IREM DE TOULOUSE

Groupe Premier Cycle

Analyse de situations didactiques en mathématiques au collège

Dispositif : 04A0160177
Mathématiques et didactique de la discipline
Module : 10573

Lundi 24 janvier 2005 - Mardi 25 janvier 2005
Collège Pierre Suc, 81370 Saint Sulpice

Les objectifs du stage

• Échanger à propos de quelques théories de l'apprentissage

• Relier les activités proposées aux élèves et les connaissances en didactique des dernières décennies

• Discuter la notion d'activité mathématique

• Analyser des activités favorisant la créativité, la prise du risque d'erreur ... nécessaires à tout travail mathématique

Documents remis aux stagiaires

Petit glossaire … de mots glanés…

Didactique et pédagogie
Ces deux notions ont vu leur sens évoluer au cours du temps…
On peut dire que la didactique porte sur le contenu des disciplines enseignées et que la pédagogie s'intéresse à la finalité et aux moyens des situations d'apprentissage. Très schématiquement, on peut dire que la didactique est centrée sur le rapport au savoir et que la pédagogie étudie ce qui se passe en classe entre élèves et professeur (gestion du temps, contraintes institutionnelles…).

Didactique d'une discipline
Deux approches
- psychologique : quel est le processus d'appropriation des savoirs par les élèves ?
- épistémologique : quel est le cadre conceptuel dans lequel s'inscrit l'apprentissage ?

Champ conceptuel *(Gérard Vergnaud)*
L'acquisition d'un concept nécessite un large éventail de connaissances interdépendantes.
"un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et procédures de plusieurs types en étroites connexions".

Objectif-obstacle - Situation-problème
Un objectif-obstacle est constitué par le dépassement d'un certain niveau de représentation qui fait obstacle à la compréhension d'une notion.
Une situation-problème permet de mettre l'apprenant en situation d'éprouver lui-même l'insuffisance ou le caractère erroné de ses représentations.

Situation didactique *(Guy Brousseau)*
Théorie des situations didactiques : analyse a priori (inventaire des comportements…) et a posteriori (signification des comportements observés) des interventions des élèves et de l'enseignant. Implique l'élaboration d'un processus d'apprentissage.
Se conçoit comme un ensemble de rapports entre l'élève, le milieu et l'enseignant afin de faire acquérir aux élèves un savoir constitué ou en cours de constitution.

Trois formes de dialectique :
- de l'action : l'élève est confronté à une situation qui lui pose problème. Il produit des actions (les solutions seront explicitées ou non).
- de la formulation : création d'un langage pour assurer l'échange. Dans cette phase il n'est pas obligatoire que l'élève justifie ses propositions.
- de la validation : obligation de prouver autrement que par l'action.
Dans cette phase, apparaît l'importance de la preuve - N. Balacheff "…la preuve est un acte social, elle s'adresse à un individu qu'il faut convaincre".
G. Brousseau a développé l'idée de situations d'institutionnalisation "celles pour lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif de la connaissance".
Fonction principale des situations d'institutionnalisation *:* officialiser certaines connaissances qui, jusque là n'ont été que des outils, leur donner le statut d'objet mathématique est une condition d'homogénéisation de la classe et, pour chacun, une façon de jalonner son savoir et d'en assurer la progression.
Autre fonction : intégrer le savoir social, les conventions dans le savoir de l'élève.
De nombreux concepts ont été créés : *contrat didactique - variables didactiques* …

Contrat didactique

Il détermine les obligations réciproques du formateur et des formés.
• *structure cours / exercices* : le travail de reconstruction du savoir est laissé à l'élève sous sa responsabilité.
Schématiquement, le professeur donne des exercices faisables. L'élève remplit son contrat s'il étudie ses leçons, fait ses exercices…
S'il y a problème, le professeur doit l'aider, en orientant le travail de l'élève (questions intermédiaires…).
• *structure activités - institutionnalisation - exercices* : l'enseignant utilise les activités des élèves, leurs productions… pour faire progresser le savoir de tous.
Les problèmes donnés ne sont pas obligatoirement faisables, la validation des réponses est nécessaire…
Élaboration de conceptions provisoirement bonnes qu'il faudra élargir, rejeter pour en former de nouvelles.
L'erreur n'est plus un défaut à éviter à tout prix.

Transposition didactique *(Yves Chevallard)*
Le concept de transposition didactique a été introduit pour rendre compte de la transformation nécessaire opérée sur les savoirs retenus pour être enseignés avant que ces savoirs puissent effectivement être enseignés.
savoirs scientifiques —> savoirs à enseigner —> savoirs enseignés.

Objets réels - Objets d'enseignement - Représentations
L'enseignement des mathématiques (au début…) participe à construire une modélisation du réel chez l'élève.
Aux signifiés primitifs (objets réels) on attache des signifiants (relations…). A ces signifiants sont liés des nouveaux signifiés d'un autre "espace" : les représentations.

Dialectique Outil - Objet *(Régine Douady)*
Aspect outil, aspect objet d'un concept mathématique :
on pose des questions - on résout des problèmes - pour ce faire on crée des outils conceptuels puis ces concepts sont décontextualisés, formulés de manière la plus générale possible. Ils acquièrent le statut d'objet.

- Un concept est outil si l'usage qui en est fait est la résolution de problèmes.
- Un objet au sens d'objet culturel qui s'intègre dans le savoir savant à un temps t, reconnu par la collectivité.

Pour que la dialectique outil-objet puisse se mettre en place, il est nécessaire qu'il y ait un réel problème :

- énoncé ayant du sens pour l'élève
- l'élève peut engager une procédure de résolution
- les connaissances visées par l'apprentissage sont des outils adaptés au problème posé
- le problème peut se poser dans au moins deux cadres différents

Le problème conduit à la création d'une connaissance en tant qu'outil, connaissance qui sera institutionnalisée en tant qu'objet.

Cadres et registres *(Robert Duval)*
Exemple : dans le cadre géométrique il existe plusieurs registres : registre de la langue naturelle, registre de la figure, registre de l'écriture symbolique, registre de la langue mathématique, registre graphique.

Variables didactiques
Élément de la situation sur lequel le professeur peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions en jeu.
Exemples : temps de résolution - valeurs des données pour un calcul - position de l'axe dans des constructions de symétriques…

Conceptions de l'apprentissage

Dans cette activité, qu'est-ce qui peut, selon vous, "gêner" l'apprentissage de nos élèves par rapport à la construction de la connaissance visée ?

Activité 1

Conventions de priorités

Organiser, pour l'effectuer une succession d'opérations.

La confrontation des réponses débouche sur l'énoncé des règles de priorité.

Effectuer les calculs suivants à la main, mentalement ou avec une calculatrice.

A = 0,25 + 9 + 0,75
B = 2 x 8 x 5
C = 25 - 3 - 2
D = 40 : 8 : 2
E = 11 - 8 + 2
F = 6 + 14 : 5
G = 10 - 4 x 2
H = 3 x 7 - 2

Le sens des mots

Une convention est une règle admise d'un commun accord et appliquée par tous.
Par exemple, placer une virgule à droite du chiffre des unités est une convention.

Collection "Transmath" 5e, éd. Nathan, 2001

Compte rendu de la première activité

Réponses des stagiaires :

Groupe 1

Blocages possibles :

- Manque au niveau des prérequis de 6e.
- A et B ne permettent pas de découvrir les règles de priorités.
- Problème d'énoncé : "**ou** la calculatrice"
  Ne permet pas forcément une discussion après
- L'encart "définition" n'est pas bien placé.
- Pas de découpage : toutes les conventions sont présentées dans les mêmes exercices.
- Problème de calcul dans le F (14 : 5).

Groupe 2

1) Consigne à modifier :
Pas droit à la calculatrice au départ pour faire émerger les erreurs.
Si utilisation de la calculatrice aucune possibilité d'atteindre l'objectif.

2) Statut de la calculatrice :
Valide le résultat !?
Exemples E et F : contrat didactique (au niveau d'un calcul astucieux)
Problèmes pour donner un sens

3) Présentation générale :
A = ...
B = ...
La présentation générale apporte la confusion.

Groupe 3

CONFUSION :

- Consigne : calculatrice à proposer pour la vérification des calculs (problème des résultats différents selon les calculatrices).
- Calculs proposés : toutes les conventions sont mélangées, manque de clarté.
  L'intérêt est-il de perdre les élèves ?

Activité de début d'année :
Est-il pertinent d'introduire autant de doute ?
Utilité de donner des exemples concrets pour montrer les règles (avant ? après ?)
Il faut découper l'activité, avec plusieurs exemples pour chaque règle.
Technique d'animation : travail individuel ou en groupe ?

Comment apprend-on ?

Toute pratique enseignante repose sur des présupposés psychologiques. En particulier, elle concrétise, pour une part, les conceptions de l'apprentissage implicites ou explicites de l'enseignant.

Si ce dernier choisit de dire et de montrer le savoir, c'est qu'il présume, consciemment ou inconsciemment, qu'ainsi il favorisera l'apprentissage du plus grand nombre possible de ses élèves dans le temps imparti et qu'il permettra les apprentissages ultérieurs. S'il préfère une fiche d'activités où des questions relativement faciles s'enchaînent jusqu'à la "découverte" du savoir visé, c'est qu'il prétend que dire le savoir ne suffit pas. C'est aussi qu'il pense que sa fiche d'activités, ainsi conçue, facilitera davantage la construction du savoir de ses élèves ou aidera à l'apprentissage d'un plus grand nombre d'élèves, ou encore, fera moins obstacle aux futurs apprentissages. S'il suit une autre voie encore, c'est qu'il suppose que les deux premières ne conviennent pas et qu'il faut donc envisager un autre mode d'enseignement.

Mais, quoi qu'il en soit, ses choix seront autant de réponses partielles et temporaires à la question cruciale de la psychologie de l'éducation : « comment apprend-on ? »; ou à celle, voisine mais non semblable, de tout praticien de l'enseignement : « comment favoriser l'apprentissage du plus grand nombre, sans faire obstacle aux apprentissages à venir, dans le temps imparti ? ».

En s'appuyant sur les recherches en psychologie, on peut repérer trois grands types de réponses à cette question qui semblent inspirer les pratiques enseignantes en mathématiques aujourd'hui.

1 • Le modèle transmissif

Cette conception de l'apprentissage, héritée des pédagogies traditionnelles, est en fait rarement exprimée et fonctionne comme une « conception spontanée ».

Pour elle, l'apprentissage se résume à un enregistrement en mémoire du savoir exposé par l'enseignant, comme si ce savoir s'imprimait directement dans le cerveau de l'élève telle une pellicule photographique. L'acte d'enseigner y est donc central. C'est l'enseignant qui dit et montre le savoir, le construit et le structure. Il n'y a rien à apprendre lorsqu'il ne parle pas ou ne montre pas.

L'élève, lui, écoute attentivement et reçoit le savoir dans sa tête supposée vide. Il est modelé de l'extérieur et doit s'adapter aux activités magistrales ou interrogatives proposées par l'enseignant dans une situation de communication collective et verticale.

En conséquence, un enseignement parfaitement réussi serait un exposé où l'enseignant ne commettrait aucune erreur, suivi d'un test où l'élève montrerait par des réponses justes qu'il a parfaitement compris. C'est le modèle "j'apprends/ j'applique".

• Limites du modèle transmissif

Jean PIAGET (1896-1980) souligne comme un résultat important de ses travaux la faillite expérimentale de cette conception transmissive qui confond apprentissage et enseignement. En effet, ce modèle sous-estime le rôle de l'élève et de ses processus cognitifs dans la construction de son savoir. Il ne laisse aucune autonomie à l'élève en dehors des phases de réinvestissement. Il prétend que le sens du message que l'enseignant pense communiquer est le même que celui que l'élève croit percevoir. De nombreuses études montrent qu'il n'en est rien. Elles montrent aussi que l'esprit n'est pas assimilable à une cire vierge.

« Quel que soit son âge, l'esprit n'est jamais vierge, table rase ou cire sans empreinte » écrit Gaston BACHELARD (1884-1962).

Illustration : Les limites de la transmission…

Un professeur de mathématiques explique à un élève les limites. Il lui montre comment calculer

$\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8}$. À la fin de l'exercice, il demande à l'élève attentif s'il a compris. Oh oui monsieur, j'ai tout compris. N'y croyant qu'à moitié, il lui pose l'exercice suivant : calcule $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5}$.

Et l'élève de résoudre : puisque $\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x-8} = +\infty$, alors $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5} = +\infty$.

• Statut de l'erreur

Dans l'idéal transmissif, le maître mais aussi l'élève ne doivent pas se tromper. En effet, l'erreur pourrait créer de mauvais réflexes ou s'imprimer dans la tête de ce dernier. Il faut donc dresser un barrage à l'erreur. Si toutefois un élève commettait une erreur, la seule remédiation possible serait d'expliquer à nouveau ou de refaire apprendre en lui demandant d'être plus attentif. Et, en dernier ressort, de faire redoubler l'élève pour de nouvelles explications.

2 • Le modèle behavioriste

Le behaviorisme ou comportementalisme est né au début du XXe siècle aux États-Unis. Il est apparu comme une rupture avec la tradition psychologique introspective qui dominait alors. Il a marqué la naissance de la psychologie comme domaine scientifique propre. Ce courant a dominé les recherches en psychologie de la Première Guerre Mondiale à la fin de la seconde.

Rejetant toute référence à la conscience, le behaviorisme s'applique à étudier scientifiquement le comportement (behaviour, en anglais) de l'animal ou de l'homme défini comme « l'ensemble des réactions objectivement observables qu'un organisme généralement pourvu d'un système nerveux oppose aux stimuli, eux aussi observables, dans le milieu dans lequel il vit » (WATSON, 1878-1958). Historiquement, cette étude s'est étendue aux analyses des apprentissages humains et au domaine de l'éducation.

L'apprentissage y est défini comme la capacité à donner la réponse adéquate à des stimuli donnés. Il est envisagé comme un processus mécanique dans lequel les comportements de l'apprenant sont déterminés par les renforcements rencontrés : les "bonnes" réponses sont récompensées et reproduites, les "mauvaises" réponses punies et abandonnées. C'est l'apprentissage par conditionnement.

SKINNER (1904-1990), psychologue behavioriste, a élaboré une théorie du conditionnement opérant qui se distingue du conditionnement classique. Dans celle-ci, l'individu est actif, apprend en observant les conséquences de ses actes et en recevant des renforcements. Si le comportement procure du plaisir, il sera reproduit. Sinon, il sera abandonné. Cette conception de l'apprentissage a donné à SKINNER les principes de l'enseignement programmé. Celui-ci consiste pour l'enseignant à proposer des situations où la matière à enseigner est découpée en unités aussi élémentaires que possible. Ces situations doivent permettre à l'élève d'agir, de le faire travailler par étapes, et de renforcer au fur et à mesure ses acquisitions dans le sens d'une modification des comportements programmés par l'enseignant. C'est en fait à cette conception qu'implicitement les enseignants se réfèrent, quand, pour introduire une notion, ils proposent aux élèves une fiche dite de "découverte" qui contient un grand nombre de questions relativement faciles.

Décomposition en sous-compétences de l'addition selon Thorndike (1874-1949)

• Apprendre à se concentrer sur les chiffres colonne par colonne pour les additionner (pour les enfants, le passage de la connexion 8 + 7 = 15 à la connexion 38 + 7 = 45 ou à la connexion

68 + 27 = 95 n'est nullement évident) ;

• Apprendre à garder en mémoire le résultat de chaque addition jusqu'à avoir obtenu le résultat de l'addition suivante ;

• Apprendre à ajouter le report lors de l'addition suivante ;

• Apprendre à négliger les 0 à l'intérieur des colonnes ;

• Apprendre à négliger les espaces vides à l'intérieur d'une colonne ;

• Apprendre à ne pas écrire l'entièreté du résultat d'une addition, mais seulement le nombre correspondant à l'unité; en particulier, apprendre il écrire le 0 lorsque le résultat de l'addition est 10.

• Limites du modèle behavioriste

Même si le modèle behavioriste a permis des progrès dans la connaissance des mécanismes élémentaires d'apprentissages simples, il constitue une réduction de la réalité. Il ne permet pas de rendre compte des apprentissages complexes, comme l'acquisition de la lecture. De plus, les méthodes qui s'en inspirent font de l'élève un simple exécutant qui n'a pas conscience des buts visés et ne comprend pas la signification de ses actes. Les savoirs nouveaux viennent se superposer les uns aux autres sans jamais s'enchevêtrer ni se restructurer. Savoir débrayer, savoir accélérer, savoir freiner, savoir tourner le volant ne signifie pas que l'on sache conduire !

Pourtant l'influence indirecte du behaviorisme demeure grande. L'enseignement assisté par ordinateur ou la pédagogie par objectifs en sont fortement imprégnés.

• Statut de l'erreur

Dans toutes les conceptions inspirées du béhaviorisme, l'enseignement est fondé sur le découpage des connaissances. L'élève progresse pas à pas, l'apprentissage étant renforcé par des constats de réussite. L'erreur est donc à éviter. Si, toutefois elle survenait, c'est que l'élève n'aurait pas maîtrisé certains prérequis indispensables. Ou que la connaissance n'aurait pas été décomposée en éléments suffisamment petits pour être confondue avec une réponse adaptée à un stimulus.

3 • Les modèles constructivistes

La grande majorité des travaux de didactique s'écartent de la conception transmissive ou behavioriste sous ses différentes formes. Beaucoup d'entre eux empruntent un certain nombre d'hypothèses issues de recherches en psychologie cognitive et en psychologie sociale que l'on peut cataloguer de constructivistes.

• Le constructivisme individuel de Jean PIAGET

L'influence de Jean PIAGET (1896-1980) fondateur de l'épistémologie génétique est considérable en psychologie cognitive. Ses grands concepts théoriques se sont avérés très productifs dans la recherche sur le développement cognitif. Nous retiendrons ici quelques hypothèses importantes.

• Construction de la connaissance

Pour PIAGET, la construction de la connaissance est le résultat d'un processus d'interaction entre le sujet et le milieu, processus qui produit un système de connaissances organisées qui ne peut se réduire à une simple accumulation. Schématiquement, on peut dire que toute connaissance nouvelle est confrontée à la structure cognitive existante afin d'y être intégrée. Le processus adaptatif qui va alors s'engager opérera alors par assimilation ou par accommodation. L'assimilation, c'est l'appropriation par le sujet d'un élément externe dont la structure est compatible avec le système cognitif existant. L'accommodation est l'adaptation du système cognitif existant aux variations externes qu'il ne réussit pas à assimiler. Ces deux pôles de l'adaptation, assimilation et accommodation, sont indissociables : l'assimilation permet la cohérence du système cognitif, l'accommodation, son adéquation au réel.

Mais l'action constante du sujet sur son environnement peut introduire des perturbations dans le système : certaines acquisitions posent des problèmes, entraînent des conflits intra-psychiques par impossibilité de relier la connaissance nouvelle à la structure cognitive existante. Le sujet répond par des compensations actives, une autorégulation que PIAGET nomme équilibration. Si le déséquilibre est important, l'autorégulation entraînera une restructuration qui tiendra compte des acquisitions nouvelles et sera donc plus solide, plus large et plus générale : on parlera, dans ce cas, de rééquilibration majorante.

La connaissance se construit donc par des équilibrations successives : tout système cognitif est remplacé par un système cognitif nouveau qui inclut l'ancien, mais qui comble les lacunes du précédent.

• Le développement de l'intelligence

Pour PIAGET, biologiste de formation, le développement cognitif est en continuité avec le développement biologique. Les étapes de ce développement suivent un ordre constant et sont nommées stades (stade sensori-moteur, stade pré-opératoire, stade des opérations concrètes, stade des opérations formelles). Chaque stade est caractérisé par une structure d'ensemble commune à tous les sujets d'un même niveau qui permet de prédire certaines acquisitions. Ces différentes structures évoluent progressivement vers une pensée de plus en plus logique. Chaque étape nouvelle est préparée par la précédente et les structures élaborées à une étape donnée s'intègrent dans l'étape suivante.

• Limites des implications didactiques du modèle piagétien

Chez PIAGET, le développement de l'intelligence semble automatique, pour peu que des pathologies graves ne viennent l'empêcher. On ne peut vraiment l'accélérer et tout le monde atteint le stade des opérations formelles. Pour lui, l'apprentissage reste une relation privée entre un sujet, les objets, la tâche, le problème. Les relations sociales entre pairs ou avec un éducateur ne semblent pas prééminentes dans le développement cognitif. Dans ces conditions, on voit mal la place de l'enseignement dans ce développement.

• Le modèle socioconstructiviste

PIAGET admet que des conflits cognitifs peuvent surgir, donc des déséquilibres, puis des équilibrations. Mais ceci reste du domaine du sujet et ne suppose pas essentiellement la présence et la confrontation avec un autre. Plusieurs continuateurs de PIAGET ont remis en cause ce point de vue en insistant au contraire sur les aspects bénéfiques des interactions sociales dans le développement. Pour eux, les acquisitions, à certains moments clés du développement, trouvent principalement leur origine dans des confrontations d'actions ou d'idées avec des partenaires. Les échanges interindividuels deviennent source de progrès cognitifs par les conflits sociocognitifs qu'ils font naître.

Selon DOISE et MUGNY, les progrès induits par le conflit sociocognitif s'expliquent pour trois

raisons :

1. Par ce moyen, l'enfant prend conscience de réponses autres que la sienne (même si aucune réponse correcte n'est donnée).

2. L'autre donne des indications qui peuvent être pertinentes pour l'élaboration d'un nouvel instrument cognitif (même si aucune réponse correcte n'est donnée).

3. Le conflit sociocognitif augmente la probabilité que l'enfant soit actif cognitivement.

Mais l'interaction sociale n'est pas supposée induire automatiquement un progrès cognitif. « Pour être bénéfique, l'interaction sociale doit en même temps assurer le plein déroulement du conflit sociocognitif et non seulement viser une solution purement relationnelle en termes d'entente ou de mésentente. » (DOISE).

• Statut de l'erreur

Dans les conceptions constructivistes de l'apprentissage, l'erreur est le résultat de processus d'origine sensée. Il n'est plus question d'y faire barrage, mais, au contraire, elle apparaît comme normale à l'apprentissage. Elle est l'expression ou la manifestation explicite d'un ensemble de conceptions intégrées dans un réseau cohérent de représentations cognitives, qui se dressent en obstacles à l'acquisition et à la maîtrise de nouveaux concepts. Le franchissement de ces obstacles devient alors le projet de l'acte d'enseignement et l'erreur un épisode dans la restructuration et l'élargissement des connaissances. « La compréhension s'acquiert contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites » (BACHELARD).

• BIBLIOGRAPHIE

ALTET M., *Les pédagogies de l'apprentissage*, Puf, 1997.
BACHELARD G., *La formation de l'esprit scientifique*, J. Vrin, 1938.
CRAHAY M., *Psychologie de l'éducation*, Puf, 1999.
DOISE W., MUGNY G., *Psychologie sociale et développement cognitif*, A. Colin, 1997.
Éduquer et former, éditions Sciences Humaines, 2001.
FOULIN J.-N., MOUCHON S., *Psychologie de l'éducation*, Nathan Université, 1999.
JOSHUA S., DUPIN J.-J., *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Puf, 1993.
MOAL A., L'approche de « l'éducabilité cognitive » par les modèles du développement cognitif, *Éducation permanente*, n°88/89, 1987.
PIAGET J., *La psychologie de l'intelligence*, A. Colin, 1967.

Deuxième activité

Dans quelle(s) conception(s) implicite(s) de l'apprentissage situeriez-vous ces "activités" ?

Activité 1

a - Effectue les calculs indiqués :

E = 12 + 5 - 8 + 2 F = 17 - 5 - 1+3 G = 23 + 5 + 2 - 9 H = 32 - 5 - 7 - 3

Thomas a trouvé 7 et Caroline 11 pour le nombre E.

Qu'en penses-tu ? Comment chacun a-t-il compté ?

Nous admettrons la règle à respecter : dans une suite d'additions et de soustractions quand il n'y a pas de parenthèse :

……
……

Tu peux maintenant dire qui a raison ! Vérifie les autres calculs.

b - Effectue les calculs indiqués:

J = 4 x 6 : 2 x 3 K = 1O : 5 x 2 L = 32 : 4 : 2 M = 8 x 5 : 2

Benjamin a trouvé 4 et Sonia 1 pour le nombre K. Qu'en penses-tu ? Comment chacun a-t-il compté ?

Nous admettrons la règle à respecter : dans une suite de multiplications et de divisions quand il n'y a pas de parenthèse :

……
……

Tu peux maintenant dire qui a raison !

Exercice 1

Calcule:

A = 28 - (17 - 3,6) + 0,4 B = 27,6 - (3,6 + 2,8) - 1,2 C = 47,1 - 15,7 - 5,7

D = 42 : 3 x 2 E = 12,5 x 16 : 2 x 4 F = 7 x (48 : 6) : 14 : 2

Activité 2

1 - Entoure la bonne réponse :

1	14 - 2 x 5	60	4	autre réponse: …
2	14 x 5 - 3	67	28	autre réponse: …
3	24 + 6 x 2	60	36	autre réponse: …
4	24 x 2 + 8	240	56	autre réponse: …

2 - Les calculs suivants sont justes:

4 x 2 + 3 = 11 2 + 5 x 3 = 17 25 - 3 x 4 = 13 5 x 6 - 4 = 26

Fais une conjecture sur la règle qui a été respectée pour obtenir ces réponses.

Nous admettrons la règle à respecter dans une suite de multiplications et d'additions et / ou de soustractions quand il n'y a pas de parenthèse :

……
……
……

3 - Vérifie maintenant tes réponses à la première question.

Une année en cinquième, IREM de Limoges, 1999

Parenthèses ou non ?

On a demandé de calculer l'expression : 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1.
Voici une liste des réponses obtenues.

1) 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1 = 3 x 8 -14 + 1 = 24 -14 +1 = 11

2) 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1 = 3 x 8 -2 x 8 = 24 - 16 = 8

3) 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1 = 15 + 3 - 14 + 1 = 5

4) 3 x 5 + 3 -2 x 7 + 1 = 15 + 1 x 7 + 1 = 15 + 7 + 1 = 23

5) 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1 = 15 + 1 x 8 =15 + 8 = 23

1. Expliquer chaque réponse en plaçant des parenthèses dans l'expression 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1.
2. La règle suivante indique comment calculer une expression sans parenthèses.

RÈGLE
En l'absence de parenthèses, on effectue en priorité les muItiplications (et les divisions).

En appliquant cette règle à l'expression 3 x 5 + 3 - 2 x 7 + 1, indiquer la bonne réponse.

Collection" Pythagore" 5e, éd. Hatier, 1997

Conventions

a) Qui a la priorité?
Voici des calculs qui ont été effectués correctement par Maryline, la grande sœur d'Eugènie :
12 x 4 - 5 = 48 - 5 = 43 ; 10 - 3 x 2 = 10 - 6 = 4 ;
15 x 10 + 1 = 150 + 1 = 151; 7 + 8 x 5 = 7 + 40 = 47.
« C'est facile, s'exclame Eugènie, il suffit de toujours commencer par effectuer la…… ». Terminer la phrase à la place d'Eugènie.
b) Un petit jeu
Recopier et compléter le tableau ci-dessous en utilisant les signes + , - ou x :

7	+	3	x	2	=	13
6	…	14	…	2	=	34
17	…	7	…	1	=	11
10	…	2	…	3	=	4
2	…	3	…	3	=	18

BILAN
Recopier et compléter :
Dans une suite de calculs sans parenthèses où l'on trouve des additions, des soustractions et des multiplications, on effectue d'abord les..… .

Collection "Dimathème" 5e, éd. Didier, 2001

Priorité

DÉCOUVRIR la priorité de la multiplication

- A = (20 - 6) x 3
  B = 20 - (6 x 3)

A est le produit de 20 - 6 par 3.
8 est la différence entre 20 et 6 x 3.
Calcule A, puis B.

- C = 17 + 2 x 3

Dans cette expression il n'y a pas de parenthèses t'indiquant dans quel ordre tu dois effectuer les calculs.
On a décidé d'effectuer en premier la multiplication.
On écrit :

C = 17 + 2 x 3
C =17 + 6
C = 23

En l'absence de parenthèses la multiplication a priorité sur l'addition et sur la soustraction.

APPLIQUER

1 Souligne le calcul à effectuer en premier et calcule :

D = 28 - 8 x 2 E = 41 x 5 - 7
F = (28 - 8) x 2 G = 15 + 4 x 6 + 1
H = 10 - 6 - 1,5 x 2 I = 3 x 2 + 6 x 4
J = 10 x 9 - 5 + 4 x 7 K = 15 + 4 x (6 + 1)

2 À la pâtisserie, une brioche coûte 4,20 F, un croissant coûte 3,70 F.

Edwige achète un croissant et quatre brioches.
Sonia achète deux croissants et trois brioches.
Écris la dépense de chacune sans parenthèses, puis calcule ces deux dépenses.

Mathématiques 5e, éd. Delagrave, 1997

Activité 1 — Calculs sans parenthèses

Objectifs
• À partir d'une situation concrète, faire apparaître l'importance :
• de l'ordre dans lequel on opère,
• de l'enchaînement traduisant cet ordre.
• Se servir correctement d'une calculatrice.

Commentaire
Au cours de l'activité, faire énoncer la règle de priorité.
Insister sur le fait qu'il s'agit d'une convention admise par tous.

Priorité à la multiplication

Au supermarché, Medhi a choisi une trousse à 3,80 € et quatre stylos à 0,15 € pièce.

1. Écrire et effectuer les calculs qui donnent le prix des fournitures scolaires de Medhi.

2. Quelle opération est effectuée en premier ?

On écrit en un seul enchaînement les opérations qui permettent de résoudre le problème: 3,80 + 0,15 x 4.

Priorité à la division

Le professeur demande à Léa d'effectuer cet enchaînement d'opérations : 75 + 24 x 1,5 - 0,5 : 4.

1. Quelles opérations Léa doit-elle effectuer en premier ?

2. a) Léa a trouvé 110,875. Vérifier son résultat à la calculatrice.

b) Si le résultat à la calculatrice n'est pas 110,875, c'est que la machine ne respecte pas la priorité des multiplications et des divisions.

Voici une séquence qui permet d'obtenir le bon résultat quelle que soit la calculatrice. Taper cette séquence :

0,5 [:] 4 [=] [M] 24 [x] 1,5 [=] [+] 75 [−] [RM] [=]

opération prioritaire — opération prioritaire

[M] Mise en mémoire du résultat — [RM] Rappel du résultat mis en mémoire — [=] affichage du résultat

Activité 2 — Calculs avec parenthèses

Objectifs
• Mettre en évidence l'utilité des parenthèses (rendre prioritaire une addition).

• Utiliser la calculatrice pour insister sur la nécessité d'un bon codage du calcul.

1. Jean-Pierre est un passionné de bicyclette.

Du lundi au samedi sur son vélo d'appartement, il parcourt, au compteur, 10 km chaque matin et 8 km chaque soir.

Le dimanche, il effectue sur son vélo de course 12 tours d'un circuit de 3,5 km.

2. Céline veut calculer le nombre de kilomètres parcourus par Jean-Pierre en une semaine.

a) Recopier, en le complétant, l'enchaînement d'opérations permettant de trouver la réponse.

(…… +……) x 6 + …… x ……

opération donnant la distance au compteur chaque jour de semaine — opération donnant les kilomètres parcourus le dimanche

Collection "Éric Serra" 5e, éd. Bordas, 2001

Conduire un calcul

1. Établir les règles de priorité

Le professeur M. A. Theux a corrigé les quatre devoirs de calcul ci-dessous. Après les avoir etudiés, compléter la phrase qui suit chaque cadre.

1 •

a/ 20 – 11 + 8 = 20 – 19 = 1 *faux*	**b/** 20 – 11 + 6 = 9 + 8 =17 *juste*
c/ 20 + 11 – 8 = 31 – 8 = 23 *juste*	**d/** 20 – 11 – 8 = 20 – 3 = 17 *faux*

Dans un calcul sans parenthèses, quand il y a des additions et des soustractions, il faut effectuer le calcul .....

2 •

a/ 12 – 2 x 5 = 10 x 5 = 50 *faux*	**b/** 12 x 2 – 5 = 24 – 5 =19 *juste*
c/ 12 x 2 + 5 =24 + 5 = 29 *juste*	**d/** 12 + 2 x 5 = 14 x 5 = 70 *faux*

Dans un calcul sans parenthèses, quand il y a des multiplications, des additions et des soustractions, il faut effectuer en premier .....

3 •

a/ 12 : 3 + 9 = 4 + 9 = 13 *juste*	**b/** 6 + 8 : 2 = 14 : 2 = 7 *faux*
c/ $\frac{12}{3}$ + 9 = 21 : 3 = 7 *faux*	**d/** 25 – 15 : 5 = 25 - 5 = 20 *juste*
e/ 18 – 8 : 2 = 10 : 2 = 5 *faux*	**f/** $18 - \frac{8}{2}$ = 18 – 4 = 14 *juste*

Dans un calcul sans parenthèses, quand il y a des divisions, des additions et des soustractions, il faut effectuer en premier .....

4 •

a/ 9 x (2 + 5) = 18 +5 = 23 *faux*	**b/** (9 + 2) x 5 = 11 x 5 = 55 *juste*
c/ (18 - 6) + 2 = 18 – 8 = 10 *faux*	**d/** 18 - (6 + 2) = 18 – 8 = 10 *juste*

Dans un calcul, quand il y a des parenthèses, il faut effectuer en premier ……

Collection "Triangle" 56, éd. Hatier, 2001

Comment effectuer des suites d'opérations
avec ou sans parenthèses?

1 • Attention aux parenthèses !

1re partie

Recopier les deux tableaux ci-contre et relier chaque suite d'opérations à son résultat.

(5 + 5) x (5 + 5) •	• 6
5 x (5 + 5 + 5) •	• 10
(5 + 5) x 5 + 5 •	• 55
(5 + 5) x (5 : 5)•	• 75
(5 + (5 x 5)) : 5•	• 100

2de partie

Recopier et compléter les écritures ci-contre pour que les quatre égalités soient vraies. Pour cela on pourra utiliser des parenthèses et des signes opératoires + ou x ou :

5	5	5 = 50
5	5	5 = 30
5	5	5 = 6
5	5	5 = 2

2 • Attention aux multiplications !

Pour calculer le montant de la facture ci-contre, Kevin prend sa calculatrice et tape :

4,9 + 29,5 x 6. Il trouve 206,40 €.

article	prix à l'unité
1 lot de cassettes audio	4, 90 €
6 cédéroms éducatifs	29, 50 €

Pour contrôler ce résultat, Julia prend aussi sa calculatrice et tape de même :
4,9 +29,5 x 6. Elle trouve 181,90 €.
1° À votre avis, quel est le bon résultat ?
Qu'affiche votre calculatrice pour la même suite d'opérations ?
2° Comment expliquer les résultats différents de Kevin et de Julia ?
3° Répondre par VRAI ou FAUX :

a) 2 + 2 x 2 = 8 b) 4 + 4 x 4 - 4 = 16 c) 5 x 5 + 5-5 x 5 = 25
d) 3 + 3 x 3 = 12 e) 4 + 4 x 4 x 4 = 128 f) 5 + 5 x 5 + 5 x 5 = 55

On retiendra que la suite d'opérations 3 + 4 x 5 se calcule comme 3 + (4 x 5).

Collection "Cinq sur cinq" 5e, éd. Hachette, 2000

1 • **Quelques problèmes**

1)

(68 – 8) + 3	8 - 3	68 – 8
8+3	68 – (8 + 3)	68 + (8 – 3)

Quelles étiquettes utilises-tu pour répondre à chacun des problèmes suivants ?
Indique à quoi correspond chacun des calculs utilisés.
a. En Juin, Monsieur Food pesait 68 kg. Il a perdu 8 kg pendant ses vacances d'été, il a grossi de 3 kg pendant les fêtes de Noël.
Quel est son poids en janvier?
b. Madame Speed habite à 68 km de son lieu de travail. Chaque matin, elle prend le bus pour faire le trajet. Le bus fuit un premier arrêt au bout de 8 km, puis un second arrêt 3 km plus loin. Combien de kilomètres reste-t-il à parcourir ?

2) Quel est le rôle des parenthèses dans ces expressions ?
(68 - 8) + 3 68 - (8 + 3) 68 + (8 - 3)
Que se passe-t-il si on les déplace ? Et si on les enlève ?
3) Marie a 80 € d'argent de poche par mois. Chaque semaine, elle va une fois au cinéma, la place coûte 7 € et elle achète une revue à 5 €.
Combien lui reste-t-il d'argent de poche au bout de 4 semaines ?
Voici une expression qui permet de répondre au problème : 80 - [4 X (7 + 5)].
Que signifie chacun des calculs contenus dans cette différence ?
Dans quel ordre Marie va-t-elle calculer ?

4) Au téléphone, Roméo dicte à Juliette les calculs suivants :
45 - 3 x 2 45 - 3 x 4 45 - 3 x 7 45 - 3 x 12,5 45 - 3 x 14.
a. Effectue les quatre calculs.
b. Propose d'autres calculs du même type.
c. Imagine une autre manière de communiquer le message de Roméo sans répétition.

2 • **Juste, la calculatrice ?**

Divers calculs ont été effectués avec des calculatrices différentes.
On note chaque résultat affiché à chaque entrée d'un nouveau nombre.
Un correcteur a écrit juste ou faux suivant les cas.

1) Trouve les cases pour lesquelles la calculatrice a effectué un calcul. Quels sont ces calculs ?

Calcul	Nombres									Réponse	Type calculatrice
8+7-5+4-2	8	7	15	5	10	4	14	2	12	12 juste	(1) et (2)

Mathématiques 5e, éd. Magnard, 2001

2) Trois personnes ,A B, C ont trouvé des résultats différents en utilisant leur calculatrice pour effectuer 2 + 7 x 5.

Calcul		Affichage					Réponse	Type calculatrice
2 + 7 x 5	A	2	7	9	5	45	45 faux	(1)
	B	2	7	7	5	37	37 juste	(2)
	C	7	5	35	2	37	37 juste	(3)

a. Indique ce que la calculatrice effectue pour chaque résultat obtenu par les personnes A et B.

b. Indique l'astuce de calcul que fait C pour obtenir la bonne réponse.
c. Avec la calculatrice de type (1), pour obtenir la bonne réponse, tu peux utiliser les touches mémoires. Vérifie-le avec la séquence suivante :

2	M+	7	x	5	+	RCM	=

3) Un problème conduit à poser le calcul en ligne suivant :
2 + 3 x 8 : 4.
Fais des essais avec ta calculatrice pour trouver la réponse “8”.

4) Écris les règles de priorité des calculs que tu viens d'utiliser.
Propose un calcul à tester avec une calculatrice pour vérifier si elle respecte ces règles de priorité.

Mathématiques 5°, éd. Magnard, 2001

1 • Le compte est bon

N'utiliser pour ces exercices que les signes +, -, x.

1. Anne a trouvé le nombre 27 en employant une seule fois chacun des nombres : 2, 3, 5 et 6.
Elle a écrit son enchaînement d'opérations : (2 x 6) + (5 x 3) = 12 + 15 = 27.
Écrire ce calcul *sans parenthèses.* L'effectuer. Obtient-on le même résultat ?

2. a. Avec la même règle du jeu, trouver le nombre 22 et écrire l'enchaînement des opérations en utilisant des parenthèses.
b. Écrire le calcul précédent *en supprimant les parenthèses.* Obtient-on le même résultat ?

3. Avec la même règle du jeu, trouver le nombre 24 *sans utiliser de parenthèses.*

Collection “Les petits manuels” 5e, éd. Halier, 2001

1 • Calcul d'une expression

1 Suite d'additions et de soustractions

Voici le calcul de trois expressions :

(1) 12 + 2 + 8 = 14 + 8
= 22

(2) 23 – 11 – 5 = 12 – 5
= 7

(3) 25 – 7 – 11 + 3 = 18 – 11 + 3
= 7 + 3
= 10

a. Que représente le nombre 14 de la première ligne du calcul (1) ?
b. Que représente le nombre 12 de la première ligne du calcul (2) ?
c. Que représente le nombre 18 de la première ligne du calcul (3) ?
Que représente le nombre 7 de la deuxième ligne de calcul ?
d. Calcule les expressions :

17 - 5 + 3 et 17 - (5+3) 17 - 5 - 3 et 17 - (5 - 3)
Qu'observes-tu ?

2 **Priorité de la multiplication**

a. Calcule les expressions : (100 + 3) x 7 et 100 + (3 x 7)
(98 - 3) x4 et 98 - (3 x 4)

b. Sur sa calculatrice, Lilou a exécuté l'enchaînement suivant :

100	+	3	x	7

Elle n'a placé aucune parenthèse : le résultat est 121.
À quelle expression du a. correspond ce résultat ?

c. Puis, Lilou a exécuté l'enchaînement sans parenthèses

98	–	3	x	4

Le résultat affiché est 86.

À quelle expression du a. correspond ce résultat ?

d. Pour calculer les expressions sans parenthèses :

(1) 25 + 8 x 2 et (2) 35 - 7 x 4

On effectue d'abord les multiplications comme s'il y avait des parenthèses autour des produits.
Recopie et achève ces calculs à la main :

(1) 25 + 8 x 2 = 25 + ...
= ……

(2) 35 - 7 x 4 = 35 – ……
= ……

Collection "'Nouveau Décimale" 5e, éd. Belin, 200

Énoncé

Voici un certain nombre d'expressions numériques. Sans les calculer, regroupe-les en énonçant clairement et par écrit les raisons de tes choix.

A = 21 – 17 + 7 ;	B = 2 + 5 x 3 ;	C = (21 – 7) + 17 ;
D = (2 + 5) x 3 ;	E = 21 + 17 – 7 ;	F = (17 + 7) – 21 ;
G = 2 x 5 + 3 ;	H = 21 – (17 – 7) ;	I = 3 + 2 x 5 ;
J = 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ;	K = 21 x 17 + 7 ;	L = 3 + 2 x 2 + 3 ;
M = (2 x 5) + 3 ;	N = 3 + 2 x (2 + 3) ;	O = (21 – 17) + 7.

Déroulement :

La recherche s'effectue d'abord individuellement avec production d'une feuille de réponses, puis à deux avec production d'une feuille de réponses également ; enfin à quatre avec production d'une feuille de réponses. Suit un débat en classe.

Compte rendu de la deuxième activité

Réponses des stagiaires :

Groupe 1

• Modèle transmissif
Triangle (aucun calcul, juste observer, énoncer la règle)
1ere partie Delagrave

• Modèle behavioriste
Nouveau décimale (réponses téléguidées, sans synthèse)

• Modèle constructiviste
IREM de Limoges, une année en cinquième
Cinq sur cinq, Hachette

• Modèle socioconstructiviste
Énoncé sans nom

Groupe 2

1) Mathématiques 5e, éd. Magnard
(Socio)constructiviste-behavioriste
2) Cinq sur cinq, 5e éd. Hachette
Constructiviste, socioconstructiviste (1)
Plus détaillé dans (2), behavioriste, transmissif.
3) Collection E. Serra, éd. Bordas
Situation concrète, question détaillée, behavioriste mélangé avec modèle transmissif.
4) Une année en cinquième
Peut-être constructiviste selon la façon dont est abordée l'activité.

Groupe 3

1) Cinq sur cinq (partie 2)
Socioconstructiviste (2 pairs virtuels avec son propre résultat)
2) Triangle
Constructiviste (activité cognitive de l'élève)
Pas de réelle expérimentation **a** transmissif.
3) Delagrave
Transmissif
4) "Énoncé"
Socioconstructiviste

Commentaires.

L'énoncé sans nom suscite quelques interrogations parmi les stagiaires. Les indications quant à l'organisation de l'activité, les feraient pencher pour une activité "inspirée" par le modèle socioconstructiviste, mais la nature de ce qui est demandé aux élèves les laisse perplexes.
C'est pour nous l'occasion de dire que cette activité, élaborée par le Groupe Premier Cycle, ne s'inscrit dans aucun modèle déjà présenté. Elle s'inspire directement du modèle historico-socio-culturel de L. S. VYGOTSKI. Plus précisément, elle s'appuie particulièrement sur notre lecture des chapitres 5 et 6 de "*Pensée et Langage*" intitulés "Étude expérimentale du développement des concepts " et "Étude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance". Il nous semble en effet que les concepts de "pensée par complexes/pensée par concepts" ou de "concepts scientifiques/concepts quotidiens" développés par VYGOTSKI nous éclairent avec force sur le développement des concepts chez nos élèves.
Ces "idées forces" seront reprises et précisées dans les ateliers "Lectures d'erreurs communes" et "Algèbre".

Quelques repères

Alors que l'œuvre de Vygotski (1896 - 1934) est aujourd'hui reconnue comme l'une des plus importantes de la psychologie du 20e siècle, très peu de textes étaient disponibles en français; *Pensée et langage* est le premier ouvrage traduit en français (1985), 50 ans après sa parution originale.
L'accès à Vygotski emprunte donc souvent des "écrits sur " ou davantage encore, des traductions de ces écrits, ce qui a participé à induire des contresens fondamentaux.

I) Vygotski, Piaget, Wallon, positions relatives :

En 1932 , Vygotski a écrit l'avant-propos dans l'édition russe des deux premiers livres de Piaget; ce texte constitue le chapitre 2 de *Pensée et langage* ;
Piaget n'en a eu connaissance que par le condensé américain dans les années 60; Vygotski apprécie particulièrement chez Piaget la promotion - dans la lignée de Rousseau - de l'**idée de développement** ; il reproche à la théorie piagétienne les notions de stades nécessaires et indépendants de la scolarisation :selon sa "thèse fondamentale (de Piaget) les concepts scientifiques (1) évincent les concepts spontanés et prennent leur place plutôt qu'ils ne viennent de ceux -ci , en les transformant (...) **elle porte la marque de l'opposition entre savoir et pensée** ".
(1) s'opposent chez Vygotski aux concepts "quotidiens" - "spontanés" chez Piaget

Pour Piaget:
la société apporte à l'enfant , **au fur et à mesure de son développement** , ce qu'il doit "**assimiler** " par "**équilibration** ";

pour Vygotski :
"la voie principale du développement enfantin consiste **non pas en une socialisation progressive** apportée du dehors, mais en **une individualisation progressive**
sur la base de l'**essence sociale** propre à l'enfant" ;

ainsi, par exemple, le ***langage égocentrique***
- pour Piaget , il disparaît lorsque s'acquiert le parler du milieu
- pour Vygotski , il devient le langage pour soi et sa fonction demeure

la citation de Vygotski peut être rapprochée de la formulation suivante due à Wallon :
"... scinder l'homme de la société , opposer , comme il est fréquent , l'individu à la société, c'est lui décortiquer le cerveau . Car si le développement et la configuration de ses hémisphères corticaux sont bien ce qui distingue le plus assurément l'espèce humaine des espèces voisines, ce développement et cette configuration sont dus à l'apparition de champs corticaux **tel celui du langage, qui implique la société** comme les poumons d'une espèce aérienne implique l'existence de l'atmosphère .
(...) **la société est pour l'homme une nécessité, une réalité organique** ."

sommairement on peut dire que
- ***pour Vygotski et Wallon*** ,
la société est un des organes vitaux du système d'évolution de la personne ;
l'individu se distingue par émergence du cocon social;
- ***pour Piaget (et ses "continuateurs")***,
le milieu conditionne, de l'extérieur, la formation de la personne qui " grandit ";
l'individu se conforme, grâce à des "schèmes" innés, par "équilibration", en osmose dans le bain social.

II) les apports de Vygotski :

1) **pour l'essentiel , l'apprentissage devance le développement** ,
g cela ne signifie pas qu'il existe un parallélisme entre le cours de l'apprentissage scolaire et le développement des fonctions psychiques qui lui correspondent ;
• la compréhension d'un nouveau concept n'est pas l'achèvement d'un processus, **c'est un développement qui**

est initié ;
• " n'importe quelle matière a un caractère de discipline formelle "et" la base commune à toutes les fonctions psychiques supérieures, (...) , est **la prise de conscience et la maîtrise** " ce qui se marque par l'utilisation volontaire des concepts construits .
• **"c'est seulement lorsqu'il est intégré dans un système que le concept peut devenir conscient et volontaire" .**

2) définition de ***la mesure de généralité*** :

• tout concept étant une généralisation, un rapport d'un concept à un autre est "un rapport de généralité"
• chaque phase de développement d'un concept est caractérisée, spécifiée, par **" un système de rapports de généralité "**
• "tout concept peut être désigné à l'aide d'autres concepts selon un nombre infini de procédés": c'est le **principe d'équivalence des concepts.**

La mesure de généralité d'un concept est définie par sa "longitude" et sa "latitude",
• la longitude cheminant entre l'idée concrète à l'extrême et l'idée abstraite à l'extrême ,
• la latitude se déroulant suivant les divers domaines de la réalité .
Cette métaphore figurant l'état d'un concept comme un point d'une "surface" constituée d'une infinité d'autres points, a pour but de rendre compte de la possibilité de sa mise en relation avec les autres concepts **"selon des voies innombrables et infiniment variées ".**
D'où il résulte qu'avec le développement , augmentent **l'indépendance du concept à l'égard du mot**, celle **du sens à l'égard de son expression**, "et **les opérations portant sur le sens deviennent de plus en plus libres**, en elles-mêmes, et dans leur expression verbale " .

3) définition de la **" *zone de proche développement* "** :

• si l'on veut reprendre une image de VYGOTSKI et comparer **la vie d'une signification** à un arbre, on peut dire que la ramure pousse vers plus d'abstrait et de généralité, les racines plongeant dans l'expérience concrète et les contextes particuliers.
• pour la connaissance à apprendre, les sollicitations scolaires constituent "**une zone de proche développement**", un"attracteur" **vers plus d'abstraction** ;
• si on reprend l'image de l'arbre, "la **zone de proche développement"** attire la sève pour le bourgeonnement de nouvelles ramifications ;

4) **le langage intérieur** :

Alors que pour Piaget, le langage égocentrique est la marque d'un manque de socialisation ,
pour Vygotski, il a sa source dans une individualisation en marche, en naissance; avec le développement, pour Piaget il disparaît, pour Vygotski il devient ***le langage intérieur***.

Vygotski donne de celui-ci les propriétés suivantes :
• prédominance du sens sur la signification , de la phrase sur le mot , de tout le contexte sur la phrase .
• les mots s'y " agglutinent" ;
• le mot y est un concentré de sens, il faudrait une panoplie de mots pour le traduire en langage extériorisé;

- le passage du langage intérieur au langage extériorisé "est **une transformation dynamique complexe** ,
la transformation d'un langage prédicatif et abondant en idiotismes, en un langage articulé syntactiquement et compréhensible pour les autres."

- "c'est un élément dynamique, instable, fluctuant, **oscillant (...) entre le mot et la pensée**."

L'ouvrage *Pensée et langage* se termine par :
"le mot doué de sens est un microcosme de la conscience humaine"

Situation-problème, activité

Situation problème

Régine DOUADY caractérise la situation-problème ainsi :
1) L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. L'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible du problème.
2) Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème.
3) La situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas.
4) La connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève.
5) Le problème peut se formuler dans plusieurs cadres entre lesquels on peut établir des correspondances (par exemple cadre physique, cadre géométrique, cadre graphique).

Commentaires :
1) Sinon ils ne mobiliseront pas leurs connaissances et ne pourront s'apercevoir qu'elles sont insuffisantes.
2) Sinon il n'y a pas d'acquisition nouvelle. Il y a réinvestissement des connaissances.
3) Cette caractéristique est essentielle. En effet l'élève doit prendre conscience seul de l'insuffisance de ses connaissances. Cette insuffisance ne peut se constater que s'il est capable de constater tout seul que sa solution est fausse ou que sa méthode est trop lourde.
4) Cette condition n'est pas facile à remplir. Une analyse à priori du problème est donc indispensable. Les données du problème, le matériel mis à disposition des élèves... sont autant de variables qui influenceront les stratégies des élèves. Ces variables sont appelées variables didactiques.
5) Cette construction n'est souvent pas simple.
Enfin il arrive que les élèves arrivent à percevoir l'insuffisance de leurs connaissances mais soient incapables de résoudre le problème. Ce blocage n'est pas tenable pour l'enseignant. Il ne peut qu'aider les élèves à construire une solution. Ne retombe-t-on pas alors dans une pratique behavioriste ? Il semble ici qu'il y ait une différence fondamentale avec le modèle behavioriste : ici l'élève prend conscience de l'insuffisance ses conceptions. Ce qui n'est pas le cas dans la pratique behavioriste.

Activité

Ce qui donne lieu à une activité mathématique de la part de l'élève, c'est la recherche d'un problème qui utilise et coordonne des notions apprises séparément ou encore un problème qui s'inscrit dans un processus d'apprentissage d'un "objet" mathématique.
Une activité peut être définie par les caractéristiques suivantes :
1) L'élève peut engager une stratégie de son choix qui le conduit à des réponses au moins partielles au problème posé.
2) L'élève a besoin de convaincre ses interlocuteurs (autres élèves, professeur..) Il a les moyens de justifier ses réponses. Il est convaincu que cela fait partie de son contrat-élève.
3) L'énoncé laisse à l'élève la responsabilité du choix des "outils" et de la stratégie pour résoudre le problème.
4) Parmi les "outils" adaptés à la résolution du problème, "l'objet" mathématique visé est l'un des plus performants.

Bibliographie

G. ARSAC, G. GERMAIN, M. MANTE, *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon, 1991.
R. DOUADY, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactiques des mathématiques vol. 7.2 , éd La Pensée Sauvage, 1986.
R. DOUADY, *De la didactique à l'heure actuelle*, Cahier de didactique des mathématiques n°6, IREM Paris VII, 1984.
M. MATHIAUD, Repères IREM, 1995.

Lectures d’erreurs communes

Lectures d'erreurs communes

1) Idée "à la base" de cet atelier

On peut multiplier les observations qui permettent de vérifier que des erreurs en mathématiques sont renouvelées sur des "copies" d'élèves, indépendamment du lieu, du milieu socio-professionnel familial, de l'année, de l'établissement, par des élèves dont les bulletins scolaires peuvent être bien différents.

Il n'est donc pas illégitime d'émettre les hypothèses suivantes :

· Ces types d'erreurs caractérisent peut-être des similitudes de contextes didactiques systémiques, bien davantage que des capacités individuelles d'élèves.

· Les élèves qui écrivent ces erreurs suivent des "logiques" procédurales, identifiables, implicites, et "sues" parce qu'elles ont pu paraître efficaces.

· Ces erreurs donnent des indices d'une pensée par "complexes", certains de ces pré-concepts, parmi les plus communément rencontrés, sont d'une formation assez bien discernable.

2) Le matériau de travail

Il est constitué par quelque quatre-vingt exemplaires du "questionnaire" dont une version est jointe ci-après, renseignés "spontanément" par des élèves de troisième (quatre classes, années différentes, trois établissements non voisins), en temps limité (20/25 mn), sans calculatrice, avec brouillon éventuel au verso de la feuille.

3) L'activité dans l'atelier

· Individuellement, étude de trois ou quatre productions, en essayant **non pas de décrire les erreurs**, mais de

·

- trouver des "logiques" susceptibles d'être en "résonnance consciencieuse" avec du quotidien scolaire,
- repérer des "cohérences/incohérences" sur une même copie.

· Par groupes, sur affiches, pour l'analyse en commun, présentation du travail ci-dessus pour quelques cas.

La retranscription des "affiches" ci-après sert de base à une lecture *historico-socio-culturelle*, des productions d'élèves qui y ont été consignées et étudiées; il s'agit d'un essai proposé pour traduire les échanges selon les principaux axes des débats: la *lecture numérique* et les traces de *l'histoire des significations* en jeu pour l'élève.

(Texte qui fait suite ci-dessous aux affiches reproduites.)

$E = 702 \times 19{,}5 \times 120$ Sans calculer E, donner la forme décimale de $\frac{E}{3900}$.	Résoudre : $100x = x + 12$.	Donner l'encadrement par deux entiers consécutifs du quotient de 2500 par 99.	Résoudre : $32 = \frac{16}{3}x$.
$S = \frac{265}{120} + \frac{747}{180} + \frac{49}{15}$; calculer S en « $\frac{1}{60}$ ».	Donner une autre forme de H : $H = \frac{0{,}0014}{1000}$.	Calculer C : $C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64$.	Résoudre : $\frac{7}{3} - 7 = 14x$.
Calculer A : $A = 1999999 \times 236$.	Calculer B : $B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$.	Résoudre : $x^2 + 8 = 4$.	Calculer D : $D = \frac{1 + \frac{1}{2}}{-1 + \frac{1}{2}}$.
Donner une autre forme de G : $G = \frac{2{,}009}{10{,}009}$	Que savez-vous à propos du signe d'un produit de relatifs ?	Donner une autre forme de I : $I = \frac{633}{1233}$	Enoncer la propriété fondamentale des quotients :
On sait que a est un nombre décimal ; parmi les nombres qui suivent, donner ceux qui à coup sûr sont différents de a. $\frac{13}{4}$; $(3{,}6)^2$; $(-53)^3$; $\frac{32}{8}$; $\frac{7}{3}$; 3,14 ; $\frac{49}{7}$; π ; $\sqrt{3}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{333}{111}$.		Résoudre : $210 - 21x = 0$.	$F = 3^{161} \times 3^{49} \times 3^{40}$. Donner une forme « non fractionnaire » du quotient de F par 3^{200}.

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes
C1	$D = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{-1}$	Je barre "en haut" et "en bas" les mêmes chiffres ..... et autres exemples de la même logique plus ou moins explicitée
31	$D = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{-1} = 0$ $G = \dfrac{2,009}{10,009}$ $G = \dfrac{2}{10}$ $I = \dfrac{633}{1233} = \dfrac{6}{12}$	
22	$H = \dfrac{0,0014}{1000}$ $H = \dfrac{14}{1}$	
26	$H = \dfrac{0,0014}{1000}$ $H = \dfrac{14}{1}$ $E = 702 \times 19,5 \times 120$ $E = 702 \times 19,5 \times 120 \times 3900$ $E = 3900 \times 3900$ $E = 3900^2$ $D = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}}$ $= \dfrac{1,5}{-0,5}$ $= 1,5 \times 0,5 = 0,75$	· "quotient de E par 3900 " ↓ a " $E \times 3900$ " de même "quotient de 2500 par 99 " ↓ a " 2500×99 " "quotient de F par 3^{200} " ↓ a " $F = 3^{161} \times 3^{49} \times 3^{40} \times 3^{200}$ " et $F = 3^{440}$, avec la donnée $F = 3^{161} \times 3^{49} \times 3^{40}$ · - 0,5 a inverse de 0,5

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des “logiques” suivies et des “cohérences” : propositions des groupes
39	$100x = x + 12$ $100x + 12 = x$ $100 + 12 = 2x$ $112 = 2x$ $\frac{\sqrt{112}}{2} = x$ $210 - 21x = 0$ $x = 210 + 21$ $x = 231$ $C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64$ on simplifie par $\frac{7}{9}$ $C = 17 + 64$ $C = 81$	Peut-être influence de la propriété de Pythagore 100 donne l’idée de carré, renforcée par la forme? volonté de mettre les “ x ” et “les nombres” chacun de leur côté (comme précédemment)
A9	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - 7 - 14 = x$ $210 - 21x = 0$; $x = 10$ car $21 \times 10 = 210$ et $210 - 210 = 0$	
8	$H = \frac{0,0014}{1000}$ $H = 0,000014$ $A = 1999999 \times 236$ $A \approx 236000000$ $B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$ $B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100}$	Pb avec les simplifications, s’arrête à $x = \frac{12}{99}$; $x = \frac{96}{16}$; $x = \frac{210}{21}$ ou encore à $D = -\frac{6}{2}$

N° élève	Production(s) de cet(te) élève	Recherche des "logiques" suivies et des "cohérences" : propositions des groupes
10	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7}{3} - \frac{21}{3} = 14x$ $-\frac{14}{3} = 14x$ $x = \frac{\frac{-14}{3}}{14}$ $x = -\frac{3}{14} \times 14$ $x = -3$ Nombres à coup sûr différents de "a" dont on sait qu'il est décimal : aucune fraction n'est mentionnée	. . ·• Diviser un nombre en écriture fractionnaire par un nombre en écriture décimale pose problème; ·• sait faire le contraire, mais ne réalise pas que $14 = \frac{14}{1}$ Pour cet(te) élève, une écriture fractionnaire est-elle forcément un décimal?
10 bis	100 x - x = 12 $\frac{100x}{100} - x = \frac{12}{100}$ x - x = 0,12 0 = 0,12 cette équation n'a pas de solution. Nombres à coup sûr différents de "a" dont on sait qu'il est décimal : $I = \frac{633}{1233}$ $I = \frac{33}{233}$	Il faut que le facteur devant "x" soit 1. Donc 100 x je divise par 100. Par contre "-x", il n'y a pas à diviser. Un entier ne peut pas être un décimal "Simplification" par 6

À partir de ces relevés, des exemples de "variantes" susceptibles d'être apportées dans l'analyse des productions des élèves, lorsque les lectures tendent à se positionner suivant une "modélisation" historico-socio-culturelle (*inspirée des recherches de Vygotski*) du développement intellectuel.

Deux remarques préalables.

◇ La démarche porte l'attention principale sur le développement intellectuel de l'auteur des "erreurs" étudiées, sur les possibles/probables mouvements de sa pensée; non pas sur la description des erreurs en tant que telles, mais plutôt sur le "fil conducteur" de l'enchaînement d'idées dont elles sont le fruit.

Il est alors parfois possible de mettre à jour un travail intellectuel très laborieux, mais les raisonnements n'y ont pu être contrôlés faute de registres de langage appropriés, et il a abouti à des non-sens (quelquefois relevés par leurs auteurs).

◇ Contrairement à ceux qui appartiennent aux lignées rousseauistes ou piagétiennes, un point de vue historico-socio-culturel de l'apprentissage ne fait pas considérer que ce sont les erreurs qui sont formatrices.[1]

Les erreurs proposées à l'étude dans cet atelier, sont structurelles: elles témoignent d'un mode de pensée.

◇ En situation de "recherche", les erreurs sont conjoncturelles[2] et sont formatrices seulement dans la mesure où leur dépassement signe une extension de connaissance, autrement, contrôlables par le sens, elles ne sont ni positives ni négatives: elles sont! "Naturelles" en somme!

RELEVÉ CONCERNANT LES ÉLÈVES RÉFÉRENCÉ(E)S "C_1", "31", "22",

(première affiche dans le compte-rendu).

▫ **Des formes données aux nombres D, G, H, I**

"Logique" possible/probable :

fraction - la même chose en haut et en bas - à barrer.

L'attention porte sur la perception et l'action concrète, pas sur l'activité mathématique qui serait "commandée" par la connaissance de la propriété fondamentale des quotients.

Pour l'élève et l'enseignant la signification de "fraction" semble en coïncidence au niveau du mot, mais cela n'est pas le cas au niveau des actes de pensée: pour l'élève le mot est "chosifié" en deux nombres l'un au-dessus de l'autre, séparés par un trait horizontal.

Il ne semble pas illicite d'affirmer que les mots "*fraction*", "*simplifier*", "*mêmes nombres-chiffres-chose*", "*pareil-en-haut-en-bas-trait*", "*barrer-enlever*", "*numérateur et dénominateur*", ... forment pour ces élèves (avec dans chaque cas des nuances, plus ou moins systématiques comme plus ou moins aléatoires) un complexe-collection tel que le définit Vygotski :

> "***une généralisation des choses sur la base de leur participation à une opération pratique unique, sur la base de leur collaboration fonctionnelle***" [3]

---

[1]) Voir à ce propos, Pensée et langage, page 305 dans l'édition de LA DISPUTE.

[2]) Cette catégorisation des erreurs - *structurelles* et *conjoncturelles,* est empruntée à Stella Baruk.

[3]) Vygotski, ed française de 1 985, page 167.

RELEVÉ CONCERNANT L'ÉLÈVE RÉFÉRENCÉ(E "26", (deuxième affiche dans le compte-rendu).

- **La filiation "multiplication → division"**

La plupart du temps, bien au delà du collège, les concepts de nombre, d'opération, de forme numérique ne sont pas advenus en tant que concepts de plein exercice [4], et sont rigoureusement caractérisables par les propriétés de deux phases du mode de pensée par complexes; celle du complexe en chaîne

> ***" qui se construit selon le principe de la réunion dynamique et temporaire de maillons isolés en une chaîne unique et du transfert de signification d'un maillon de la chaîne à un autre ",***

et celle du complexe diffus qui réunit

> ***"à l'aide de liaisons diffuses des groupes intuitifs-concrets d'images ou d'objets"***.[5]

Dans ces zigzags de pensée incertaine, les mots "plus", "multiplié" ou "divisé", ... n'appellent pas une liaison par acte de pensée mathématique entre les nombres engagés dans l'opération évoquée, mais une liaison associative, par une gestuelle concrète entre "choses-nombres" perçues, gestuelle automatisée avec plus ou moins de fidélité.

PRENONS, PAR EXEMPLE, LE CONCEPT DE MULTIPLICATION.
En tendance [6], il s'enracine graduellement dans l'entraînement à suivre pas à pas une procédure de calcul ritualisée, davantage que par une distanciation relative à des expériences mentales d'additions particulières, initiant des activités d'abstraction et de généralisation.

Les échanges d'expérience enseignante, à partir du quotidien scolaire, tendraient à montrer que l'appréhension des notions de "multiplicande/multiplicateur" est souvent court-circuitée au profit d'une "algébrisation" prématurée des calculs, avec l'objectif d'obtenir rapidement des calculs "justes", en quelque sorte sans obligation de sens : c'est ainsi que l'on arrive à exhiber "une règle de priorité" qui apparaît littéralement "*conventionnelle*" au lieu de THÉORIQUEMENT FONDÉE, et à des écritures "remparts-d'erreurs" qui exonèrent de la maîtrise dans l'activité de LECTURE/ÉCRITURE NUMÉRIQUE (cf ci-dessus compte-rendu qui concerne l'atelier *conceptions de l'apprentissage*).

Si la notion de "produit" comme nombre au singulier, (*son écriture le rappelant comme formé à partir d'autres nombres grâce à la multiplication, cette formation possédant des propriétés caractéristiques fonctionnelles en calcul*) n'a été ni "décollée" des situations concrètes "illustratives" (celles-ci pouvant même se retrouver insuffisamment nombreuses et variées), ni abstraite des cheminements de calcul, et qu'arrive la définition rigoureuse qui dit :

> *" a et b étant des nombres quelconques (sauf que b n'est pas zéro), le quotient de a par b est le nombre dont le produit par b égale a"*,

MÊME SI L'ON N'OMET NI L'ÉTUDE GRAMMATICALE, NI LES VARIATIONS DANS LA RÉDACTION, on conçoit facilement que cette définition a peu de chance de véritablement constituer

---

[4]) Ils ne peuvent pas se dire en adaptation volontaire au contexte, selon le recours maîtrisé à leurs relations avec d'autres concepts; à la phase où ils sont, ils ne peuvent se dire que par eux-mêmes.

[5]) Vygotski, ed française de 1 985, page 168 et 170.

[6]) Le réalisé d'humanitude est lié à l'histoire particulière de chaque individu, non duplicable et infiniment varié; ses descriptions ne peuvent être vraies qu'en tendance, données suivant des lignes générales, en cohérence avec des choix qui les orientent.

une "*zone de proche développement*"[7] au concept de quotient de deux nombres.
Lorsque les préconcepts de "produit" et de "quotient" sont regroupés, *à l'aide de liaisons diffuses*, sous le vocable "résultat", il s'établit un *transfert de signification* entre "opération" et "calcul", une *chaîne* de sens, ou plutôt *du sens enchaîné*, qui fait obstacle à une extension de généralisation et d'abstraction pourtant nécessaire, par exemple pour que se spécifie le calcul littéral; la définition évoquée provoque alors des réflexions d'élèves présentant les marques d'une pensée par complexes, où un seul mot de la phrase convoque un amalgame à géométrie variable, dans lequel sombre l'idée exprimée :

- ◇ **si on ne connaît pas a et b , on ne peut pas les diviser ;**
- ◇ **un quotient c'est (avec) une division, pas une multiplication.**

ou, *en langage pour soi*,
"logique" possible/probable pour "26" (élève de troisième[8], donc qui a "appris" que *diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse*) :

- ◇ E divisé par 3900, ça fait "fois 3900" [9]

$$E = 702 \times 19,5 \times 120 \times 3900$$

- ◇ 19,5 ... la moitié de 39
- ◇ ... 702 x ... on fait 2 ..." fois 19,5",
- ◇ ... deux zéros, ... "12 ... 7 ... 19" , ... "02 [10] ... 19,5" ; ...

$$E = 3900 \times 3900$$

- ◇ ... je sais ... $E = 3900^2$

comme dans :

$$H = \frac{0,0014}{1000}$$

- ◇ ... trois zéros au-dessus, trois zéros en dessous, faut barrer
- ◇ $H = \frac{14}{1}$

ou dans :

$$D = \frac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1,5}{-0,5}$$

- ◇ .... - 0,5 dessous ... ça fait "fois" sans le moins ...

$$= 1,5 \times 0,5 = 0,75$$

---

[7]) Voir document intitulé "*Quelques repères* " diffusé lors de l'atelier concernant les représentations de l'apprentissage et qui figure ci-dessus au compte-rendu.

[8]) Dont les résultats scolaires ont permis une admission en seconde générale, comme pour tous les autres élèves de la classe (leurs productions sont répertoriées par les numéros simples qui vont de 1 à 26).

[9]) Il est notable que des élèves de plus en plus nombreux formulent des réponses sur ce registre : "*j'ai fait fois trois*"; l'abstraction de multiplicateur/multiplicande et, a fortiori, celle de facteurs ne sont alors certainement pas advenues.

[10]) Littéralement "entendu" comme 0,2 (zéro deux) et lui- même "compris" comme 1/2.
On retrouve dans ce type de productions une "agglutination" au lieu d'une articulation entre addition et multiplication, et une *mesure de généralité* *) du concept de produit qui n'atteint pas un degré suffisant à la compréhension de la filiation entre multiplication et division, elle ne permet pas l'émancipation du concept de sa désignation. -*) idem note 7.

RELEVÉ CONCERNANT LES ÉLÈVES RÉFÉRENCÉ(E)S "39" et "8",
(troisième et quatrième affiches dans le compte-rendu)

- **Des résolutions d'équations**

On retrouve encore manifestement les sillages d'une *pensée par complexes* où s'enchevêtrent *complexes diffus* et *complexes en chaîne*.

$100\,x = x + 12$

◇ on met les "nombres" du même côté ... $100x + 12 = x$

◇ on met les x du même côté ... $100 + 12 = 2x$ ....

Et là, l'examen de la "copie" de "39" tend bien à faire reconnaître que cet(te) élève a lu "la somme de deux carrés" dans une présentation familière, comme l'ont suggéré les collègues auteurs des notes portées par l'affiche.

Là où il est demandé de calculer B avec

$$B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$$

" 39 " a enchaîné par

$$B = \frac{490}{109} \times \frac{260}{700} \times 52$$

ce qui montre 13^2 lu comme $10^2 + 3^2$

ce qui pour cet(te) élève évoque fortement le "100 + 12 "

comme "devant être revêtu" d'un "$\sqrt{\ }$ = ... ce que l'on cherche ", c'est-à-dire x ; .... 2x ? ... alors "il faut" diviser par deux.

◇ L'ensemble de sa copie fait apparaître que cet(te) élève a bien retenu un imbroglio d'éléments de "leçons apprises" sans lien les uns avec les autres, associés à des graphies spécifiques perçues, pas à des signes mathématiques parlants; ainsi :

$x^2 = -8$

◇ à la suite de $x = \sqrt{-8}$ l'élève a écrit "cette équation est fausse car les racines carrées ne sont pas négatives";

◇ comme indiqué sur l'affiche, à

$C = \frac{7}{9} \times 17 + \frac{7}{9} \times 64$ l'élève a écrit " on simplifie par $\frac{7}{9}$ "

◇ "Logique" possible/probable : " fractions, pareil, ça s'en va, simplifier "

◇ à "donner l'encadrement par deux entiers consécutifs du quotient de 2500 par 99 ",

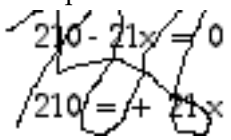
ce sont encore des bribes de procédure "apprise" (un algorithme de calcul du PGDC de deux entiers) qui semblent appelées par des mots dont les évocations qu'ils provoquent viennent "bout à bout" ... *quotients*, *division*, ... *entiers*, ... *plus grand*, *plus petit*, ... *restes*, ... *différences* ,

puisque cet(te) élève a répondu

2500 - 99 = 2401
2401 - 99 = 2302
.....
.....
124 - 99 = 25

où ce 25 est “encadré” dans un rectangle ... en tant que “réponse”.

Au vu de la copie de “39” il ne semble pas impossible d’affirmer qu’il y a eu MISE EN COHÉRENCE DES RÉPONSES entre les deux résolutions d’équations abordées puisqu’on y trouve :



valant pour “ je fais passer 21 x de l’autre côté en changeant le moins ”, puis, comme pour la précédente équation examinée ci-dessus, remplacé par :

x = 210 + 21

l’élève “ a fait passer les nombres du même côté, en changeant le moins ”
... il y a bien une différence à propos du changement de signe, mais si on essaie de se placer dans une “logique” de *pensée par complexes* on peut y reconnaître comme une confirmation de primauté de la lecture de 100 en tant que carré parfait, suggérée précédemment selon

“***le principe de la réunion dynamique et temporaire***
de maillons isolés en une chaîne unique
et du transfert de signification d’un maillon de la chaîne à un autre “.

- La lecture numérique en pensée par complexes donne des erreurs similaires caractérisant sans doute davantage des similitudes de CONTEXTES DIDACTIQUES SYSTÉMIQUES que des capacités individuelles d’élèves,

Les élèves référencés “ 39 ” et “ 8 ” n’appartenaient ni au même établissement, ni à la même promotion, ni au même département.
Ils(elles) n’ont donc pas bénéficié des mêmes professeurs, mais ont manifestement “entendu”, “retenu” des cours analogues; leurs erreurs ne sont pas “*n’importe quoi*” : on peut y reconnaître, jusque dans le détail non remarquable au premier coup d’œil, les mêmes “scories” langagières de leçons “ordinaires”.

COMPARONS :

$$H = \frac{0,0014}{1000},$$

les réponses sont différentes mais les mouvements de pensée analogues ;

- ◇ dans le premier cas ... trois zéros au-dessus, trois zéros en dessous, faut barrer

$$H = \frac{14}{1},$$

- ◇ dans le deuxième cas ... rajouter trois zéros après la virgule ... mais attention ... celui devant la virgule ne compte pas...

H = 0,000014 ;

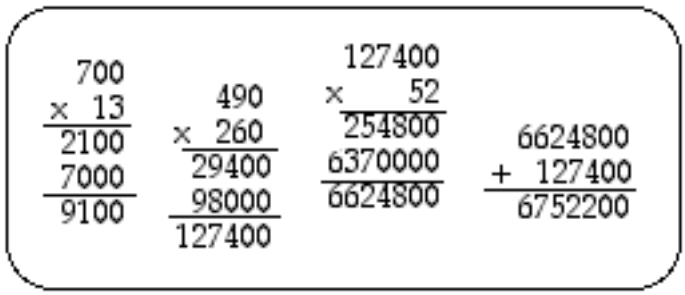
dans les deux cas on compte, barre ou place des “zéros” qui ne sont que des signes graphiques.
Aucune intervention des concepts médiateurs d’une *lecture/écriture décimale* [11] des nombres en jeu.

[11]) cf analyse à propos de “10 ” et “10 bis ”.

$$B = \frac{490}{13^2} \times \frac{260}{700} \times 52$$

" 8 " a produit

$$B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100}$$ avec "brouillon" de calcul au verso:



"Logiques" possibles/probables :

◇ des fractions à multiplier, ... ? (transformer 52 en fraction en ajoutant un 1)
◇ multiplier tout ce qui est en haut avec ce qui est en haut, (je me rappelle, "ça peut pas être plus simple" dit par le prof.) et ce qui est en bas avec tout ce qui est en bas;
◇ 700 ... fois 13 ... résultat 9100 ; .... avec un carré ... et deux zéros , faut rajouter deux zéros; ... 910000 en bas;
◇ 490 ... fois 260 ... résultat 127400 ... fois 52 ... résultat 6624800 ...
variante 1)
mes deux résultats ça fait 6752200 en haut;
ou bien variante 2)
oui mais faut le rajouter une fois à cause du 1 pour transformer 52 en fraction ... 6752200 en haut;
◇ deux zéros à la fin ... en haut et en bas ... barrer.

Il ne s'agit évidemment pas de "deviner" ce qu'a pensé EXACTEMENT l'élève.

Mais, si l'on veut bien faire l'hypothèse que les similitudes qui peuvent être repérées À RÉPÉTITION ne doivent rien au hasard, que les ÉLÈVES ŒUVRENT INTELLECTUELLEMENT ET QU'ILS NE SAVENT PAS RIEN pour répondre aux exercices qui leur sont proposés, il apparaît clairement une certaine adéquation entre leurs *registres langagiers* et des *actes de pensée par complexes*.
Une réalité qui ne devrait pas être, encore et toujours, considérée à priori comme indépendante des situations langagières vécues avant tout dans le quotidien scolaire.

RELEVÉ CONCERNANT L'ÉLÈVE RÉFÉRENCÉ(E) "10" et "10 bis"
(cinquième et sixième affiches dans le compte-rendu)

▫ la signification de " nombre décimal " se présente le plus souvent comme un complexe-collection .

"Logiques" possibles/probables:
◇ si "a" est un décimal ce n'est pas un nombre rond, ...

alors “a” est à coup sûr différent de $\frac{32}{8}$, $\frac{49}{7}$, $\frac{333}{111}$

····· > élève réf. 10 bis

◇ si “a” est un décimal c’est un nombre “qui tombe juste” ou alors “qu’il faut une virgule”, ...

donc “a” est à coup sûr différent de P et de $\sqrt{3}$

····· > élève réf. 10

◇ j’entoure d’abord les “a” possibles à coup sûr :

$\frac{13}{4};\frac{32}{8};3{,}14;\frac{49}{7};\frac{22}{7}$ c’est comme 3,14 ... *remplac*e P, $\frac{333}{111}$;

.... les à coup sûr différents de “a” *:* $\sqrt{3}$ *;* P; .... $(-53)^3$ ... une puissance

pour $\frac{7}{3}$ je ne sais pas, après la virgule, ça fait 333333 à l’infini, ...?

····· > élève réf. 22 [12]

◇ si “a” est un décimal c’est un nombre “à virgule” ...

donc “a” est à coup sûr différent de

$\frac{13}{4}$, $(-53)^3$, $\frac{7}{3}$, π , $\sqrt{3}$, $\frac{22}{7}$.

····· > élève réf. 8

Il n’y a pas de prise de conscience qu’un nombre décimal est un nombre qui peut s’écrire exactement dans le système décimal de numération. C’est sur la graphie du “nombre-objet-perçu” que porte l’attention.

▫ Deux remarques.

1°) L’efficacité des décalages de la virgule ou du comptage des zéros est aléatoire sur chacune des “copies” de ces élèves.

Ainsi “ 10 bis ” a produit :

d’une part $\begin{cases} H = \frac{0{,}0014}{1000} \\ H = 0{,}0014 \times 10^{-3} \end{cases}$

et d’autre part $\begin{cases} A = 1999999 \times 236 \\ \quad = 2000000 \times 200 + 35 \\ \quad = 400000000 + 35 \\ \quad = 400000035 \end{cases}$

mais encore, déjà relevé sur l’affiche :

[12]) Les exemples ne sont pris que dans des “questionnaires” distingués sur les affiches; AUCUN DE CES NEUF “TESTS” NE PORTE UNE RÉPONSE EXACTE ET COMPLÈTE.

$$\begin{cases} 100x - x = 12 \\ \dfrac{100x}{100} - x = \dfrac{12}{100} \\ x - x = 0{,}12 \\ 0 = 0{,}12 \\ \text{cette équation n'a pas de solution.} \end{cases}$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 32 = \dfrac{16}{3}x & \dfrac{2}{1} = x \\ & \dfrac{3}{3} \\ \dfrac{32}{\frac{16}{3}} = \dfrac{\frac{16}{3}x}{\frac{16}{3}} & \dfrac{2}{3} = x \quad \text{La solution de l'équation est } \dfrac{2}{3} \end{array} \right\}$$

On a une illustration du fait que des réponses "justes", voire "savantes", ne signifient pas maîtrise conceptuelle : elles sont loin d'engager des vérifications de cohérence qui la signifieraient (chiffre des unités pour un produit d'entiers calculé, remplacement de la variable par la valeur trouvée, ...).[13]

Si le contexte langagier est appauvri, les liens entre catégorisations perceptives restent associatifs; si les médiations langagières ne sont pas à la hauteur au plan de l'abstraction, les processus d'évolution des propriétés relationnelles générales des concepts languissent.

2°) Une remarque se rapportant à l'histoire scolaire de l'expression "nombre décimal".

> "*Et ce n'est qu'à la fin du XIX^{ème} siècle que des mathématiciens comme Cantor, repensant les fondements des mathématiques, élaborèrent une théorisation des décimaux, après que ces derniers eurent été longtemps réduits à un rôle pratique.*"[14]

Le rôle pratique des décimaux, c'était de remplacer dans le quotidien l'écriture fractionnaire des non-entiers ; la tâche, ardue, fut dévolue à l'École, aux instituteurs ; elle a duré plus d'un siècle.

Dans l'École, L'ÉCRITURE DÉCIMALE S'OPPOSE DONC À L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE DES MESURES NON-ENTIÈRES.

---

[13]) Il conviendrait donc de s'interroger sur les "bonnes notes" qu'elles encourent, et aussi de relativiser les "mauvaises"; de ne plus les considérer, ni les unes ni les autres, comme critères indispensables et incontournables d'orientation scolaire.

[14]) BASSIS O., 1 984, MATHÉMATIQUES, les enfants prennent le pouvoir, p.75; Ed NATHAN.
Odette Bassis souligne que "c'est un choix politique (...) qui a accéléré définitivement la pratique de l'écriture décimale".
(Ce choix est celui du système métrique (facilitation du commerce; devenu légal en 1840 seulement), système voulu décimal et dont il a été aussi voulu qu'il rattache les diverses sortes de grandeurs à l'unité de longueur, elle-même voulue, suivant l'esprit révolutionnaire d'après 1 789,

> "*naturelle, invariable, dont la détermination ne renferme rien d'arbitraire, ni de particulier à la situation d'aucun peuple du globe*".)

Odette Bassis cite un discours de Laplace aux formateurs des instituteurs, en floréal de l'an VII (1 799):

> ... "*Il est permis d'espérer qu'un jour ce nouveau système sera généralement adopté, (...), il présentera beaucoup moins de difficultés à l'enfance. Vous en éprouverez à le faire entendre aux instituteurs, (...); car l'homme est naturellement porté à rejeter sur la complication des choses, la peine que ses préjugés et ses habitudes lui donnent à les concevoir: mais votre zèle éclairé surmontera ces obstacles ...* "

Or, progressivement n'a plus subsisté que la désignation de l'un des termes de l'opposition et, au fur et à mesure, les fractions devenaient de moins en moins des nombres ordinaires tandis que les décimaux les remplaçaient dans le fractionnement des unités.
Si aujourd'hui, au quotidien aussi bien que pour nos élèves, décimal s'oppose à entier, cela manifeste UN GLISSEMENT DE SENS DANS UN COMBAT SCOLAIRE mené avec un "zèle éclairé"; LES ABUS DE LANGAGE SONT FONCTIONNELS, MAIS s'ils ne peuvent pas être conscients, ils sont susceptibles d'altérer les significations, de bloquer les mises en cohérence, et, par exemple, ... D'EMPÊCHER DE RECONNAÎTRE "10 " COMME UN DÉCIMAL.

Quels axes éventuels pour nos pratiques d'enseignement ?

· Nécessité d'une prise de conscience de nos représentations de l'apprentissage, pour une meilleure maîtrise de la cohérence de l'enchaînement des cours, de leurs liens, tant avec les acquis qu'avec les perspectives d'étude à venir.

· Les mouvements de pensée par complexes et par concepts n'obéissent pas aux mêmes dynamiques ;

◇ dans la pensée par complexes les significations sont, en quelque sorte, discrétisées et "rebondissent" par association les unes par rapport aux autres; les complexes restent en lien direct avec la réalité qu'ils évoquent, ils ne peuvent être désignés que par eux mêmes ;

◇ dans la pensée conceptuelle, le sens peut circuler parce qu'un concept isolé n'existe pas; tout concept est intégré dans un système de voisinages conceptuels subordonnés suivant la hiérarchie de leurs niveaux d'abstraction: tout concept peut s'exprimer d'une infinité de façons par la médiation d'autres concepts, entre lui et la réalité qu'il convoque.

· Les élèves en "difficulté" seront d'autant mieux "aidés" que seront multipliées les situations dans lesquelles on aura pu rendre incontournables les prises de recul, le détachement des liens directs et spécifiques d'avec les idées qu'elles font naître; autrement dit, d'autant mieux, que la tendance "re-médiatrice" cultivera l'aptitude à l'abstraction *(plutôt que l'obtention de "résultats" concrets observables et à minima théoriques*); chaque élève est irrémédiablement unique et se trouve dans une dynamique d'évolution dont des indices sont perceptibles, mais qui reste essentiellement inatteignable ; une aide individuelle ne peut donc se concevoir que dans la variété pour tous, la richesse et la rigueur langagières pour tous; (*les réactions individuelles profitant à tous, à condition qu'elles puissent être distinguées par chacun et par l'enseignant(e), ce qui impose des contraintes d'effectifs et de temps*).

Quelques repères bibliographiques relevant de conceptions constructivistes de l'apprentissage

<< ..., au lieu de "noter" (...) ou d'épiloguer sur (les) capacités, au lieu aussi de déplorer cette invasion d'erreurs en tout genre, ... plutôt considérer ces erreurs comme autant de résultats de processus réels, et entreprendre de cerner la vérité des erreurs.

Non pour s'y résigner, mais pour mieux se donner les moyens de les combattre. >>

JOUARY J.P.,1 996; Enseigner la Vérité?, p. 66; STOCK ; PARIS.

<< (Cet empirisme donne) à penser que le savoir s'obtient par "abstraction" de la pratique, en un processus qui tient d'une alchimie de la pensée: l'extraction de la quintessence de l'action. >>

MERCIER A., TONNELLE J.,
Autour de l'enseignement de la géométrie au collège;
in Petit x , n° 29 , p. 18; IREM de Grenoble, année-scolaire 1 991 - 1 992.

Cet empirisme "ignore" que les significations ont une histoire singulière pour l'apprenant et que donc, ce qui "donne sens", c'est l'intégration au système conceptuel .

"Le manque d'un corps de problèmes dont l'étude serait outillée par des techniques algébriques que l'on observe dans l'enseignement du Collège, se redouble au Lycée du manque d'un corps de théorie dont les théorèmes outilleraient la production des techniques algébriques enseignées. L'algébrique s'en trouve réduit à une liste de recettes techniques expertes sans ossature conceptuelle et on peut observer les effets sur les élèves du manque de méthodes algébriques assurées."

MERCIER A., VIIIe école d'été en didactique des mathématiques, le 30 août 1 995.

"Aussi formalisée soit-elle, la science ne peut se passer de la langue commune. C'est dans l'espace, à jamais entrouvert, qui sépare le calcul et la parole que trouve à se déployer la pensée, à travers la narration, la métaphore, l'imaginaire.

(...)

Si l'une des fonctions de la science est bien de permettre "cette critique des notions communes", elle ne saurait y parvenir que de l'intérieur de la communauté de sens, sans se targuer d'aucun privilège d'exception linguistique ou conceptuelle: même le pilote de Concorde se déplace le plus souvent à pied."

J. M. Lévy-Leblond
Aux contraires, 1 996.

J. et J. Caron abordent la psychologie du langage en dépassant les courants antérieurs principaux qui étudient la langue soit du point de vue de sa structure, soit du point de vue de son usage .

Leur approche "permet d'articuler fermement le fonctionnement du langage à l'ensemble de l'activité cognitive" ; ces deux chercheurs récusent le "modularisme" séparant syntaxe, sémantique, pragmatique, dans le contenu - fonctionnel et contextualisé - d'un fait de langage ; ils nous invitent

"à considérer les marques linguistiques qui constituent le discours moins comme des indices fournis à l'interlocuteur que comme autant de traces des opérations cognitives que le sujet effectue sur sa représentation.

Cette dernière devant elle-même être conçue non comme un simple tableau d'un état de choses (dans la perspective d'une sémantique purement dénotative) mais comme une totalité à la fois organisée et pourvue d'une orientation dynamique qui en entraîne une possibilité permanente de réorganisation" .

CARON J. & CARON-PARGUE,
art. in Bulletin de psychologie t. 46, n° 412 section langage, sept.-oct. 1 993.

"J'aime beaucoup les phrases de P. Valéry ; le cerveau…est le siège d'une variation, d'un changement psychique incessant, il est habité par l'instabilité même… L'esprit va, dans son travail, de son désordre à son ordre. Il importe qu'il conserve jusqu'à la fin, des ressources de désordre, et que l'ordre qu'il a commencé de se donner ne le lie pas si complètement, ne lui soit pas un tel bandeau qu'il ne puisse le changer et user de sa liberté

initiale ; c'est ce qu'exprime la loi de “self-variance” énoncée par le poète".

I. Prigogine,
entretien accordé à un journal italien en 1 984.

“La loi fondamentale de l'esprit m'apparut en 1 892-93 comme impossibilité de fixation. J'ai donné le nom anglo-latin de self-variance à cette remarquable caractéristique. La conscience est sans repos... Et cette instabilité... est le caractère essentiel de la sensibilité”,

P. Valéry cité par Prigogine lors de l' entretien évoqué ci-dessus.

Quelques repères bibliographiques relevant de conceptions constructivistes de l'apprentissage.

“Le signifiant doit être libre.

Je veux dire par là que, pour acquérir sa capacité maximale d'utilisation, le signifiant doit se libérer des premières liaisons dans lesquelles il est apparu.

(...)

La liberté du signifiant implique donc qu'il puisse prendre plusieurs sens, c'est-à-dire se dégager d'une signification donnée pour se greffer sur d'autres chaînes du discours, qu'il soit facilement mobilisable, donc polyvalent (polysémie).

(...)

Ainsi un sujet intelligent effectue-t-il avec vélocité cette gymnastique compliquée, qui va du repérage du signifiant clé dans un énoncé à l'appel fait à d'autres signifiants pris dans des groupements associatifs conscients ou inconscients, pour revenir ensuite au point de départ, dans un mouvement en spirale. Il peut en résulter un enrichissement permanent des systèmes qui deviendront de plus en plus performants.

(...)

Alors que l'enfant intelligent déploiera toutes ses ressources associatives, fera appel à ses souvenirs, à ses réserves inconscientes pour y déceler quelque analogie avec la situation actuelle et ouvrir ainsi tous les possibles, l'enfant débile est dans l'immobilisme; adhésif, collant au discours mais aussi au maître , il ne sort pas d'un formalisme qui rassure, (...)

(...)

Nous pensons que, (l'inaptitude à comprendre), chez certains enfants, (relève d') un défaut d'apprentissage: le signifiant s'est fixé dans un sens donné au départ du fait de la pauvreté des échanges langagiers, cette carence d'apport s'est mutée par la suite en inertie intellectuelle.”

(...)

A. Cordié, 1 993, Les cancres n'existent pas, quatrième partie; SEUIL; PARIS`.

“Si on considère comme des “renforcements” tous les buts extérieurs qu'on ajoute à une activité pour motiver le sujet qui l'effectue, alors on peut dire, (...) que “Le renforcement tue la motivation intrinsèque”. On peut vérifier en effet que, lorsqu'on soumet un sujet humain à des contraintes, à la menace d'une récompense ou d'une punition, quand on surveille son activité ou même quand on lui impose une limitation de temps, on fait baisser son niveau d'intérêt pour cette activité. A la limite, on peut supprimer tout intérêt pour l'activité, si on multiplie les motivations extrinsèques.

(...)

dans École et Savoir, dans les banlieues ... et ailleurs, les chercheurs du groupe de B. Charlot écrivent:

“Que faut-il faire pour réussir à l'école? Pour les élèves de familles populaires (...) il faut aller le plus loin possible, c'est-à-dire survivre le plus longtemps possible dans l'univers scolaire. Que faut-il faire pour aller le plus loin possible? Apprendre. Mais qu'est-ce qu'apprendre pour la majorité de ces élèves? Ce n'est pas acquérir des savoirs présentant en eux-mêmes un intérêt propre, une valeur, du sens. Le savoir n'est pour ces élèves ni objectivé ni systématisé en univers intellectuel. Apprendre, c'est satisfaire aux exigences de l'école pour accéder à la classe supérieure, à l'université, au diplôme, au bon métier, etc. Apprendre c'est écouter les professeurs, faire ses devoirs, apprendre ses leçons.

Apprendre, c'est faire des math., faire du français, faire de l'histoire-géo., les disciplines scolaires n'étant pas alors perçues comme des ensembles cohérents de savoir mais comme des formes institutionnelles du découpage du temps scolaire (...)**”**.

(...)

Nous en revenons aux motivations intrinsèques du début de notre texte. La différence observée par les chercheurs réside dans le fait que les enfants en réussite scolaire veulent le savoir pour lui-même, même si, dans certains cas, ils le veulent aussi pour autre chose. Ils ont du plaisir à apprendre pour apprendre, à réfléchir pour réfléchir.

(...)

Par contre, l'échec scolaire est le résultat d'une valorisation excessive de l'école. Les individus en situation d'échec voient la culture à travers l'école et non pour elle-même. Ils voient la culture à travers les finalités pratiques de l'école, qui utilise des motivations extrinsèques inadaptées au processus culturel. Ils n'apprennent pas le plaisir qu'elle peut apporter, qu'ils vont continuer longtemps à ignorer."

M. Lobrot, Université Paris VIII
art. , Revue Française de Pédagogie, n° 128, juillet, août, sept. 1 999, p. 63-71.

Algèbre …

Algèbre
Problèmes… Démonstration… Débat

Quelques questions ?

• Quel(s) but(s) donne-t-on au travail algébrique demandé aux élèves de collège ?
• L'algèbre va (devrait) devenir pour un élève «un outil de modélisation» très important. Est-ce compatible avec son approche de l'algèbre à la sortie du collège ?
• L'algèbre n'est elle pas perçue par les élèves, contrairement à la géométrie (cf propos de collègues de seconde), comme un «livre de recettes». Est-ce inéluctable ?
• Au collège, globalement, l'algèbre est abordée
soit au travers d'activités de résolution de problèmes
soit au travers d'activités «techniques» (développements, factorisations……)
L'insistance pour un travail «très technique» proposé aux élèves ne favorise-t-elle pas uniquement la formation d'une «pensée par complexes» au détriment d'une «pensée par concept» ? (on peut évoquer ici l'apport des travaux de Lev Vygotski).
• Ces deux types d'activités permettent d'apporter des réponses *par l'algèbre* mais qu'en est-il du travail *sur l'algèbre* ? (on peut évoquer ici la dialectique outil/objet de Régine Douady).
Ces activités peuvent-elles suffire pour permettre véritablement «un accès au sens de l'algèbre», notamment si l'on affirme que «*l'apprentissage de l'algèbre est l'appropriation d'une nouvelle et spécifique méthode mathématique d'agir et de penser». ?*
• Peut-on proposer aux élèves des activités pour améliorer la compréhension de l'algèbre, en particulier son aspect stuctural ? Des activités pour créer du lien entre signifié et signifiant dans les écritures algébriques ?
• Au collège, le travail de démonstration demandé aux élèves se fait essentiellement en géométrie, pourquoi ?
Des activités de démonstration en algèbre ne sont-elles pas pertinentes pour faciliter l'entrée des élèves dans l'algèbre ?
Dans la démonstration en géométrie, l'élève est amené à distinguer la recherche de la preuve (intuitions, essais, fausses pistes, erreurs, expérimentations…) et son exposé. Ne peut-on faire de même en algèbre ?
• Le «débat scientifique en classe» (tel que défini par Marc Legrand) est-il un «moyen» de faire entrer l'élève dans le «jeu de la preuve et de la réfutation», de faire entrer l'élève dans le «jeu de l'échange d'idées avec ses pairs» ?

• Voici quelques «activités»

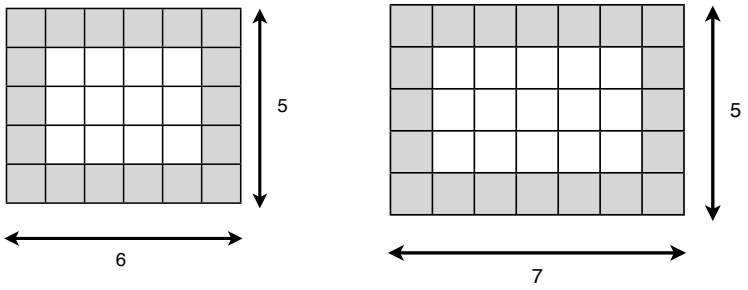
Peut-on les proposer à nos élèves ? Sous cette forme ou sous une forme modifiée ?
Que peut-on en attendre ? Comment exploiter le travail fourni ?
Avec quelles modalités : classe entière, travail de groupe, débat…… ?

1 - Écrire chacun des nombres suivants de deux autres manières : sous forme d'une somme et sous forme d'un produit.

$14 =$	$14\ x^2 =$
$5 + 7 =$	$-5\ x^2 =$
$3x =$	$-4\ a =$
$4x + 3 =$	$0 =$

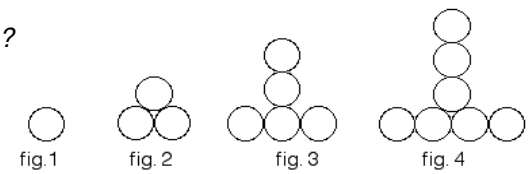
La manière de les proposer modifie-t-elle leur intérêt ?

2 - On peint toutes les cases en bordure du rectangle. Dans chaque cas, déterminer le nombre de cases peintes. Exprimer le nombre de cases peintes pour une longueur quelconque du rectangle.



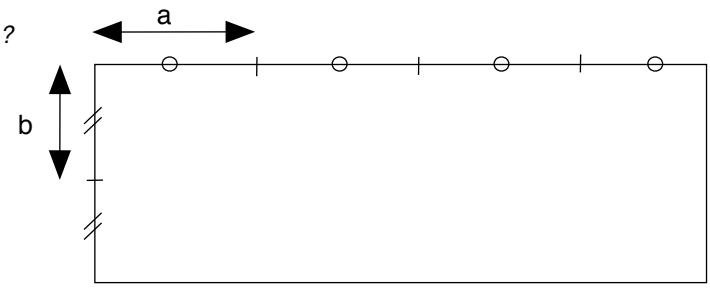
3 - D'après Luis Radford.

- *Combien de cercles comprend au total la figure 5 ?*
- *Combien de cercles comprend au total la figure 10 ?*
- *Combien de cercles comprend au total la figure 100 ?*
- *Combien de cercles comprend au total la figure n ?*



4 - Une unité pour les longueurs et une unité pour les aires sont choisies.
a et b sont deux nombres entiers. L'aire du rectangle ABCD est 384.

- *Démontrer que a x b = 48*
- *Quelles sont les valeurs possibles pour a et b ?*
- *Dans chaque cas, calcule le périmètre*



5 - Le génial professeur (comme d'ailleurs tous les profs de maths) Paul Algebrus propose cette démonstration à ses élèves, médusés.

Que penses-tu de cette démonstration ? P.Algebrus aura-t-il le prix Nobel ?

Soient deux nombres a et b. Si a = b alors $a^2 = ba$

d'où $a^2 - b^2 = ba - b^2$ *Donc a + b = b.*

et (a + b)(a – b) = b(a – b) . *D'où, pour a = b = 1, on obtient 2 = 1 .*

6 - Un multiple de 3 est aussi un multiple de 9.
Un multiple de 9 est aussi un multiple de 3.

7 - Vrai ou faux ? Si a > 0 alors $a^2 > a$.

8 - Mélanie affirme que l'équation $x^2 + 7 = 0$ n'a pas de solution réelle.
Peux-tu justifier cette affirmation sans utiliser de «calcul algébrique», par des phrases «en français».

9 - Pour chacune des égalités suivantes, dire si elle vraie et pourquoi ou si elle est fausse et pourquoi ?

$10\times(4+7)=10\times4+10\times7$ $7\times(a\times3)=7\times a\times7\times3$

$10\times(4\times7)=7\times(10\times4)$ $3\times(5x)=15x$

$5\times a+5\times x=5\times(a\times x)$ $10b-(-a)=10b+a$

$7x-(4x+3)=7x-4x+3$ $(-2a)(3b)=-6ab$

$5a-(2-3a)=5a-2+3a$

Quelques idées-forces qui se dégagent de la lecture de VYGOTSKI

[fournissant les bases explicatives de la conception de l'activité n°10]

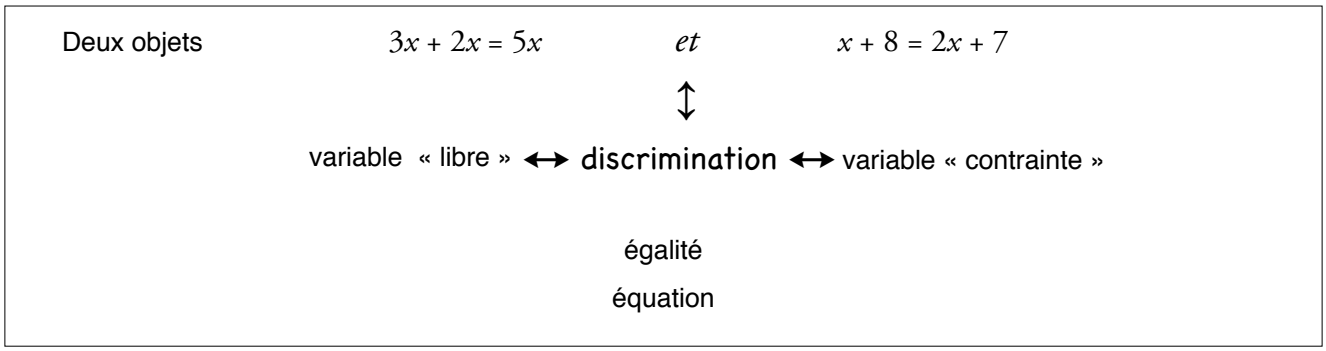
Il faut préciser qu'il n'est pas possible de prendre séparément toutes les notions exposées par L.Vygotski dans son travail (Pensée et langage - *dernière traduction française 1997*). Ce serait d'ailleurs la négation même des travaux de l'auteur. L'approche vygotskienne de l'apprentissage est globale et c'est d'ailleurs cela qui en fait la force et la pertinence. Mais cette vision globale a un revers : comment se servir de ces travaux dans notre enseignement quotidien ?
La brève existence de Vygotski ne lui a pas laissé le temps de développer des méthodologies pédagogiques, ce qui est d'autant plus regrettable que l'éducation était au cœur de ses travaux.
Il appert indiscutablement que l'approche vygotskienne permet déjà une analyse fine des erreurs des élèves (voir Atelier sur les erreurs) mais la finalité de cette activité est de montrer qu'elle rend également possible la conception d'activités qui permettent un développement des connaissances des élèves.
Les travaux de Vygotski ont été repris par d'autres, d'autres auteurs ont réalisé des recherches dans des voies très complémentaires et/ou élargissant son champ d'action (par exemple Bakhtine sur le discours, Duval, Radford ……).

Pour les raisons évoquées ci-dessus, les remarques qui suivent sont réductrices de la pensée de Vygotski. Il s'agit simplement de donner une première lecture; première lecture partiellement fondatrice et explicative de nos actes d'enseignement

• ***La notion de pensée par complexe***
Ce type de pensée se trouve chez l'enfant mais également chez l'adulte. On retrouve un tel fonctionnement lorsque qu'un élève aborde un nouveau «domaine conceptuel» comme l'algèbre par exemple.
Cinq complexes (associatif, collection, en chaîne, diffus, pseudo-concept) sont définis par l'auteur mais il n'est pas nécessaire dans un premier temps, ici, de les distinguer.
Dans ce type de «pensée» l'individu lors de «classements» réunit des objets concrets hétérogènes. Les liaisons se font de manière empirique et de manières très diverses. Tous les traits distinctifs sont *«à égalité»*.
Le complexe n'est pas supérieur à ses éléments. Ce qui signifie que cette «pensée» n'est pas totalement opérante pour résoudre des problèmes tout en ayant une certaine forme de cohérence.
Le pseudo-concept permet de comprendre et d'expliquer certains phénomènes observés en classe. C'est un pont entre la pensée concrète et la pensée abstraite. D'où cette dualité : intérieurement c'est un complexe et extérieurement cela ressemble à un concept.
Il y a là une difficulté pour l'enseignant de distinguer pensée par complexe et pensée par concept. Autrement dit, lors d'«expressions» utilisées en classe ce sont les mêmes objets pour l'élève et le professeur, le même référent, mais ils n'ont pas la même «signification opérante» dans l'activité en cours.
On peut donc penser qu'il est important de réduire le plus possible la part d'implicite dans le dialogue professeur/élève. La verbalisation dans différents registres (symbolique, langue naturelle, graphique…) est une piste essentielle. En algèbre, les propriétés qui interviennent ne sont pas toujours explicitées et leur énoncé est rarement écrit.

• ***La formation des concepts***
Vygotski distingue les concepts quotidiens («appris sur le tas» - ils ont une portée locale - ils sont contextualisés - ils sont relativement isolés les uns des autres) et les concepts scientifiques (ils ont une portée générale - ils forment des systèmes - ils se créent avec le concours essentiel du langage).
À l'école ce sont les concepts scientifiques qui sont en cours d'appropriation / de constitution. Bien évidement l'appui sur les autres concepts est nécessaire.
Pour faire suite à ce qui est écrit précédemment, certains traits distinctifs prennent plus de force. Parmi les objets une différenciation s'opère, une «première» généralisation a lieu puis l'abstraction. On peut

dire que le concept est une synthèse de «pensées». L'idée d'un concept «isolé» n'a pas de sens. Les concepts sont toujours en perpétuel développement chez chaque individu, insérés dans un système de concepts. Le développement de cette «structure de concepts» modifie la nature de la pensée de l'élève qui en retour accroît le développement de sa «structure de concepts». Ceci permet d'expliquer pourquoi l'enseignement de notions isolées n'a pas de sens.
Par exemple, la notion de *nombre* ne devient concept que reliée aux notions d'*opérations*, d'*égalité*…… (à leur tour concepts).



• ***La présence d'un concept et la conscience d'un concept ne coïncident pas***.
Autrement dit, un enseignant peut présenter une nouvelle notion à un élève, ce nouveau concept est là; il faut que cet élève l'intègre à sa «structure de concepts» pour que ce concept devienne «opérant».
La verbalisation (langage oral et langage écrit très complémentaires) est un puissant moyen pour y arriver. On trouve là toute l'importance du rôle fonctionnel de la signification de l'«énoncé verbal» dans l'acte de la pensée.
Le concept «*pour autrui*» se développe avant le concept «*pour soi*». Les idées ne prennent toute leur consistance que lorsqu'elles rebondissent sur celles des autres.
Dans l'activité proposée, il y a obligation pour chaque élève de composer avec un partenaire puis avec l'ensemble des binômes.
La diversification des situations soumises aux élèves leur permet de mettre «en contact» un certain nombre de notions, de créer des liens entre ces notions, d'éprouver ces notions dans différents contextes. Ces liens se croisent à des nœuds - ces nœuds sont les «concepts en développement». Très schématiquement, on peut dire que plus il y a de liens, plus les «concepts en développement» sont opérants.

• ***Le langage comme outil de construction et de maîtrise de la pensée***
Les interactions entre élèves et entre élève et professeur provoquent des réorganisations mentales. L'édification de la «pensée» se fait de manière interpersonnelle puis intrapersonnelle.
Quand on est conscient de l'existence ce processus, il n'est pas rare de le rencontrer en classe : lors de débats, il arrive qu'un élève s'approprie l'idée d'un autre et que l'on entende « toi, tu dis ça [phrase] mais……» et en même temps on constate la transformation de la pensée du locuteur… en une sorte de réflexion «par contradiction».
On peut rajouter ici l'apport d'auteur comme Bakhtine sur l'autre fonction du langage : la fonction

discursive. Pour les enseignants, les échanges entre élèves sont aussi le moyen d'obtenir des informations sur l'état de leur «développement».

«La verbalisation est une activité qui change les différences en valeurs » [Bakhtine]
« La pensée ne s'exprime pas mais se réalise et s'organise dans les mots » [Vygotski]

• ***La Connaissance (culture) se transmet et se développe en utilisant des systèmes de signes*** (outils cognitifs).
Ces systèmes de signes ne sont pas uniquement des accessoires. Ce sont de véritables prothèses pour chaque individu. Chaque individu s'approprie ces outils cognitifs au travers d'interactions sociales. En algèbre, l'«invention» par Viète de l'écriture littérale a permis des progrès considérables. Il n'y a qu'à comparer une résolution de problème avant l'invention et après. La généralisation rendue ainsi possible a fait apparaître de nombreux problèmes auparavant traités séparés comme appartenant à une même catégorie. La modélisation était en marche…… (Maintenant le revers de la médaille c'est la difficulté pour les enseignants à faire accéder les élèves à la puissance de ce «nouvel outil»).

Compte-rendu de l'atelier Algèbre

Ce compte-rendu reprend synthétiquement les travaux des différents groupes et les remarques lors de la mise en commun, ceci afin d'éviter les répétitions.

• Activité 1
Peut provoquer un travail intéressant sur le vocabulaire (somme, produit…), et à partir de là possibilité de redonner des définitions et de marquer leur importance.
Intérêt de «voir» chaque expression comme un nombre
Peut provoquer la nécessité d'expliciter les opérations et la «description» de chaque nombre
Proposition d'enrichissement : varier le nom donné à la variable

• Activité 2
Proposée en 6e, permet un travail sur la rédaction en français et la recherche d'un élément de généralité. Il semble qu'un travail par deux puis une mise en commun avec la classe avec confrontation et lecture des différentes écritures du nombre sera pertinent.
Proposée en 5e, on peut rajouter aux remarques précédentes la possibilité de faire travailler le «en fonction de……»
Faut-il préciser que la largeur est fixée à 5 ou bien faut-il laisser l'élève trouver cet «invariant» qui sans lui rend impossible la modélisation du problème ?
Cela mériterait peut-être d'expérimenter les deux approches.

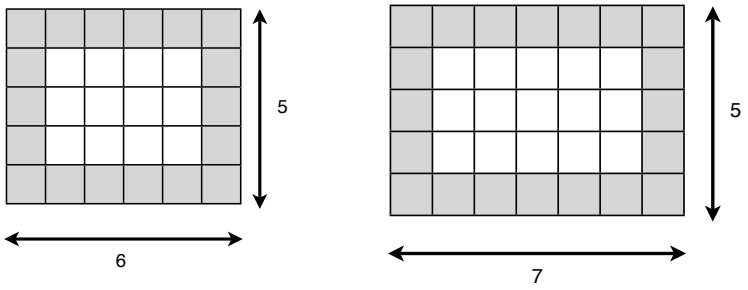
• Activité 3
L'impossibilité de dessiner la figure 10 entraîne la nécessité d'une abstraction; d'où la possibilité d'utiliser cette activité pour tester la capacité d'abstraction des élèves en 4e ou 3e
Cette activité posée en 5e peut permettre un travail pertinent sur le calcul littéral
Proposition d'enrichissement :
Question supplémentaire : quel est le numéro de la figure correspondant à 299 cercles ?
Serait ainsi aborder un travail de liaison avec les équations.

• Activité 5
Proposée en 3e, peut permettre de faire réfléchir sur les «enchaînements», les propriétés mises en jeu.
Peut permettre de faire faire un travail sur ces propriétés, sur ce qu'est une propriété en mathématiques, sur les conditions pour faire intervenir une propriété, de préciser explicitement en algèbre les propriétés utilisées et qui sont souvent «masquées».

• Activité 7
Proposée, peut-être en deux temps - en groupe puis mise en commun dans la classe - peut permettre d'amorcer un débat scientifique, de redonner les «règles du jeu mathématique», en particulier sur le vrai/faux.
Peut permettre d'imposer la nécessité et la pertinence des écritures algébriques pour exprimer une proposition et la prouver.
Avec une reformulation, proposée en 5e, peut faire travailler la notion de contre-exemple.

• Activité 10
Des questions ont été posées dans certains groupes, d'où les interventions faites au cours du stage et le texte joint.

2 - On peint toutes les cases en bordure du rectangle. Dans chaque cas, déterminer le nombre de cases peintes. Exprimer le nombre de cases peintes pour une longueur quelconque du rectangle.



Une première synthèse avec les élèves fait apparaître l'utilisation du comptage qui est suffisant pour les deux premiers cas.
La deuxième question interpellent les élèves qui après quelques échanges se mettent d'accord sur ce qui est demandé. Quelques exemples d'échanges :
«on ne peut pas savoir puisqu'on ne connaît pas le nombre de cases» - «que veut dire quelconque ?» - «si la longueur est de 14… combien de cases ?» «il n'y a qu'à compter» «oui, mais si c'est 32 ?» «… et si c'est 3000… ?» - « la largeur reste pareil…» - «on ne connaît pas l'autre nombre» - «on pourrait prendre 11 par exemple» (On reconnaît là un cas d'*exemple générique* - métonymie, qu'il est relativement fréquent de trouver en classe tant que les élèves n'ont pas atteint un degré de généralisation suffisant au niveau du calcul algébrique) ……
Certains élèves ont dessiné d'autres cas…… les élèves arrivent à se poser la question de comment le nombre de cases peintes est-il construit ? Chacun donne son point de vue……
Certains ont remarqué que le nombre de cases peintes augmente de deux en deux, ce qui peut offrir une piste vite rejetée parce qu'elle nécessite de connaître le nombre précédent.
La deuxième synthèse permet d'écrire ce qui suit……

Cas 1	Cas 2
nombres de cases = 18	*nombres de cases* = 20
nombres de cases = $6 \times 5 - 4 \times 3$	*nombres de cases* = $7 \times 5 - 5 \times 3$
nombres de cases = $(6 + 5) \times 2 - 4$	*nombres de cases* = $(7 + 5) \times 2 - 4$
nombres de cases = $6 \times 2 + 3 \times 2$	*nombres de cases* = $7 \times 2 + 3 \times 2$
nombres de cases = $6 \times 2 + 5 \times 2 - 4$	*nombres de cases* = $7 \times 2 + 5 \times 2 - 4$
nombres de cases = $6 \times 5 - 12$	*nombres de cases* = $7 \times 5 - 12$

Dans l'écriture «18» on n'a pas la même information que dans les autres……Il est décidé de s'intéresser à ces six écritures. Pour chacune, les élèves écrivent la «signification».
Des liens sont faits par exemple entre le 12 de l'écriture 6 et le 4 x 3 de l'écriture 2; les écritures 3 et 5 sont aussi l'objet de remarques.
Plusieurs élèves interviennent pour repérer «des choses qui ne changent pas».

Un élève propose de «voir» pour un nombre de cases sur la longueur de 11 (un élève ayant fait le dessin fournit 28 comme réponse)
Les élèves reprennent les six écritures dans ce cas.

Cas 3

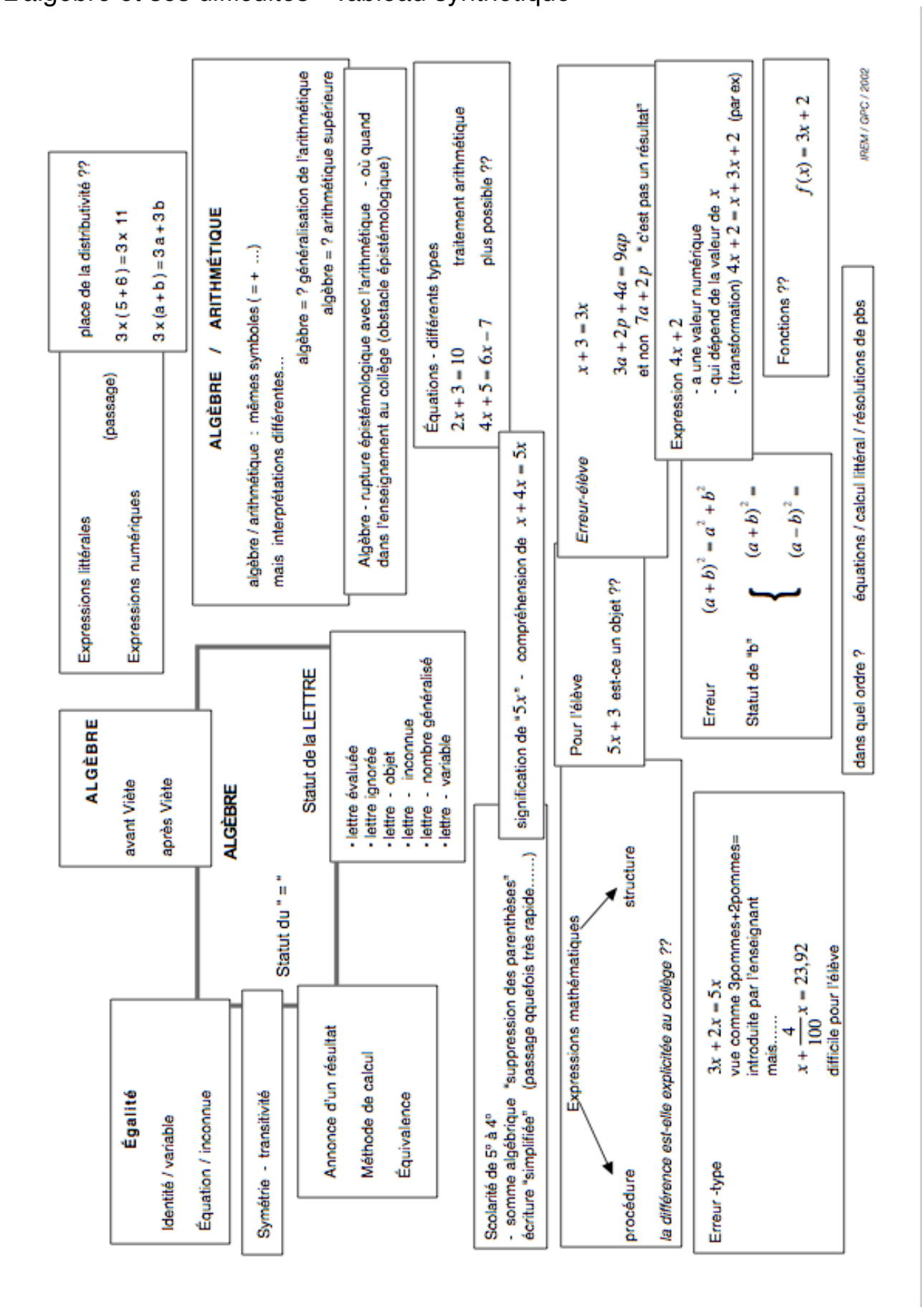
nombres de cases = 28
nombres de cases = $11 \times 5 - 9 \times 3$
nombres de cases = $(11 + 5) \times 2 - 4$
nombres de cases = $11 \times 2 + 3 \times 2$
nombres de cases = $11 \times 2 + 5 \times 2 - 4$
nombres de cases = $11 \times 5 - 12$

Puis se pose la question pour un nombre quelconque …
Les échanges sont nombreux. Il est proposé par un élève de prendre «30 par exemple», plusieurs réactions du type «mais 30 c'est UN exemple… ».
Plusieurs propositions d'utiliser un signe comme un petit carré … puis «et une lettre…».
Finalement on se décide d'appeler n «ce nombre quelconque».
Beaucoup d'interrogations dans les échanges traduisent le malaise de ne pas connaître LE nombre de cases peintes; là aussi de nombreux échanges… pour certains élèves on connaît le nombre autrement.

pour un nombre quelconque…

nombres de cases = ??
nombres de cases = $n \times 5 - (n - 2) \times 3$
nombres de cases = $(n + 5) \times 2 - 4$
nombres de cases = $n \times 2 + 3 \times 2$
nombres de cases = $n \times 2 + 5 \times 2 - 4$
nombres de cases = $n \times 5 - (n - 2) \times 3$

L'algèbre et ses difficultés - Tableau synthétique



Quelques remarques pour compléter le tableau sur l'algèbre

◊ Statut de la lettre (d'après des recherches de D.Kucheman reprises par L.Booth, C. Kieran et autres)

- lettre évaluée : transformation par l'élève de calculs littéraux en calculs numériques à partir le plus souvent de l'ordre alphabétique (c = 3 ; e = 5)
  Peut découler du fait que pendant les premières années d'apprentissage des mathématiques les réponses demandées aux élèves sont numériques.
- la lettre objet : $6p$ peut être interprété par l'élève comme «six poires». La lettre correspond à l'abréviation d'un mot. (on peut retrouver là une erreur de type didactique lorsque l'enseignant explique à un élève que $6p+3p=9p$ *parce que 6 poires + 3 poires cela fait bien 9 poires*)
  On retrouve cette conception dans les «formules» de type $A=L\times l$ où L *et* l ne sont pas des variables pour les élèves.
  À l'expression lettre-objet, peut-être vaut-il mieux préférer lettre-chose pour éviter des confusions, en particulier avec «objet mathématique».
- la lettre ignorée : aucune prise en compte de la lettre.. Exemple: $2a+3=5$ *ou* $5a$
- la lettre inconnue spécifique : la lettre est considérée comme un nombre que l'on ne connaît pas.
  Cette conception intervient dans les résolutions d'équation.
- la lettre nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs mais sa valeur n'est pas connue au départ.
- la lettre variable : la lettre représente plusieurs nombres.
  Cette conception implique que l'élève doit être capable de dégager un lien entre les valeurs des lettres.

• Les études montrent que la conception de la lettre comme nombre généralisé est difficile pour les élèves.

◊ Statut du « = »

• *En arithmétique*, le signe «=» est utilisé le plus souvent comme l'annonce d'un résultat

$7+4=11$ la somme de 7 et de 4 a pour résultat 11

Pour A. Sfard (1991) il s'agit là d'une *conception procédurale*. L'expression mathématique est comprise comme une procédure à appliquer. On obtient une réponse numérique et unique.

On retrouve cela dans des écritures d'élèves telles que $5\times 2=10+4=14$.

On peut penser que l'erreur $4x+3=7x$ relève de cette conception.

• *En algèbre*, le signe «=» traduit une relation d'équivalence (avec les propriétés de symétrie et de transitivité).

Très souvent le travail algébrique consiste à transformer des égalités en gardant la même valeur logique.

x^2-1 est un «objet» que l'on va manipuler comme un tout.

x^2-1 n'est pas «calculable» pour les élèves comme $7+4$ (on peut voir là le danger d'employer sans précautions le mot résultat dans les activités proposées aux élèves).

Il s'agit là d'une *conception structurale*.

x^2-1 *et* $(x-1)(x+1)$ portent la même *information désignative* mais pas la même *information ostensive.*

La transformation de l'une en l'autre permet de résoudre un problème comme par exemple : résoudre $x^2-1=0$.

Intérêt général

• Pensée et langage
Lev Vygotski - Éditions La Dispute (édition de 1997)
• Avec Vygotski
Ouvrage collectif dirigé par Yves Clot - Éditions La Dispute
• De l'acte à la pensée
Henri Wallon - Flammarion / collection Champs
• Psychologie de l'intelligence
Jean Piaget - Pocket / collection Agora
• Les maths en collège et au lycée
Coordonné par P.Legrand - Hachette Éducation
• Faire des mathématiques : le plaisir du sens
Bkouche, Charlot, Rouche - Armand Colin
• Apprentissages et didactiques, où en est-on? Chapitre Théorie et concepts fondamentaux
Sous la direction de G. Vergnaud - Hachette Éducation
• Le livre du problème / fascicule 1
IREM de Strasbourg - CEDIC - 1973
• Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques
Georges Glaeser - La Pensée Sauvage éditions
• Preuves et réfutations
Imre Lakatos - Hermann
• L'enseignement des mathématiques - Des repères entre savoirs, programmes et pratiques
Publication des IREM - Topiques Éditions - 1996
• Problème ouvert et situation-problème
Arsac, Germain, Mante - IREM de Lyon - mai 1988
• Dialectique Outil-objet, jeux de cadre
Régine Douady - Cahier de didactique des mathématiques n° 3 - IREM Paris VII - 1984
• Pensée symbolique et intuition
Michel Bourdeau - PUF / collection Philosophies
• Mathématiques au collège : les enjeux d'un enseignement pour tous
Actes du colloque Inter-IREM Premier Cycle - Lille / 1999
• Faire des maths en classe
INRP ADIREM - Actes du colloque de Poitiers - juin 2004
• Pour enseigner la philosophie des mathématiques
Groupe Philo-maths IREM de Strasbourg - août 2003
• Promenades mathématiques
Frédéric Larroche - Ellipses
• La naissance des objets mathématiques
Enrico Giusti - Ellipses / collection L'esprit des sciences

Plus particulièrement sur l'algèbre…

• Du numérique à l'algébrique au collège et au lycée
Recherche-Formation / Académie de Toulouse / 1997-2000
• Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales
Lemoyne, Conne, Brun - RDM volume 13 - n° 3 - 1993
• Le passage de l'arithmétique à l'algébrique - 3 parties
Y. Chevallard - Petit x n° 5; 19 et 23 - IREM de Grenoble
• Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire
L.Booth - Petit x n° 5 - IREM de Grenoble
• Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre ?
GÉCO - Repères n° - Revue des IREM
• Le concept d'égalité : clef ou verrou ?
F. Reynès - IREM de Bordeaux - 2e version revue et augmentée
• Quelques problèmes pour donner du sens à des règles de calcul littéral en troisième
F. Rouger-Moinier - Repères IREM n° 42 - 2001
• Concepts associated with the egality symbol (traduction du Groupe IREM)
C. Kieran - Educational Studies in Mathematics - 1981
• Cognitive processes involved in learning school algebra
C. Kieran - Booker, Filloy, Vergnaud et Wheeler - Mathematics and Cognition - Cambridge UP - 1990
• The learning and teaching of school algebra
C. Kieran - Handbook of research on mathematics teaching and learning - 1992
• Prealgebra : the transition from arithmetic to algebra
C. Kieran - L. Chalouh - Research ideas for the classroom - MacMillan - 1993
• Approaches to algebra
N. Bednarz -C. Kieran - L. Lee - Perspectives for research and teaching - Kluwer Publishers - 1996
• Signs and meanings in student's emergent algebraic thinking : a semiotic analysis
L. Radford - Educational Studies in Mathematics 42 - Kluwer Publishers - 2001
• On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking
L. Radford - Psychological Mathematics Education - 2002
• Gestures, speech, and the sprouting of signs : a semiotic-cultural approach to students' types of generalization
L. Radford - Mathematical thinking and learning - Pre-print 2003

Mouvements et apprentissages

La participation du corps à l'apprentissage

Les aspects **mental , psychologique et physiologique** sont inséparables dans l'apprentissage .
[*"corps , émotion et raison sont physiologiquement inséparables" Damasio*]

L'aspect **mental** est largement abordé dans les autres ateliers . Pour l'aspect **psychologique** qui est aussi très important , je vous renvoie à des lectures comme par exemple *"mathématiques , ma chère terreur"*.

C'est l'aspect **physiologique** , dont on a moins conscience , que je vais aborder maintenant car il est essentiel et indissociable des autres aspects pour un bon apprentissage .
[*"en l'absence de tout mouvement , vous n'avez pas de pensée consciente" Hannaford (*neurophysiologue*) "vous pensez avec votre cerveau et avec votre corps" Gelernter* **]**

Pour le comprendre , il faut d'abord savoir que dans le cerveau il y a trois "circulations" (*cf la théorie triunique de Paul MacLean*) que je vous résume :

gauche – droite	haut – bas	avant – arrière
↓	↓	↓
latéralité	**centrage**	**concentration**
↓	↓	↓
communication entre les parties gauche et droite du corps et du cerveau	équilibre entre pensée abstraite et l'émotionnel (1)	perception – formulation (2)

(1) *nous ne pouvons pas apprendre sans ressentir . Sans émotion pas de motivation mais trop d'émotion perturbe la pensée .*
(2) *passage de la vision globale à l'analytique et vice-versa .*

Ces trois "circulations" doivent être activées pour un apprentissage efficace .
[*""lorsque le corps et les émotions sont dissociés de la cognition , il n'y a pas apprentissage" Damasio*]

Pour cela , il faut d'abord que le cerveau soit bien irrigué d'où la nécessité de boire de l'**eau** régulièrement dans la journée; actuellement nos jeunes préfèrent les sodas, or ceux-ci freinent les "circulations" (*cf Hannaford*) .

Seulement , ce serait trop beau s'il suffisait de boire de l'eau !
Des recherches menées depuis plus de 50 ans proposent des exercices physiques qui peuvent réinitier les "circulations".
[*"le mouvement est la clé de l'apprentissage" Dennison ; "le mouvement ancre la pensée" Hannaford*]

Ces exercices, que l'on peut désigner par "gymnastique du cerveau" (*cf Brain-gym, Paul et Gail Dennison*) sont utilisés par les orthophonistes et autres psychomotriciens , mais aussi par des enseignants (notamment en primaire).

Ces exercices sont très simples , très courts et plaisent beaucoup aux élèves. La plupart sont spécifiques à un des types de “circulation”. En voici quelques exemples :

◊ **Latéralité** (gauche-droite)

• *Mouvements croisés* (être actif)

Lever une jambe en la pliant et toucher le genou avec la main opposée (variantes : *toucher le genou avec le coude ou toucher la cheville avec la main ou croiser par derrière*).
Continuer alternativement ce mouvement (jambe gauche / bras droit et jambe droite / bras gauche).

Ce mouvement active les deux hémisphères du cerveau en même temps.

• *Roulement du cou*

Laisser tomber la tête en avant et la rouler doucement d'un côté à l'autre (*comme si le menton traçait un demi-cercle sur le haut de la poitrine*), en expirant pour éliminer les crispations.

Ce mouvement décontracte le cou et libère les “barrages” entre les deux hémisphères.

◊ **Centrage** (haut-bas)

• *Points des hémisphères* (être clair)

Ils sont situés sous les clavicules, à gauche et à droite du sternum. Une main les masse en profondeur (20 s à 30 s) l'autre se place sur le nombril ; l'exercice s'accompagne d'une respiration lente et ample.
Recommencer en inversant les mains.

Ce mouvement aide les inter-relations émotion / abstraction.

• *Bâillement énergétique*

Masser l'articulation de la mâchoire avec les doigts, en émettant un son décontracté (aaaaahh.....) et en faisant semblant de bailler.

Ce mouvement améliore l'apport d'énergie au cerveau et supprime les tensions dans la tête.

◊ **Concentration** (avant-arrière)

• *La chouette*

Presser fermement le muscle d'un trapèze entre le pouce et les autres doigts de la main opposée et tourner la tête le plus loin possible du côté pincé en soufflant pour regarder derrière ; revenir, en inspirant, au centre et laisser tomber la tête quelques secondes. Le faire 3 fois de chaque côté.

Ce mouvement libère le stress lié à la coordination œil / main.

• *Allongement du bras*

Lever un bras verticalement . Activer les muscles en poussant le bras levé contre l'autre main successivement dans toutes les directions, droite / gauche / avant / arrière , en expirant profondément ; pendant l'inspiration, laisser "grandir" le bras vers le plafond . Changer de côté.

Ce mouvement aide à l'écriture et à l'utilisation des outils.

Bibliographie

• La gymnastique des neurones, le cerveau et l'apprentissage - *Carla HANNAFORD (éd Grancher)*

• Le mouvement, clé de l'apprentissage - *Paul et Gail DENNISSON (éd Le souffle d'or)*

• Mathématiques, ma chère terreur - *Anne SIETY (éd Calmann-Lévy)*