Atelier « Lecture d’erreurs communes »

1) idée “à la base” de cet atelier: **on peut multiplier les observations qui permettent de vérifier que des erreurs en mathématiques sont renouvelées** sur des “copies” d’élèves, indépendamment du lieu, du milieu socio-professionnel familial, de l’année, de l’établissement, par des élèves dont les bulletins scolaires peuvent être bien différents.

Il n’est donc pas illégitime d’émettre les hypothèses suivantes:

- ces types d’erreurs caractérisent peut-être des similitudes de contextes didactiques systémiques, bien davantage que des capacités individuelles d’élèves,
- les élèves qui écrivent ces erreurs suivent des “logiques” procédurales, identifiables, implicites, et “sues” parce qu’elles ont pu paraître efficaces.

2) le matériau de travail :

il est constitué par une soixantaine d’exemplaires du “questionnaire” dont une version est jointe ci-après, renseignés “spontanément” par des élèves de troisième (trois classes, années différentes, deux établissements non voisins), en temps limité (20/25 mn), sans calculatrice, avec brouillon éventuel au verso de la feuille.

3) l’activité dans l’atelier:

- individuellement, étude de trois ou quatre productions, en essayant **non pas de décrire les erreurs**, mais de
  - trouver des “logiques” susceptibles d’être en “résonnance consciencieuse” avec du quotidien scolaire,
  - repérer des “cohérences/incohérences” sur une même copie.
- par groupes, sur affiches, pour l’analyse en commun, présentation du travail ci-dessus pour quelques cas.

Une retranscription des affiches, un résumé de la discussion, ainsi que la liste de repères bibliographiques fournie, sont inclus ci-après au compte-rendu.

n° élève	production(s) de cet(te) élève	recherche des “logiques” suivies et des “cohérences”: propositions des groupes de stagiaires
A$_4$	$32=\frac{16}{3}x$ $-\frac{16}{3}x=-32$ $x=-32\times\frac{3}{16}$ $x=-6$	Je change de membre, je change de signe; ou bien confusion inverse/ opposé, pour le signe.
	$210-21x=0$ si $210=0$ ou $-21x=0$ $x=21$ L'équation a deux solutions 210 et 21	Résolu comme une “équation-produit”.
	$100x-x=12$ $x-x=\frac{12}{100}$ $0x=0{,}12$	??? je divise par ce qui est devant x
	$x^2+8=4$ $x^2=4-8$ $x^2=-4$ $x=\sqrt{-4}$	placage d’un modèle sans compréhension
	$C=\frac{7}{9}\times17+\frac{7}{9}\times64$ $=17\times64+\frac{7}{9}\times\frac{7}{9}$ $=144+\frac{49}{81}$ $=144+\frac{7}{9}$	il utilise une fausse “associativité”, “commutativité”, “distributivité”? (associer des entiers?) $\frac{49}{81}=\frac{7}{9}$ ... simplification? $\sqrt{\ }$; double; moitié ?
	... *suite du tableau p. suivante* **... / ...**	**... / ...**

n° élève	production(s) de cet(te) élève	recherche des “logiques” suivies et des “cohérences”: propositions des groupes de stagiaires
A$_4$ *(suite)*	$\frac{7}{3} - 7 = 14x$ $\frac{7-21}{3} = 14x$ $\frac{14}{3} = 14x$ $\frac{14}{3 \times 14} = x$ $\frac{1}{3} = x$	*(même groupe)* erreur de signe
	$D = \frac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}}$ $= \frac{\frac{2+1}{2}}{\frac{-2+1}{2}}$ $= 1 \times \frac{2}{-1}$ $= \frac{2}{-1} = \frac{-2}{1}$	simplification par 2
8	*Que savez-vous à propos du signe d’un produit de relatifs?* pas de réponse *Énoncer la propriété fondamentale desquotients* pas de réponse	Bonne copie; applique des méthodes correctement, mais ne sait pas formuler une règle générale
ξ	**... / ...**	**... / ...**

n° élève	production(s) de cet(te) élève	recherche des “logiques” suivies et des “cohérences”: propositions des groupes de stagiaires
	$100x - X = 12$ $\frac{100x}{100} - x = \frac{12}{100}$ $x - x = 0{,}12$ $0 = 0{,}12$	*(même groupe)*
	$x^2 + 8 = 4$ $x^2 = -4$ $x = -\sqrt{4}$ $x = -2$	L’élève met le symbole $\sqrt{\ }$ en faisant bien attention qu’il n’y ait pas le signe moins sous la racine
9	$D = \frac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}}$ $D = -1$	Pour l’élève, simplifier c’est barrer
	$G = \frac{2{,}009}{1{,}009}$ $G = 2$	idem
	$I = \frac{633}{1233}$ $I = 0{,}2$	même erreur, avec $\frac{6}{12}$=0,2 ; (12=2x6 et pour lui, l’inverse de 2 est 0,2)
	$H = \frac{0{,}0014}{1000}$ $H = 14 \times 10^{-5}$	l’élève a compté les “zéros”
31	$D = \frac{1+\frac{1}{2}}{-1+\frac{1}{2}}$ $D = \frac{1+\cancel{\frac{1}{2}}}{-1+\cancel{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{1}{-1}$ $= 0$ .../...	on barre si pareil .../...

n° élève	production(s) de cet(te) élève	recherche des "logiques" suivies et des "cohérences": propositions des groupes de stagiaires
31 *(suite)*	$G = \dfrac{2{,}009}{10{,}009}$ $= \dfrac{2}{10}$ $I = \dfrac{6\cancel{33}}{12\cancel{33}}$ $= \dfrac{6}{12}$	*(même groupe)*
	$100x = x + 12$ $\dfrac{100x}{-12} = x$	"on change de signe lorsqu'on fait passer de l'autre côté"! mais pas toujours ... mais rapporté à
	$x^2 + 8 = 4$ $x^2 + 8 - 8 = 4 - 8$ $x^2 = -4$	
	$210 - 21x = 0$ $21x = -210$ $x = \dfrac{-210}{-21}$	
49	$210 - 21x = 0$ $-21x = 210$ $x = 210 + 21$	confusion <--------------------- 21+ x et 21 x
	$32 = \dfrac{16}{3}x$	*cohérence avec*
	$32 - \dfrac{16}{3} = x$ $\dfrac{80}{3} = x$	confusion <-------------- $\dfrac{16}{3}x$ et $\dfrac{16}{3} + x$
	... /...	**... / ...**

n° élève	production(s) de cet(te) élève	recherche des "logiques" suivies et des "cohérences": propositions des groupes de stagiaires
50	210 - 21 x = 0 210 - 21 x - x = 0 - x 210 - 21 = - x 289 = - x x = 289	*(même groupe)* en cohérence avec: 100 x = x + 12 100 x - x = + 12 100 - x = 12 - x = 12 - 100 - x = - 88

Suite à des remarques portées par l'évaluation intermédiaire (au terme de la première session), ce compte-rendu de discussion met l'accent sur des différences d'analyses, que des lectures qui tentent de suivre un "modèle" historico-socio-culturel (inspiré des recherches de Vygotski), sont susceptibles d'apporter .

Ainsi, à propos de la "production" de l'élève référencé(e) "A_4" *(première affiche retranscrite ci-dessus).*

• plutôt que de "confusion pour le signe", on parlerait de **la non-conceptualisation** des nombres relatifs.

Chez "A_4", l'expression "nombre relatif " évoque (possiblement / probablement), quelque chose de l'ordre de ***" Des fois il y a un " moins " devant un nombre ! "***.
Pour "A_4 " il n'existe pas réellement des nombres de natures différentes; le signe ne fait pas partie du nombre, il en est séparé et "mis" devant; **un nombre relatif** n'est, dans un tel cas, pas **"lié" à un comptage, soit avant, soit après, une origine choisie,** (celle-ci étant associée à "0 ").

On a à faire non pas à un concept, mais **à un pré-concept, à un "complexe"** [1] .

Or **le mouvement de la pensée** par complexes s'effectue de proche en proche, suivant une perception "d'aspects" communs, sans qu'il y ait besoin d'une cohérence, sans le "fil conducteur" des significations, en quelque sorte.

La dynamique de pensée ne naît pas alors d'**une reconnaissance de relations d'après le sens,** mais signifie plutôt **une élaboration de traits d'union entre éléments de ressemblance.**

• Pour "A_4 " le concept "d'équation-produit" n'existe pas; si le mot est su, il n'a qu'un statut d'étiquette; la "logique" suivie semble s'apparenter à:

"Quand on nous donne une équation avec un zéro tout seul après le "égal", on fait: ... si

[1]) Le complexe est défini comme **un mode de généralisation:** c'est l'antécédent du concept; les recherches de Vygotski en dégagent cinq formes fondamentales dans le développement de la pensée enfantine; la dernière forme, qu'il a appelée **le pseudo-concept, "est un pont jeté entre la pensée concrète, par images intuitives et la pensée abstraite de l'enfant.".** La pensée par complexes constitue une première racine dans l'histoire du développement des concepts et **"dans la vie de tous les jours notre pensée opère aussi très souvent par pseudo-concepts."** VYGOTSKI: **Pensée et langage**, édition française de 1 985, pages 177& 191.

le premier nombre** "**égal-à-zéro**" **ou ... soit le deuxième-égal-à-zéro .** **" ou plus agglutiné (puisqu'en langage pour soi) **"... ça fait 0 si le premier ... égale 0 ou si le deuxième ... égale 0; ... "; "- 21 et 21 ça fait 0 ".**

Cet(te) élève a appris des "gestes" déclenchés par certains signaux, afin de "disposer" les choses autrement, pour arriver à " x = ... "; des fois ça marche, ou ça ne marche pas, ou ça marche presque ... au signe près *(premier relevé)*!

• Ce mouvement de la pensée de type "réactionnel", guidé par les sens et non par le sens, se retrouve manifestement dans le calcul du nombre "C" par cet(te) élève *(cinquième relevé sur l'affiche).*

Ses actes de pensée sont, possiblement / probablement, initiés par: **" faut "regrouper" les deux "pareils" "**

le brouillon au verso de la copie, permet de comprendre que 144 résulte du produit de 17 par 9, avec "7x9 = 54" ... pour (peut-être) "un produit en croix" et une "simplification" par 7/9 ? (le 64 ... perdu en tournant la feuille, ... correspondrait à une véritable étourderie??).

"A4 ", d'après l'ensemble de la copie, est dans la "magie" et s'efforce, muni(e) d'un halo langagier, de reproduire "les tours qu'on lui a appris à faire", mais a renoncé au sens mathématique.

"A4 "... "travaille"... et de telle façon que la réussite peut sembler là, puisque on peut relever sur sa copie:

$$H = \frac{0,0014}{1000} = \frac{14\times10^{-4}}{10^{3}}$$, et aussi,

$$G = \frac{2,009}{10,009} = \frac{2009\times10^{-3}}{10009\times10^{-3}}$$ .... $\approx 20\%$ de réponses correctes sur l'ensemble des copies

et encore, <u>après avoir pris l'initiative de **corriger l'énoncé**</u> - qui demandait le quotient de F par 3^{200} (changé en 3^{250}) , "A4 " a écrit: $\frac{F}{3^{250}} = F\times3^{-250}$

.... idée de "retrouver" un exercice réussi ... ??...

Maintenant à propos de la "production" de l'élève référencé(e) "8 "*(deuxième affiche retranscrite ci-dessus).*

Les collègues on estimé que cet(te) élève "applique des méthodes correctement", mais que peut nous révéler notre lecture "orientée" quant aux éventuelles différences de culture mathématique, entre "8" et "A4 "?

- à "calculer B" avec $B = \frac{490}{13^{2}}\times\frac{260}{700}\times52$, cet(te) élève a produit,
  - le brouillon de calcul suivant:

700 × 13	490 × 260	127400 × 52	6624800 + 127400
2100	29400	254800	6752200
7000	98000	6370000	
9100	127400	6624800	

- et la réponse:

$$B = \frac{6752200}{910000} = \frac{67522}{9100}$$

<u>Quels ont été les “enchaînements” de pensée possibles / probables?</u>

- j’ai des fractions à multiplier ... il suffit de mettre un “1” **avec** 52 ..... ,

“... je multiplie tout ce qui est en haut avec ce qui est en haut, et ce qui est en bas avec tout ce qui est en bas, ... ça peut pas être plus simple!”... qu’elle a dit la prof.;

- pour “faire la multiplication”, faut mettre le plus grand en haut, et bien aligner;
- au carré, ... avec deux “zéros”, ... faut **rajouter** deux “zéros”;
- ... après la multiplication par 52, faut que je rajoute une fois, à cause du “1” pour **transformer** “52” en fraction;
- il y a deux “zéros” en haut et en bas, je peux les **enlever**, pour simplifier.

• rapprochements avec d’autres réponses sur cette copie que les collègues ont reconnue comme étant “bonne”:

- $\frac{2500}{99} < 25$;
- $\frac{13}{4}$ et $(-53)^3$ ne sont pas des décimaux;
- si A = 1 999 999 x 236 ... A $\approx$ 236 000 000
- si H = $\frac{0,0014}{1000}$ ... H = 0,000014 *(“il y a 6 zéros, mais celui avant la virgule ne compte pas”);*
- $x^2 = -4$

Il semble bien que comme “A_4 ”, cet(te) élève a accumulé des “repères” dans le but de bien **“savoir faire”** des exercices pour lesquels l’école entraîne (avec un meilleur rendement supposé pour “8”), mais il apparaît que ceux-ci ne mobilisent pas d’idées mathématiques, pas de vérités d’ordre général et formulables, pas de concepts au sens propre.

On reste dans le perceptif et le “réactionnel”, dans la pensée par complexes qui domine dans les actions du “quotidien”.

Là encore, un mot mathématique est “non pas le signe d’un certain sens, **auquel il est lié dans l’acte de pensée,** mais le signe d’une chose donnée par les sens, **liée associativement** à une autre chose perçue par les sens” [2]

La mise en forme rédactionnelle n’est pas une **traduction de ce que l’on saurait** indépendamment de la manière de penser, indépendamment des mots; **“ la pensée ne s’exprime pas dans le mot, elle se réalise dans le mot ”,** nous dit encore Vygotski.

Si l’élève *“ne sait pas formuler une règle générale”*, **en adaptant cette formulation à des contextes variés**, il n’est pas en mesure de se l’approprier, de la maîtriser et de l’employer à volonté.

[2])VYGOTSKI: Pensée et langage, édition française de 1 985, page 189.