquoi on passe quasiment toujours sous silence **LA "propriété"** fondamentale et essentielle de l'égalité, ni pourquoi, lorsqu'il arrive qu'on la mentionne, on n'explique ni ne montre jamais comment elle fonctionne et à quoi elle sert !

L'égalité n'a, en effet, qu'<u>une seule "propriété"</u>, qui dérive directement de l'essence même de sa définition, et dont les applications et les conséquences sont aussi variées qu'importantes.

Cette "propriété" c'est son **mode d'emploi**. Son principe n'est pas vraiment difficile à comprendre, mais sa maîtrise demande un apprentissage authentique et l'on aurait tort de sous-estimer l'effort qu'il requiert : sa mise en œuvre nécessite en effet un **travail**

sur les écritures auquel les élèves ne sont absolument pas habitués. Pour autant, il me paraît illusoire et dangereux de penser que l'on peut en faire l'économie.

L'utilité de l'égalité tient en un mot : SUBSTITUTION.

A quoi sert l'égalité ? À opérer des substitutions.

Pourquoi ? Comment ? Quel gain de connaissance en tire-t-on ?

Deux dénominations étant égales lorsqu'elles désignent le même objet, lorsque **truc = machin,** je peux donc **employer indifféremment** le nom "**truc**" ou le nom "**machin**" pour désigner l'objet unique que ces deux noms dénotent. En particulier je peux donc *changer de nom* si cela m'est utile puisque, de toute façon, je parlerai toujours de la même chose. Autrement dit, **je peux toujours <u>remplacer</u> un nom par un autre qui lui est égal.** Voilà tout le "mystère" du mode d'emploi de l'égalité ! Il se résume en une formule lapidaire :

On a toujours le droit de REMPLACER une dénomination par une dénomination égale.

Cela semble si évident qu'on se demande quels obstacles peuvent bien entraver la mise en pratique de cette facilité ! Et pourtant ... il y en a. Il semble que l'obstacle soit double et se situe

- <u>d'une part</u> dans la **structuration de la perception des écritures** : par exemple, en présence de l'égalité $x + 3 = 5$, il faut perce**voir** que c'est $x + 3$ qui joue le rôle de **truc** et que c'est 5 qui joue le rôle de **machin**. Au début, beaucoup d'élèves disent que c'est x qui joue le rôle de **truc**, certains disent que c'est 3, ce que l'on peut comprendre dans la mesure où, x et 3 étant en eux-mêmes des dénominations, il faut donc **voir et concevoir** $x + 3$ comme un "nom composé", il faut avoir compris que "la somme de x et de 3" désigne **un** nombre. Pour aider à franchir cet obstacle il faut revenir à l'**analyse de l'égalité en tant que <u>phrase</u> : quel est le groupe verbal, quel est le sujet, quel est l'attribut ?**

- <u>d'autre part</u> dans une contrainte pratique, graphique : **on n'efface pas une désignation pour en écrire une autre à la place : la substitution se manifeste par une <u>réécriture</u> de son résultat.**

Si $x + 8 = 13$, alors je peux remplacer $x + 8$ par 13, donc, par exemple, $x + 8 + 9 = 13 + 9$.

Pour faire comprendre cette procédure, on peut mimer au tableau le "couper-coller" d'un traitement de texte : on écrit $x + 8 + 9 = x + 8 + 9$ puis dans le membre de droite on efface $x + 8$ et on le remplace par 13.

Il faut ensuite faire réaliser que, comme il est malaisé d'effacer sur une feuille de papier, on écrit seulement le résultat de la substitution : $x + 8 + 9 = 13 + 9$.

Si *truc* = *machin,* alors je peux réécrire n'importe quelle écriture dans laquelle se trouve *truc* en mettant *machin* à la place où était *truc*.

Bien entendu, dans la pratique, cette réécriture ne sera pas gratuite mais opérée en fonction d'un certain but (résolution d'équation, détermination d'une image par une fonction, changement de variable, etc.), apportant ainsi un "gain de connaissance". Mais pour ce qui est de l'utilisation, du mode d'emploi, point n'est besoin de s'occuper d'une classification typologique des différents types d'égalité. Il est clair que $4 \times 3 = 12$ n'a pas le même statut, le même contenu conceptuel que $4 \times x = 12$: pour cette dernière égalité, il convient de savoir d'une part à quel ensemble de référence est attaché x, d'autre part quelle est la quantification (universelle ou existentielle) qui doit précéder l'égalité : la valeur de vérité de la proposition ainsi formée en dépend. Du point de vue de la substitution, le fonctionnement n'en demeure pas moins strictement le même.

Si je sais que, **quels que soient les nombres désignés par r, s, t, $\mathbf{r \times (s + t) = r \times s + r \times t}$,** alors d'une part je peux remplacer r, s, t par n'importe quelle autre dénomination de nombre, d'autre part je peux remplacer le "premier membre" de l'égalité par le "deuxième membre".

Si je sais que la fonction numérique notée "f" est définie par : **pour tout nombre réel t, $\mathbf{f(t) = t \times (3 - t)}$**, alors je peux remplacer t par n'importe quelle dénomination de nombre réel, ce qui me permet non seulement de calculer l'image d'un nombre spécifié en substituant ce nombre à chaque occurrence de t, mais aussi de produire des résultats plus élaborés du genre : si $t = m + 7$, alors $f(m + 7) = (m + 7) \times [3 - (m + 7)]$. Nous reverrons cela un peu plus loin.

Si je cherche un nombre réel, **désigné hypothétiquement et provisoirement par *x***, tel que $3 \times x + 7 = 2$, alors je peux "faire comme si" $3 \times x + 7$ était une dénomination de 2 et en déduire que $3 \times x + 7 - 7 = 2 - 7$. Cela me conduira à établir que le nombre que je cherche existe car je pourrai l'exhiber : c'est $-5/3$.

Si je cherche un nombre réel, désigné par r, tel que $r^2 + 8 = 3$, alors je fais comme si 3 pouvait se nommer $r^2 + 8$. J'en déduirai que $r^2 + 8 - 3 = 3 - 3$, d'où $r^2 + 5 = 0$, ce qui prouve qu'un tel nombre n'existe pas, voilà tout !

Que la proposition «il existe un réel r tel que $r^2 = -1$» soit fausse n'empêche pas que la proposition «pour tout réel r, **si** $r^2 = -1$, **alors** $r^2 + 1 = 0$» soit vraie !

Il n'est évidemment pas question d'utiliser les quantificateurs au Collège. S'il est cependant indispensable de bien marquer les champs d'application des lois algébriques (essentiellement le fait que zéro n'ait pas d'inverse et les conséquences que cela entraîne), il est clair que cela ne constitue pas un handicap pour ce qui concerne l'utilisation de la substitution par égalité, même plus tard : si f désigne la fonction réelle de variable réelle définie par : $f(x) = 1/(x - 3)$, alors $f(3) = 1/(3 - 3)$ donc f(3) n'est pas défini puisque zéro n'a pas d'inverse, c'est-à-dire que, *dans le contexte ici présent, le signe* «f(3)» *n'a aucune dénotation.*

A l'entrée en 6è les élèves ont une pratique du calcul numérique qui constitue un support à ces activités de substitution : $4 \times 3 = 12$, donc $4 \times 3 + 7 = ... + 7$. $8 + 13 = 21$ donc $6 \times (8 + 13) = ...$, etc. De tels exercices présentent de multiples avantages : ils visualisent des processus mentaux et la manière dont fonctionnent certaines lois, ils

explicitent et justifient certaines “astuces” de calcul mental (99 = 100 – 1, donc 37 + 99 = 37 + 100 – 1) ; ils donnent peu à peu l’habitude de travailler sur les représentations, de les concevoir et de les utiliser en tant que telles et de les mettre au service de l’objectif que l’on vise : par exemple écrire 18 = 2x9 exprime que 18 est un nombre pair, écrire 18 = 3x6 met en évidence que c’est un multiple de 3 (et de 6 !). Cette (bonne) habitude pourra se transférer sur la géométrie : être capable de “voir sur la figure”, ou plus exactement de **concevoir au travers de** la figure, est du même ordre qu’être capable de **reconnaître des configurations d’écritures** (facteur commun dans une somme, différence de deux carrés, etc.).
Il est évidemment hors de question d’*apprendre* cette propriété : elle doit s’imposer par son évidence ; il ne s’agit pas de la “savoir” mais d’en être convaincu ! Pour cela il me semble nécessaire de commencer, une fois encore, par le commencement : la langue dite naturelle, et de **pratiquer d’abord des activités de substitution en français, seul moyen d’en enraciner le sens** (sans parler de l’effet désastreux qu’a, sur le style, la répétition inconsidérée d’un même mot...). Après quoi on pourra aborder sans crainte l’utilisation de cette propriété dans le cas particulier du langage mathématique.

La dextérité dans le maniement de la substitution ne s’acquiert évidemment pas du jour au lendemain : il est absolument indispensable de la mettre en œuvre de façon régulière. Fort heureusement, ce ne sont pas les occasions qui manquent. Nous allons en citer quelques-unes, certaines tout à fait “élémentaires” — et qu’il convient donc d’étudier très tôt —, d’autres un peu plus élaborées mais dont les racines plongent toujours dans l’essence même de la définition du concept d’égalité. Car la richesse et la puissance de ce concept ne peuvent se révéler que progressivement, au travers de l’étude de situations de plus en plus complexes.

Symétrie

Évidente de par la signification de “=”, son emploi est néanmoins fortement gêné par la dissymétrie qu’impose le sens de lecture et d’écriture. Et le langage mathématique n’est pas dépourvu de règles de style plus ou moins tacites : par exemple on dira “2 est solution de l’équation”, mais on écrira “x = 2” de préférence à “2 = x”. S’entraîner un peu à lire et réécrire “à l’envers” des égalités n’est donc pas du temps perdu : cela permet de corriger et de dépasser la fausse impression de “direction d’action” induite par la chronologie des gestes, car une égalité n’est qu’une sorte de constat d’état dont le temps est exclu ; il n’est pas rare de dire “si x prend la valeur 2” pour exprimer “si x = 2”, mais une variable n’est pas une action cotée en Bourse !

Transitivité

Si truc = machin **et** machin = chose, alors le remplacement de machin par chose dans la première égalité fournit immédiatement le résultat. Il n’est pas interdit de juxtaposer à cette explication “mécaniste” celle qu’engendre la compréhension de la situation : si *truc* désigne le même objet que *machin* et *machin* le même que *chose*, alors forcément *truc* désigne le même que *chose*.

Cette propriété est évidemment indispensable à la conduite de tout calcul. Modulo une convention d’écriture à expliciter, elle permet d’enchaîner les calculs sans répétition fastidieuse.

Egalité et opérations

Quels que soient les éléments t, m, u d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée "#", si t = m , alors t # u = m # u.

Il faut le répéter : il ne s'agit pas là d'une "règle de calcul" mais d'une **évidence sémantique**, évidence qui ne peut s'imposer qu'à deux conditions :

1) savoir que le signe"t # u" désigne **un** objet et pas deux ou trois,

2) savoir que "=" signifie "*désigne le même objet que*".

Une difficulté qui persiste (et elle est réelle) est celle, déjà signalée, de la structuration de l'appréhension des écritures, qui risque de faire écran au sens.
D'autre part les lois de calcul et les règles d'écriture propres à chaque opération interfèrent avec la substitution. Par exemple, puisque 11 = 10 + 1, alors 27 x 11 = 27 x **(**10 + 1**)**. Le fait d'être obligé de rajouter une paire de parenthèses provient de la convention qui a donné la priorité à la multiplication dans les écritures sans parenthèses : le produit de 27 et de 10 + 1 **s'écrit** 27x**(**10 + 1**)** ; si l'addition avait la priorité, il s'écrirait 27 x 10 + 1 ! Il faut bien comprendre que le statut de l'égalité n'est pas, ici, en cause.

Ce qui a été dit pour une loi de composition interne peut tout aussi bien être répété pour une loi externe. Exemple "fétiche" : la multiplication d'un vecteur par un réel. Si u = v, alors, quel que soit le réel α, α.u = α.v, etc.
On aura beau "motiver" les mises en équation par des problèmes concrets, il n'en demeurera pas moins que l'algèbre se manifeste comme un jeu de transformations d'écritures dont les lois ne sont ni arbitraires ni incompréhensibles, même si elles se présentent sous une apparence formelle : le meilleur moyen de gagner à ce jeu reste de comprendre ce qu'on fait et d'avoir un minimum d'entraînement ; alors pourront s'installer des automatismes qui ne seront pas vidés de leur sens car ils auront été construits sur ce sens dans le but d'en alléger la gestion.

Etant le premier traité, le cas de l'addition doit être étudié avec patience et minutie.
Si truc = machin , alors truc + chose = ...

L'exemple "de base" est, sans doute, la résolution d'une équation du type x + a = b.
L'élève qui a vraiment compris que si $x + 7 = -5$, alors $x + 7 + k = -5 + k$ quel que soit le nombre désigné par k, et qui sait ce qu'est l'opposé d'un nombre, cet élève ne sera pas long à deviner que le "bon choix" pour k est -7. Au bout de quelques tentatives du même genre il sera à même de généraliser et de "court-circuiter" la rédaction de la résolution puisque "ça se passe toujours de la même façon". Il n'aura aucune "règle" à apprendre : il aura compris. Et s'il lui arrive de se tromper, il sera capable de trouver et de comprendre son erreur.

Extension : si A = B et T = M , alors A + T = B + M. Application au paragraphe suivant.

Bien évidemment, ce qui est vrai avec l'addition l'est tout autant avec les trois autres opérations. Exemple avec la multiplication :

La résolution d'une équation du genre $2x/3 - 1/4 = x/2 + 5/6$ peut s'effectuer
de deux façons basées sur l'utilisation du PPCM des dénominateurs :

$8x/12 - 3/12 = 6x/12 + 10/12$	$12 \times (2x/3 - 1/4) = 12 \times (x/2 + 5/6)$
$(8x - 3)/12 = (6x + 10)/12$	$12 \times 2x/3 - 12 \times 1/4 = 12 \times x/2 + 12 \times 5/6$
$8x - 3 = 6x + 10$	$8x - 3 = 6x + 10$

Généralement, les élèves préfèrent la première façon et court-circuitent même la deuxième ligne en "chassant les dénominateurs". Outre que ce procédé fait plutôt penser à une recette magique, il occulte l'utilisation de la propriété **si truc = machin , alors k x truc = k x machin** que met en évidence la deuxième façon, et dont la maîtrise est nécessaire pour ce qui suit.

Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Sauf cas particulièrement simple, la méthode "par substitution" est lourde.
Un tel système se présente sous la forme :truc = c **et** machin = f**avec** truc = ax + by **et** machin = dx + ey.

La résolution par "combinaisons linéaires" ne requiert que ce qui a été examiné au paragraphe précédent : si truc = c **et** machin = f , alors k x truc = k x c **et** p x machin = p x f, donc k x truc + p x machin = k x c + p x f. Il faut "évidemment" choisir k et p de façon à "éliminer" une inconnue, et, pour ce faire, il faut savoir développer un produit par distributivité, ce qui est connu bien avant la classe de 3è. La complication provient ici uniquement du grand nombre de paramètres à gérer : six qui sont donnés, deux à trouver deux fois de suite.

Carré et opposés

On démontre que (–T)x M = – (T x M).

Si M = –K , on obtient donc (–T) x (–K) = –[–(T x K)] = T x K.
Et si K = T , alors (–T) x (–T) = T x T autrement dit $(-T)^2 = T^2$.

Extension de la distributivité et "identités remarquables"

A y regarder de près, il n'y a en fait qu'une seule égalité vraiment "remarquable" : celle qui exprime la distributivité de x sur **+ :**

Quels que soient les nombres désignés par k, a, b, k x (a + b) = k x a + k x b.

Ses conséquences sont en effet décisives pour le calcul algébrique. Etant la seule loi qui relie le domaine additif au domaine multiplicatif, c'est donc elle qui régit toutes les relations entre ces deux domaines d'opérations.

1) Si b = c + e, alors en remplaçant b par c + e, on obtient :

$k \times (a + c + e) = k \times a + k \times(c + e) = ...$

2) Si $k = m + p$, alors, en remplaçant k par $m + p$, on obtient :
$(m + p) \times (a + b) = (m + p)\times a + (m + p)\times b = ...$

Ces deux extensions permettent d'effectuer n'importe quel développement et certaines de leurs particularisations permettent des factorisations "remarquables" :

1) Si $k = a - b$, alors on obtient : $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
2) Si $k = a + b$, alors on obtient : $(a + b)^2 = a^2 + 2\mathrm{x}a\mathrm{x}b + b^2$.
En particulier si $b = -c$, on obtient $(a + (-c))^2 = a^2 + 2 \times a \times (-c) + (-c)^2$, ce qui permet, en utilisant quelques propriétés algébriques, d'obtenir finalement : $(a - c)^2 = a^2 - 2\mathrm{x}a\mathrm{x}c + c^2$.

Il est bien évident que, pour atteindre un certain niveau d'efficacité, il sera un jour indispensable de "savoir par cœur" les **deux** formules précédentes :
$a^2 - b^2 = ...$ et $a^2 + 2\mathrm{x}a\mathrm{x}b + b^2 = ...$ Je dis bien "deux", non seulement parce qu'apprendre la troisième est inutile, mais <u>surtout parce que c'est dangereux</u> : cela renforce en effet la tendance "naturelle" des élèves à considérer qu'une lettre représente un nombre positif (puisqu'on ne "voit pas" le signe moins).

Par exemple, pour reconnaître en $4x^2 - 12x + 9$ le développement de $(2x - 3)^2$, il faut :

1) connaître la structure littérale de l'égalité $a^2 + 2\mathrm{x}a\mathrm{x}b + b^2 = (a + b)^2$,
2) imaginer, par comparaison, les égalités $4x^2 = a^2$ et $9 = b^2$,
3) en déduire $a = 2x$ et $b = -3$ (ou $a = -2x$ et $b = 3$, un choix à faire !),
4) vérifier par substitution que $2ab = - 12x$.

Factorisation de mx + m

<u>L'écriture</u> m$\times$ x + m n'est pas factorisable puisque sa structure n'est pas du type « k x a + k x b », somme de deux produits <u>et</u> facteur commun. Mais puisque $m\times 1$ est un produit égal à m, alors $m\times x + m = m\times x + m\times 1 = ...$

Il est facile et significatif de constater que la pratique systématique de la "reconnaissance de forme" par l'explicitation du sens des écritures littérales, autrement dit du "mode de donation" des nombres qu'elles désignent, fait régresser de façon drastique la confusion bien connue à ce niveau entre un et zéro.

Egalité et fonctions

L'écriture "f(a)" désignant l'image de a par la fonction f, il est trivial que si $t = m$, alors $f(t) = f(m)$. Cette lapalissade est le fondement d'une méthode extrêmement puissante : le **changement de variable**, et d'un concept très important à partir de la classe de seconde : la **composition des applications.**

Prenons un exemple : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = 2x + 1$.

L'habitude de la substitution est déjà indispensable pour pouvoir comprendre que le choix de la lettre "x" n'a pas de signification **en soi** car son statut est celui de "variable muette" ce qui veut dire qu'il est donc tout aussi loisible d'écrire f(truc) = 2truc + 1. Alors, si truc = 3 – m, on obtiendra f(3 – m) = 2(3 – m) + 1. **C'est dans cette <u>substitution</u> et cette <u>réécriture</u> que gît toute la difficulté, et nulle part ailleurs.** C'est pourquoi j'estime plus logique, en ce qui concerne la composition, de procéder de la façon suivante : fog(m) = f[g(m)] = 2g(m) + 1, car si truc = g(m), alors f[truc] = f[g(m)] : on fait "fonctionner" f avec la variable g(m), **après quoi** on pourra remplacer g(m) par son écriture en fonction de m.

Une occurrence particulière de ce genre de difficulté est l'étude de la "**valeur absolue**" : la disjonction des cas $x \geq 0$ et $x < 0$ de l'étude de $| x |$ se transfère sans changement pour l'étude de $| 2x + 1 |$: c'est une erreur bien connue des professeurs de Lycée, erreur due bien sûr à un défaut de substitution et à la mauvaise habitude de la prééminence de la lettre "x" dans les écritures littérales. Il faut **penser** : si truc ≥ 0, alors | truc | = truc et si truc < 0 , alors | truc | = –truc pour pouvoir **ensuite** opérer la substitution truc = 2x + 1.

On retrouve également, et pour la même raison, un problème analogue avec la fonction **racine carrée :** √(2x + 1) doit être pensé, interprété comme "√truc avec truc = 2x + 1", par exemple pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction x √(2x + 1).

Un test révélateur consiste à demander de composer une fonction avec elle même : bien des élèves qui réussissent à définir fog échouent pour fof ! La compréhension de "*l'arbitraire du signe*" (Saussure) pour désigner la variable et la maîtrise de la substitution sont ici incontournables :

Si f(truc) = 2truc + 1 et truc = 2x + 1 , alors f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1.

Implications vraies et réciproques fausses

Maîtriser la substitution est indispensable pour pouvoir distinguer certaines implications, dont la véracité est triviale, de leurs réciproques, qui sont inexactes.
Exemples :
Si $m = t$, alors $m^2 = t^2$.Si $a = b$, alors $| a | = | b |$.

Si A = B , alors (AE) = (BE).Si K = L , alors AK = AL.

Traduction de l'unicité d'un objet

Lorsqu'un énoncé exprime l'existence et l'unicité d'un objet satisfaisant à certaines conditions, la traduction de l'unicité peut donc se faire en utilisant l'égalité. Exemples :

f désignant une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble H, **f** est fonctionnelle signifie : quels que soient (t,m) et (t,w) appartenant à ExH, **si** t **f** m et t **f** w , **alors** m = w.

Deux droites sécantes n'ont qu'un point commun, donc :
Si $D \neq \Delta$ et $P \in D$ et $P \in \Delta$ et $M \in D$ et $M \in \Delta$, alors $P = M$.

Axiome d'Euclide : Si $A \in D$ et $A \in D'$ et $D // \Delta$ et $D' // \Delta$, alors $D = D'$, puisqu'il n'y a qu'une droite passant par A et parallèle à Δ.

Idem en remplaçant "parallèle" par "perpendiculaire".

Un exemple remarquablement important est celui de la **traduction de l'alignement de trois points** : il est accessible dès la 6è et se prolonge loin. En 6è, on peut commencer par demander de traduire par un dessin la situation décrite par l'information : "(AB) = (BC)". Bien sûr, le premier réflexe des élèves est de dessiner deux droites, et il faut donc faire traduire en français l'égalité donnée par : la droite qui passe par A et B **est la même que** la droite passant par B et C.
Alors on comprend qu'il n'y a qu'une seule droite passant à la fois par les trois points. Sachant qu'il suffit de deux points pour définir une droite, on dispose alors d'un troisième nom pour cette droite : (AC), ce qui permet d'écrire deux autres égalités équivalentes. Cela est nécessaire car un bon nombre d'élèves ont envie de désigner la droite passant par les trois points A, B, C par la notation "(ABC)". C'est loin d'être stupide, mais cela contrevient au "principe d'économie". D'autre part, le fait de disposer de plusieurs noms n'est pas un inconvénient mais au contraire un avantage. Le "prolongement" évoqué précédemment se réalise en Géométrie Analytique à propos des équations de droites par l'enchaînement d'équivalences bien connu :
$A \in (BC) \Leftrightarrow (AB) = (BC) \Leftrightarrow (AB) // (BC) \Leftrightarrow$ la pente de (AB) = la pente de (BC).
Ce type de traduction génère aussi une **méthode de démonstration, utilisée surtout en algèbre mais aussi en géométrie, et qui consiste à REnommer un objet puis à traduire en utilisant ce nouveau nom.**

Par exemple, pour démontrer que "K est le milieu de [AB]", on dit : "soit I le milieu de [AB]" et on démontre que $K = I$.

Dans le même ordre d'idée, **l'énonciation opératoire de certaines définitions d'objets impose une REdénomination de cet objet.** Exemple :

"La racine carrée d'un nombre positif m est le nombre positif qui a pour carré m" ne peut pas se satisfaire de la traduction : si $m \geq 0$, alors $\sqrt{m} \geq 0$ et $(\sqrt{m})2 = m$.

La définition ne devient utilisable que si on l'exprime par l'équivalence logique :

$$\mathbf{k = \sqrt{m} \Leftrightarrow k \geq 0 \text{ et } k^2 = m.}$$

Exemple d'utilisation : quelle est la racine carrée de a^2 ?

$$\begin{aligned} k = \sqrt{(a^2)} &\Leftrightarrow k \geq 0 \text{ et } k^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow k \geq 0 \text{ et } [\, k = a \text{ ou } k = -a \,] \\ &\Leftrightarrow k \text{ désigne celui des deux nombres "a" et "–a" qui est positif} \\ &\Leftrightarrow k = |\, a \,| \end{aligned}$$

REMARQUE : on perçoit nettement ici que le concept d'égalité et celui d'équivalence sont étroitement liés.

* * *

Egalité et calculatrices

On ne saurait mieux dire que Marc FERRANT : “***le plus souvent, un nombre affiché doit être lu comme une information et non comme un résultat***” (revue “3-33” n° 10, Mai 93).

Une calculatrice est un instrument merveilleux, mais qui fonctionne d’une façon strictement déterminée : c’est ce fonctionnement qui explique ses “erreurs” et détermine ses limites d’utilisation. Il importe donc de le connaître si l’on veut pouvoir l’utiliser correctement et sans risque : lorsqu’une automobile quitte la route dans un virage abordé trop vite, la responsabilité n’incombe pas à la machine mais bien à son conducteur !

A leur entrée en 6è, les élèves “connaissent” les nombres entiers et “à virgule”, à la condition, toutefois, qu’ils ne soient pas trop “grands” ou trop “longs” : il semble que le nombre de chiffres de l’écriture décimale soit une variable didactique pertinente : une calculatrice qui affiche dix chiffres les gêne, la preuve en est qu’ils ont tendance à n’en recopier que deux ou trois après la virgule... Mais comme elle est réputée “ne jamais se tromper”, ils sont évidemment prêts à croire que 2/3 = 0,666666667 si elle le leur dit. **Il faut donc leur faire comprendre que ce n’est pas cela qu’elle dit ! Car, malgré la présence (regrettable ?) sur son clavier d’une touche “=”, elle ne “sait” pas, contrairement à nous, ce que signifie ce signe ! — Elle ne “sait” d’ailleurs rien puisqu’elle ne pense pas...**

La première chose à faire est sans doute de mettre en évidence des “résultats” manifestement faux et dont la vérification “à la main” est très facile. Ce ne sont pas les possibilités qui manquent, je ne m’étendrai donc pas là-dessus.

Il faut ensuite comprendre pourquoi la calculatrice a donné cet affichage : nombre de chiffres limité, registre de calcul comportant deux ou trois chiffres de plus que l’écran et astuces pour les faire apparaître, troncatures et arrondis, etc.

Utilisant la réciprocité entre multiplication et division, on peut se convaincre du fait que $2/3 \neq 0{,}666666667$ puisque $3 \times 0{,}666666667 = 2{,}000000001$ et que $2 = 2{,}000000000$ et que $1 \neq 0$. **Il me paraît essentiel de pointer ici qu’il n’y a aucune différence de “gravité dans l’erreur” entre le fait d’écrire “2/3 = 0,666666667” et celui d’écrire “1 = 0” puisque ces deux égalités sont logiquement équivalentes. C’est le statut même du concept d’égalité qui est en cause, et ce concept n’a rien à voir avec le “presque” ou le “quasiment” de la vie courante : il est en rupture avec cette notion d’à peu près !** Qui donc a besoin, dans son quotidien, d’une précision du milliardième ? Absolument personne, évidemment ! **Mais l’égalité mathématique n’est pas un problème de précision, c’est une question de dénomination : savoir si, oui ou non, on parle de la même chose, “that is the question ” !**

Tout cela est assurément nécessaire, développe la rigueur et l’esprit critique, mais ne supprime pas l’effet pervers désormais bien connu : **l’usage des calculatrices renforce la tendance à croire qu’il n’existe pas d’autres nombres que les décimaux.** Car la

question va revenir comme un boomerang : mais alors, 2/3 ça fait combien ?! (et plus tard elle reviendra avec encore plus de véhémence : √2, ça fait combien ?).
Pour dépasser cette résistance, il est tout d'abord indispensable (une fois de plus...) d'avoir réalisé qu'une écriture telle que 5 + 7 ou 46 – 19 ou 8x35 ou 748/32 désigne **un** nombre et un seul, et non une "opération" qui serait "posée" sans être "effectuée". La résistance va évidemment se focaliser sur les quotients puisque, seule, la division provoque des "résultats qui ne tombent pas juste". Le fait que certains quotients soient des décimaux permet, grâce à l'égalité, de commencer à admettre qu'un quotient puisse désigner un nombre : 195/52 = 3,75 et 3,75 désigne un nombre, donc... Mais cela risque aussi de renforcer le sentiment de la nécessité de "tomber juste" ! L'utilisation d'un changement de cadre est utile : si un rectangle mesure 12 sur 18, alors on a 12 = 18x2/3 ; on peut calculer la largeur si l'on sait qu'elle "vaut" les deux tiers de la longueur connue. Même si, dans ce cas, le concept de nombre reste attaché à celui de mesure et/ou d'opérateur, le fait de les "mélanger" sans distinction pour faire des opérations dont le résultat a un sens apparent, permet une homogénéisation des statuts. Le maniement de la réciprocité entre multiplication et division est tout aussi indispensable au passage du sens : lorsqu'on écrit "3 x truc = 2", il semble assez naturel de considérer que "truc" désigne un nombre, même s'il demeure encore inconnu ; puisque cette égalité équivaut à "truc = 2/3", cela aide à accepter 2/3 parmi les nombres.

Pour vaincre la nécessité de "tomber juste" je pense qu'il est incontournable de faire "à la main" des divisions "qui ne s'arrêtent pas" et de comprendre comment la réapparition d'un reste déjà obtenu entraîne la répétition de la même séquence de chiffres dans l'écriture du quotient. Il ne faut surtout pas commencer par diviser par 3 ou par 11 : c'est trop rapide et simple pour être marquant. Un minimum de trois chiffres pour la période me semble convenable (division par 37), après quoi on peut augmenter un peu (101 en donne quatre, 41 cinq, 7 et 13 six) puis revenir à la division par 11 et enfin par 3. Cette recherche de la partie périodique est, d'ailleurs, une motivation pour les élèves : manifestement, cela les amuse : profitons-en ! Et revenons sur cette "obsession" de "tomber juste", non pas en essayant de l'expliciter directement, mais en tentant de la dépasser par une autre question : que signifie "connaître un nombre" ? Réponse la plus courante, provenant de la notion de "nombre comme résultat de mesure" : c'est connaître sa *valeur*. Soit. Alors quelle est la *valeur* de 12 ? Difficile de répondre autre chose que "12"... En mathématique, connaître un nombre c'est être capable de s'en servir, par exemple pour faire des calculs, et pour cela certaines écritures de ce nombre seront plus commodes que d'autres : 64x53/32 est plus facile à manipuler que 64x1,65625.

Mieux : la division de 258 par 37, faite à la main, nous en apprend beaucoup plus que le 6,972972973 affiché par une calculatrice, puisqu'elle nous permet de **prévoir** que la séquence "972" se répète indéfiniment : c'est cela, connaître ! Soit dit en passant, plus j'y pense et plus le "statut de la calculatrice" me paraît homomorphe à celui de la figure en géométrie : on "lit sur la calculatrice" comme on "voit sur la figure", et l'on retrouve les deux aspects contradictoires : tantôt aide à la conjecture, à la recherche, tantôt écran inhibiteur du raisonnement logique du fait de la prégnance de l'"évidence" de sa perception.

Mais revenons à notre quotient illimité : on tient là une ébauche de la notion d'infini, à rapprocher de celle de la droite géométrique qu'il faut imaginer se prolongeant sans fin identiquement à elle-même. Et l'on tient aussi une raison à la **nécessité de conserver l'écriture "258/37" puisqu'il est matériellement impossible d'écrire un nom de ce nombre sous la forme d'un "nombre à virgule"** : y passer sa vie n'y suffirait pas ! On retrouve ici ce sur quoi j'attirais l'attention au début de ces pages : **faire des mathématiques c'est, entre autres, utiliser des dénominations, des noms qui doivent pouvoir s'écrire**, et s'écrire d'une façon utilisable, opératoire, (on pourrait désigner ce nombre par une écriture telle que "6,972972...", assez spontanément inventée par certains élèves, le code étant que la séquence écrite deux fois se répète indéfiniment ; l'ennui est qu'une telle écriture est impraticable pour le calcul).

Il est assez remarquable de constater que la banalisation de l'usage des calculatrices a été suivie par l'apparition de l'expression "*valeur exacte*" dans un certain nombre d'énoncés.

Par exemple on pose : $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ et l'on demande, en 3è ou seconde, de comparer ϕ^2 et $\phi + 1$: le risque est grand de voir les élèves se précipiter sur leurs calculatrices et annoncer le "résultat" sans autre forme de procès, si l'on n'a pas pris la précaution de préciser qu'il s'agit de comparer les "valeurs exactes". Passe encore d'employer cette expression lorsqu'il s'agit d'une mesure (au sens mathématique, bien entendu, car une mesure exacte n'existe dans aucune science expérimentale), mais qu'est-ce donc que la valeur exacte d'un nombre ?! Un nombre admet une infinité de dénominations, de désignations tout aussi "exactes" les unes que les autres...

Mais, au fait, **que signifie "comparer ϕ^2 et $\phi + 1$" ?**
Que signifie "comparer deux *noms* de nombres" ? Rien... Il y a comme un paradoxe au niveau du langage car lorsqu'on dit par exemple : "deux est inférieur à trois", on parle évidemment des nombres eux-mêmes et pas des noms (mots) "deux" et "trois" : dire qu'un nom est inférieur à un autre nom n'a aucun sens ! Les propriétés mathématiques sont des relations entre les **objets** mathématiques eux-mêmes, pas des relations entre leurs noms ! Et comparer un objet avec lui-même n'apporte aucun gain de connaissance, on l'a déjà dit.

A ce titre, le langage mathématique ne fonctionne pas autrement que le langage courant : lorsqu'on dit "Pierre est plus petit que Paul", il n'y a pas la moindre ambiguïté : on parle bien de "l'être Pierre" et de "l'être Paul", pas des noms, des mots "Pierre" et "Paul", et l'on sait très bien que ce ne sont pas eux que l'on compare ainsi mais leurs tailles ! Mais la langue usuelle, contrairement au langage mathématique, ne dispose pas d'une infinité de dénominations pour un objet quelconque et n'a donc pas besoin, comme l'algèbre, de lois de transformation et de reconnaissance des écritures.

D'une façon générale, **comparer *truc* et *machin*** signifie donc :

1) Déterminer si *truc* = *machin* .
Si oui, il n'y a plus rien à faire puisqu'il n'y a qu'**un seul objet.**

2) Sinon, voir si l'on peut faire entrer les **deux objets** dans une certaine relation (ordre,
incidence, etc.), suivant la nature des objets en question.

***

Au terme de cette réflexion, le concept d'égalité apparaît donc comme un concept charnière, médiateur : linguistique par vocation, mathématique par nécessité, puisqu'il n'y a pas de mathématique sans langage (mathématique). Générateur de diversité pour les dénominations d'objets et unificateur de leurs sens, il est inhérent à toute activité mathématique : sa compréhension conditionne, en effet, aussi bien la reconnaissance des objets qui, en tant que tels, interviennent dans une situation, que la maîtrise de la manipulation de leurs différentes désignations.